BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: ______________________

ACQ7988
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B28799
035/2: : |a (CaOTULAS)160537141
040: : |a RPB |c RPB |d NIC |d MiU
041:1 : |a ger |h eng
100:1 : |a Forsyth, Andrew Russell, |d 1858-1942.
245:00: |a Lehrbuch der differential-gleichungen, |c von Dr. Andrew Russell Forsyth. Mit einem anhange: Die resultate der im lehrbuche angeführten übungsaufgaben enthaltend, hrsg. von H. Maser. Autorisierte übersetzung.
260: : |a Braunschweig, |b F. Vieweg, |c 1889.
300/1: : |a xix, 742 p. |c 22 cm.
500/1: : |a Translation of: A treatise on differential equations.
504/2: : |a "Autoren-verzeichniss": p. [739]-742.
650/1: 0: |a Differential equations
700/1:1 : |a Maser, Hermann, |e ed.
998: : |c DPJ |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: ____________
Camera Operator: ______________

LEHRBUCH

DER

DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN.

LEHRBUCH

DER

DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN

VON

DR. ANDREW RUSSELL FORSYTH,

Professor am Trinity College zu Cambridge.

MIT EINEM ANHANGE:

DIE RESULTATE DER IM LEHRBUCHE ANGEFÜHRTEN ÜBUNGSAUFGABEN ENTHALTEND,

HERAUSGEGEBEN VON

H. MASER.

AUTORISIRTE ÜBERSETZUNG.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1889.



Alle Rechte vorbehalten.

VORWORT DES HERAUSGEBERS.

Die mehr und mehr wachsende Bedeutung, welche die analytische Behandlung der Lehre von den Differentialgleichungen in neuerer Zeit für die Entwickelung der gesammten Mathematik gewinnt, veranlasst, dass auch in den Universitätsvorlesungen grössere Rücksicht darauf genommen und der elementarere Theil dieser Theorie, nämlich die Angabe der Methoden, welche zur wirklichen Integration einer bei irgend einer Untersuchung auftretenden Differentialgleichung führen können, auf das Nothwendigste beschränkt werden muss. Es bleibt grösstentheils dem Privatfleisse des Studirenden überlassen, sich genügende Kenntniss der Integrationsmethoden und die nöthige Fertigkeit in der Handhabung derselben zu verschaffen. Lehrbücher aber, welche diesem Zwecke in ausreichendem Maasse dienen könnten, giebt es nur sehr wenige. Fast ausschliesslich wird die Lehre von der Integration der Differentialgleichungen in Lehrbüchern über Differential- und Integralrechnung als Anhang zur letzteren gegeben; dies bedingt von selbst, dass nur die hauptsächlichsten Methoden kurz angeführt werden können. Das vor zwei Jahren erschienene, ganz elementar gehaltene Forsyth'sche Werk „A Treatise on Differential Equations“ zeichnet sich vor anderen dieser Art besonders durch die Mannigfaltigkeit der Integrationsmethoden aus, für deren Anführung jedoch dem Verfasser stets die praktische Brauchbarkeit entscheidend ist. In dieser Beziehung ist hervorzuheben, dass die praktisch sehr bequemen, leicht zum Ziele führenden symbolischen Methoden, für welche die englischen Mathematiker ja überhaupt eine gewisse Vorliebe zeigen, während man ihnen in deutschen oder französischen Werken nur selten begegnet, eine Berücksichtigung erfahren haben, dass dagegen die theoretisch allerdings sehr wichtige, praktisch aber

immerhin nur fraglichen Werth besitzende Methode des integrirenden Factors ganz übergangen ist. Die Anwendung auf Geometrie wird nicht vernachlässigt und die geometrische Bedeutung der allgemeinen Resultate überall da, wo eine solche möglich ist, gegeben. Namentlich aber wird auf die in der mathematischen Physik häufiger auftretenden Differentialgleichungen Rücksicht genommen, ihre Integration in den einzelnen besonderen Fällen wird gezeigt und die hauptsächlichsten Eigenschaften der durch sie definirten Functionen werden mit Hülfe der Differentialgleichungen abgeleitet. Die überaus zahlreichen, jedem Paragraphen angefügten, auf dessen Inhalt bezüglichen Beispiele, sowie die Uebungsaufgaben am Schlusse eines jeden Capitels bieten dem Studirenden die bequemste Gelegenheit, sich selbst von dem sicheren Besitze der angegebenen Methoden Gewissheit zu verschaffen. Dieselben dienen aber auch dazu, auf einzelne Punkte hinzuweisen, die im Texte selbst nicht abgehandelt werden konnten. Bei schwierigeren Aufgaben ist stets der Autor angegeben, dessen Abhandlungen sie entnommen sind, wie denn überhaupt an den verschiedensten Stellen auf die Quellen, aus denen der Leser weitere Belehrung schöpfen kann, hingewiesen wird.

Aus mehrfachen Gründen erschien es vortheilhaft, dem Buche einen Anhang anzufügen, welcher die Resultate oder kurze Andeutungen über die Auflösung der im Buche gestellten Aufgaben enthält. Wenn auch das Volumen des Bandes dadurch erheblich vergrössert worden ist, so wird dieser Uebelstand hoffentlich doch reichlich durch den Nutzen aufgewogen werden, welcher dem Studirenden dadurch erwächst. Denn da das Buch für solche bestimmt ist, die eben erst in das Studium der Differentialgleichungen eintreten, so ist denselben durch den Anhang nicht allein die Prüfung ihrer eigenen Rechnungen ermöglicht, sie werden auch mit manchen Rechnungskunstgriffen bekannt, die man eben nur an einzelnen Beispielen erlernen kann. Einen grossen Theil der Resultate habe ich den verschiedensten Werken und Abhandlungen, zuweilen wörtlich, entnommen, nicht aber ohne vorher strenge Controlle geübt zu haben, wobei es sich öfters ergab, dass Irrthümer, wie dies leider häufig der Fall ist, aus einem Werke in das andere übergegangen waren. Der andere Theil ist von

mir im Verein mit Herrn Gymnasiallehrer A. Baerthel, dem ich für seine freundliche Unterstützung an dieser Stelle meinen Dank auszusprechen mich verpflichtet fühle, bearbeitet worden, und dürften wohl auch alle diese Resultate correct sein. Hinsichtlich der Ableitung derselben möge bemerkt werden, dass die zur Anwendung gekommenen Methoden keineswegs als die einzigen oder besten und kürzesten, welche zur Lösung führen, betrachtet werden sollen; vielmehr richten sich dieselben streng nach den Paragraphen des Textes, zu deren Erläuterung die Aufgaben dienen; nur in einzelnen Fällen und besonders da, wo durch die Aufgaben selbst eine Erweiterung des Textes angestrebt wird, sind andere möglichst zweckmässige Methoden benutzt worden. Möge der Nutzen dieses Anhanges der dafür aufgewendeten Mühe entsprechen.

H. Maser.

VORWORT DES VERFASSERS.

In dem vorliegenden Bande habe ich mich bestrebt, die darin behandelten Theile des Gegenstandes so eingehend wie möglich zu discutiren; man wird vieles finden, was bisher nur in mathematischen Journalen veröffentlicht ist. Gleichwohl erhebt das Buch keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Nicht aufgenommen sind die Untersuchungen von Fuchs über die Integration der linearen Differentialgleichungen, die von Königsberger über die Irreducibilität von Differentialgleichungen, die Discussion der Pfaff'schen Gleichung, die neuen Untersuchungen von Hermite und Halphen und die geometrischen Anwendungen der hypergeometrischen Reihe von Klein. Nur eine sehr kurze Skizze der Jacobi'schen Methode für die partiellen Differentialgleichungen ist zu geben versucht worden, während die Methoden von Cauchy, Lie

und Mayer keine Berücksichtigung erfahren haben. Diese und andere hier übergangene Gegenstände hoffe ich späterhin in einem zweiten Bande zu geben.

Bei der Abfassung dieses Bandes habe ich viele Quellenschriften in Gestalt von Lehrbüchern, Abhandlungen und dergl. zu Rathe gezogen. Wenn ich auch nicht auf alle im Einzelnen hinweisen kann, so will ich doch als solche, die mir von grossem Nutzen gewesen sind, Boole's „Treatise on Differential Equations" und dessen Supplement, ferner Moigno, Imschenetsky und Mansion erwähnen. In geringerem Maasse habe ich Gregory's „Examples", Serret und de Morgan benutzt. Manchen Hinweis auf Originalabhandlungen wird man in den einzelnen Capiteln finden.

Es kommen, über das ganze Buch zerstreut, zahlreiche Uebungsaufgaben vor, im Ganzen mehr als achthundert. Die meisten derselben sind den Prüfungsarbeiten entnommen, welche an der Universität und dem College zu Cambridge zu verschiedenen Zeiten gegeben wurden; einige sind neu und viele von ihnen sind den benutzten Abhandlungen entnommen. Bei den letzteren dürfte der Urheber stets angegeben sein. Bei der Reichhaltigkeit der angeführten Resultate kann ich nicht hoffen, dass sie sämmtlich correct und alle aufgenommenen Gleichungen lösbar seien*), und es wird mir lieb sein, Berichtigungen von irgend welchen wirklich gefundenen Irrthümern zu erhalten.

---

*) Die deutsche Ausgabe dürfte in dieser Beziehung correct sein. Einen Theil der Berichtigungen verdankt der Herausgeber einer freundlichen Mittheilung des Herrn Verfassers selbst, auf dessen Veranlassung auch einige geringfügige Aenderungen im Texte vorgenommen wurden. Ein grösserer Theil von Druckfehlern und Irrthümern in den Aufgaben ist vom Herausgeber bemerkt und verbessert worden.

Bemerkung.

Nachdem die vorliegende Uebersetzung des Werkes: A Treatise on Differential Equations, by A. R. Forsyth, bereits vollständig gedruckt war, erfuhr der Herausgeber, dass eine neue Auflage des Originals in Vorbereitung sei. Es erschien daher gut, mit der Ausgabe dieses Buches noch bis zum Erscheinen der zweiten Auflage des Originals zu warten, um auf etwaige Aenderungen der ersten Auflage nachträglich Rücksicht nehmen zu können. Eine sorgfältige Vergleichung der nunmehr erschienenen zweiten Auflage mit der ersten ergiebt jedoch nur höchst geringfügige Abweichungen zwischen ihnen. Abgesehen von einzelnen, an einigen wenigen Stellen neu hinzugefügten Uebungsaufgaben haben nur die §§. 92—95 der ersten Auflage eine Umgestaltung erfahren und überdies sind im letzten Capitel einige kleine Zusätze gemacht worden. Die §§. 92—95 der deutschen Ausgabe stimmen aber mit den betreffenden Stellen der zweiten Auflage des Originals grösstentheils wörtlich, jedenfalls inhaltlich durchaus überein, da der Herausgeber durch eine Mittheilung des Herrn Verfassers in den Stand gesetzt worden war, jene Aenderungen rechtzeitig vorzunehmen. Die Zusätze im letzten Capitel beziehen sich auf folgende Stellen: Man lese statt

Seite 409 Zeile 11 v. o. bis Zeile 8 v. u.:

. . . ersten Grades. Da die nothwendigen Bedingungen für die Existenz eines Zwischenintegrals der Annahme noch erfüllt sind, so folgt, dass wenigstens eine der Gleichungen ersten Grades, wenn sie mit der Gleichung

$$Rdpdy + Tdqdx = Vdxdy$$

und, wenn nöthig, mit $dz = pdx + qdy$ combinirt wird, zu einem Integralsystem führen wird, welches u und v bestimmt, und man wird daher ein Zwischenintegral von der Form

$$u = f(v)$$

erhalten. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass eine jede der beiden Gleichungen ersten Grades, in derselben Weise behandelt, zu einem Integralsystem von der gewünschten Form führt; alsdann wird man zwei Zwischenintegrale

$$u_1 = f(v_1), \qquad u_2 = \varphi(v_2)$$

erhalten.

Ist $S^2 = 4RT$, so existirt nur eine einzige Gleichung ersten Grades, welche mit

$$Rdy^2 + Tdx^2 - Sdxdy = 0$$

äquivalent ist; diese eine Gleichung wird, da die nothwendigen Bedingungen erfüllt sind, durch ein ähnliches Verfahren zu einem Zwischenintegral führen.

§. 234.

Gehen wir nun zu dem allgemeineren Falle über, in welchem U nicht gleich Null ist, so können wir in ähnlicher Art beweisen, dass man jedenfalls ein Zwischenintegral, möglicherweise aber auch zwei Zwischenintegrale aus den Hülfsgleichungen ableiten kann, vorausgesetzt, dass die für die Existenz eines Zwischenintegrals erforderlichen Bedingungen erfüllt sind. Multipliciren wir die u. s. w.

Seite 411 Zeile 13 bis 15 v. o.:

Aus einem der Paare werden wir zwei Integrale von der Form $u = a$ und $v = b$ erhalten; somit können wir durch eben jenes Paar ein Zwischenintegral finden.

Möglicherweise können wir aber auch wie in dem einfacheren Falle des §. 233 durch jedes der beiden Paare von Gleichungen ersten Grades ein Zwischenintegral erhalten. Diese beiden . . . .

Seite 411 Zeile 14 bis 9 v. u.:

Wir können nun weiter fortfahren in der Integration, sei es der linearen Gleichung des §. 233 oder der allgemeineren Form des §. 234. Nehmen wir das eine erhaltene Zwischenintegral, wenn es nur ein solches giebt, oder jedes der Zwischenintegrale, wenn es deren zwei giebt, so erhalten . . . .

Seite 461 Zeile 14 bis 17 v. o.:

. . . die sich aus ihnen durch Elimination von $\frac{\partial W}{\partial q}$ und nachheriger Division durch U ergiebt.

Diese letzte Gleichung ist unter der offenbaren Annahme, dass U nicht gleich Null ist, abgeleitet worden. Ist aber $U = 0$, so kann man sie leicht aus den Gleichungen

$$R \frac{dp}{dx}\frac{dy}{dx} + T\frac{dq}{dx} - V\frac{dy}{dx} = 0$$

$$R\frac{dy}{dx} = S \pm G^{1/2}$$

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

ableiten, wenn man für dx, dy, dz ihre Ausdrücke durch dp und dq in die Geichung $dW = 0$ substituirt und den Coefficienten von dp gleich Null setzt. Die Gleichung kann daher benutzt werden in dem Falle, wo $U = 0$ ist; die beiden ersten Gleichungen sind in diesem Falle einer einzigen äquivalent, welche mit der neuen Gleichung combinirt werden müsste.

Die Function W . . . .

INHALTSVERZEICHNISS.

Erstes Capitel.

Einleitung.

Zweites Capitel.

Differentialgleichungen der ersten Ordnung.

Drittes Capitel.

Allgemeine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten.

Viertes Capitel.

Vermischte Methoden.

Fünftes Capitel.

Integration durch Reihen.

Sechstes Capitel.

Die hypergeometrische Reihe.

Siebentes Capitel.

Lösung durch bestimmte Integrale.

Achtes Capitel.

Gewöhnliche Differentialgleichungen mit mehr als zwei Veränderlichen.

Neuntes Capitel.

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

Zehntes Capitel.

Partielle Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung.

Erstes Capitel.

Einleitung.

§. 1.

Wenn eine veränderliche Grösse y eine Function einer anderen veränderlichen Grösse x ist, so kann die Beziehung zwischen den beiden durch eine Gleichung dargestellt werden, z. B. durch

$$\varphi(x, y) = 0.$$

In dieser Gleichung können Constanten vorkommen; eine von diesen Constanten möge mit a bezeichnet werden. Wird die Gleichung aufgelöst nach y, so wird diese Constante a in den Ausdruck für y eingehen und man wird, indem man a verschiedene Werthe beilegt, im Allgemeinen eine Anzahl entsprechender Werthe für y erhalten. Will man in der Grundbeziehung den Umstand andeuten, dass der Werth von y von dem Werthe von a abhängt, so kann dies dadurch geschehen, dass man die obige Gleichung in der Form schreibt:

$$(1) \qquad \varphi(x, y, a) = 0.$$

Man kann nun aus dieser Gleichung eine andere ableiten, welche alle die Werthe von y in sich schliesst, die man dadurch erhalten kann, dass man der Constanten a alle möglichen Werthe beilegt. Der Differentialquotient von y nach x wird bestimmt durch die Gleichung:

$$(2) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{d y}{d x} = 0,$$

in welcher $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ eine partielle Differentiation bezüglich nach x und y andeuten. Die Gleichung (2) wird im Allgemeinen die in (1) vorkommende Constante a ebenfalls enthalten; wird die Constante

zwischen den beiden Gleichungen eliminirt, so wird das Resultat der Elimination von der Form sein:

$$(3)\quad f\left(x, y, \frac{d\,y}{d\,x}\right) = 0,$$

wobei f eine bestimmte von der Form der Function φ in Gleichung (1) abhängende Function ist. Gleichung (3) ist nun eine solche, welche alle die Werthe von y in sich schliesst, die man aus (1) erhalten kann; denn obwohl sie aus den beiden Gleichungen (1) und (2), deren jede a enthält, abgeleitet ist, so ist doch der besondere Werth dieser Grösse dabei nicht in Betracht gekommen, und es würde sich, wenn man in den einzelnen Theilen des Eliminationsverfahrens für a irgend eine andere Constante a' gesetzt hätte, dasselbe Resultat ergeben haben, da die Constante in dem Resultate nicht mehr vorkommt.

Analog können, wenn y von zwei Constanten a und b in der durch die Gleichung

$$\Phi(x, y, a, b) = 0$$

definirten Weise abhängt und die den ersten und zweiten Differentialquotienten von y nach x bestimmenden Gleichungen mit hingeschrieben werden, die beiden Constanten a und b eliminirt werden, und die resultirende Gleichung wird von der Form sein:

$$(3')\quad F\left(x, y, \frac{d\,y}{d\,x}, \frac{d^2 y}{d\,x^2}\right) = 0.$$

Die Functionen f und F können in jedem Falle wirklich hergeleitet werden (mittelst der Methoden der Differentialrechnung und der höheren Algebra), sobald die Formen von φ und Φ gegeben sind.

Ist im Besonderen

$$\vartheta(x, y) = a$$

eine solche Form, aus welcher a eliminirt werden soll, so erhalten wir als diejenige Gleichung, welche sämmtliche Werthe y umfasst, sogleich:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\frac{d\,y}{d\,x} = 0,$$

ohne dass noch eine Elimination nöthig wäre.

So führt z. B. die Gleichung

$$y^2 = 4\,a\,x$$

zu der folgenden:

$$y = 2\,x\frac{d\,y}{d\,x},$$

welches die allgemeine Gleichung aller Parabeln ist, die dieselbe Achse und denselben Scheitel haben.

§. 2.

Derartige Beziehungen wie (3) und (3′) werden **„Differentialgleichungen“** genannt; die Gleichung (1), welche **frei** ist von allen Differentialquotienten, heisst eine **Lösung** von (3). Gerade so wie beim Uebergange von (1) zu (3) eine einzige willkürliche Constante weggeschafft worden ist, wird man umgekehrt beim Uebergange von (3) zu (1) mit Recht erwarten, dass eine einzige willkürliche Constante eingeführt werden wird; und da man zur Elimination von n willkürlichen Constanten die die n ersten Differentialquotienten bestimmenden Gleichungen zusammen mit der ursprünglichen Gleichung nöthig hat, so darf man umgekehrt, wenn man von einer solchen Relation zwischen Differentialquotienten bis zum $n$ten einschliesslich übergeht zu einer Gleichung, die frei von den letzteren und äquivalent zu jener Relation ist, erwarten, dass n willkürliche Constanten werden eingeführt werden.

§. 3.

Es ist nicht schwer zu sehen, wie diese willkürlichen Grössen in die Lösung der Gleichung eintreten müssen. Zur grösseren Einfachheit wollen wir eine Gleichung von der Form

$$M + N \frac{dy}{dx} = 0$$

betrachten, in welcher M und N Functionen von x und y sind. Es mögen x und y die Cartesischen Coordinaten eines Punktes P in einer auf zwei rechtwinklige Achsen bezogenen Ebene bedeuten; alsdann ist die Gleichung (1) die Gleichung einer Curve und $\frac{dy}{dx}$ ist die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Tangente der Curve im Punkte P mit der x-Achse bildet, so dass die obige Differentialgleichung die Richtung einer Linie in jedem beliebigen Punkte der Ebene bestimmt. Wir nehmen irgend einen Punkt A auf der y-Achse an und gehen von A aus eine ganz kurze Strecke in derjenigen Richtung fort, welche durch den im Punkte A geltenden Werth von $\frac{dy}{dx}$ bestimmt wird; wir gelangen dadurch zu einem anderen Punkte B. Von B aus gehen wir wieder eine

ganz kurze Strecke in derjenigen Richtung fort, welche durch den im Punkte B geltenden Werth von $\frac{dy}{dx}$ bestimmt wird, und gelangen so zu einem anderen Punkte C. Setzt man dieses Fortschreiten für eine Anzahl von Richtungen weiter fort, so wird eine Figur in der Ebene verzeichnet werden, und wenn jede der Strecken, welche der die Figur beschreibende Punkt der Annahme nach durchlaufen soll, unendlich klein wird, so wird die Figur in eine durch den Punkt A gehende Curve übergehen. Diese Curve wird eine bestimmte Gleichung haben, welche dargestellt werden kann in der Form:

$$F(x, y, y_0) = 0,$$

worin y_0 die Ordinate von A ist. Hätte man an Stelle von A einen anderen Anfangspunkt A' gewählt, so würde man eine andere Curve erhalten haben, in deren Gleichung die Grösse der Ordinate von A' vorkommen würde; dasselbe Resultat würde sich ergeben, wenn man der Reihe nach jeden Punkt auf der y-Achse nähme, da im Allgemeinen eine und nur eine Curve durch jeden solchen Punkt hindurchgeht. Da jede Gleichung, oder eine einzige Gleichung als Repräsentantin aller, als eine Lösung der Differentialgleichung betrachtet werden kann, so ist klar, dass die Lösung des betrachteten Beispiels eine willkürliche Constante enthalten wird; und wenn man somit auf irgend welche Weise eine von Differentialquotienten freie Gleichung erhalten kann, darf man erwarten, dass eine willkürliche Constante in dieser Gleichung vorkommen wird. Diese auf die letztere Art erhaltene willkürliche Constante braucht aber nicht nothwendig die Ordinate des Punktes zu sein, in welchem sich die durch die Lösung dargestellte Curve und die y-Achse schneiden; es würde ein willkürliches Element in die Gleichung auch eingetreten sein, hätte man das Verzeichnen der Curve von einem Punkte der Ebene beginnen lassen, der nicht auf einer der Coordinatenachsen liegt.

In dem betrachteten Beispiel hat die Gleichung, aus welcher sich $\frac{dy}{dx}$ bestimmt, nur eine einzige Wurzel; ist dieselbe von der Form:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + P\frac{dy}{dx} + Q = 0,$$

so wird die Integralgleichung von der Form sein:

$$A^2 + AP' + Q' = 0,$$

worin A eine willkürliche Constante ist, und es ist nicht schwer zu sehen, dass, wenn die Differentialgleichung in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ vom $n$ten Grade ist, alsdann die entsprechende Integralgleichung eine willkürliche Constante in der $n$ten und in niedrigeren Potenzen enthält.

§. 4.

Aus dem, was über die eine der Methoden, vermittelst deren Differentialgleichungen gebildet werden können, gesagt worden ist, könnte man entnehmen, dass es leicht sein müsste, von der Differentialgleichung zur Integralgleichung zurückzukehren; dem ist aber nicht so. Die einzelnen Stadien einer Elimination lassen sich nicht wieder rückwärts durchlaufen, und es muss daher eine andere Methode oder andere Methoden Platz greifen. Die Methoden, welche zur Integration von gewissen verschiedenen Formen von Differentialgleichungen am erfolgreichsten zur Anwendung gebracht werden, sollen später genauer auseinandergesetzt werden.

§. 5.

Wenn man von einer gegebenen Integralfunction zu der entsprechenden Differentialgleichung übergeht, so kann sich die letztere von einer Form erweisen, die nicht unter den bereits bekannten enthalten ist. Umgekehrt, wenn man von einer gegebenen Differentialgleichung ausgeht, darf man nicht erwarten, dass man nothwendig zu einer Function gelangen müsse, welche unter denen enthalten wäre, mit deren Eigenschaften man bekannt ist. Es ist daher wünschenswerth anzugeben, was man in einem solchen Falle unter der Lösung der Differentialgleichung zu verstehen habe.

Wenn wir in der Algebra fragen, ob irgend eine besondere Gleichung aufgelöst werden könne, so wollen wir dabei wissen, ob der Werth der in ihr vorkommenden Veränderlichen sich mittelst bekannter Functionen ausdrücken lasse. So kann z. B. bei der Gleichung

$$ax = b$$

der Werth von x unmittelbar durch Division erhalten werden. Um dagegen die Gleichung

$$\xi^2 = K$$

zu lösen, müssen wir eine Function einführen, was für die erste Gleichung nicht nöthig war, und indem wir ξ in der Form

$$\xi = \pm K^{\frac{1}{2}}$$

ausdrücken, betrachten wir die Gleichung als gelöst. Ferner können Gleichungen vom dritten und vierten Grade gelöst werden mit Hülfe von Functionen, die dieser ganz analog sind, nämlich mit Hülfe von dritten und vierten Wurzeln aus Grössen; allgemeine Gleichungen vom fünften und höheren Grade lassen sich aber nicht mehr mittelst dieser Functionen oder deren Verbindungen mit analogen Functionen lösen. Daraus darf nicht gefolgert werden, dass Lösungen dieser Gleichungen überhaupt nicht existiren; sie können aber nur gelöst werden, wenn Functionen, die bei der Lösung von Gleichungen niederer Grade nicht gebraucht werden, eingeführt werden.

Wenn wir analog im Falle einer Differentialgleichung sagen, sie könne gelöst werden, so meinen wir damit nicht, dass die Lösung sich müsse ausdrücken lassen durch rein algebraische Functionen, durch Exponentialfunctionen (einschliesslich der Sinus und Cosinus) und durch logarithmische Functionen (einschliesslich der inversen Kreisfunctionen). Die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

ist gleichbedeutend mit

$$y = x^2 + A.$$

Nähmen wir aber an, dass die Eigenschaften des Logarithmus unbekannt seien, und dass die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

zur Auflösung vorgelegt sei, so würden wir erhalten:

$$y = A + \int \frac{dx}{x};$$

und indem wir

$$\int \frac{dx}{x} = f(x)$$

setzten, würden wir die Gleichung beweisen:

$$f(x) + f(y) = f(xy),$$

und würden so bekannt werden mit den Eigenschaften dieser neuen Function, so dass wir sie unter die bekannten Functionen aufnehmen würden. Aber auch, wenn wir nicht die Eigenschaften von

$f(x)$ herzuleiten im Stande gewesen wären, würden wir doch immer den durch

$$A + \int \frac{dx}{x}$$

dargestellten Werth von y als Lösung der Differentialgleichung betrachtet haben. In der That: Jede Differentialgleichung **wird als gelöst betrachtet,** wenn der Werth der abhängigen Veränderlichen dargestellt ist als Function der unabhängigen Veränderlichen, sei es mittelst bekannter Functionen, sei es mit Hülfe von Integralen, wobei es gleichgültig ist, ob in den letzteren die Integrationen mit Hülfe von bereits bekannten Functionen sich wirklich ausführen lassen oder nicht. So ist z. B.

$$y = A + \int \frac{e^x}{x} dx$$

eine Lösung von

$$x \frac{dy}{dx} = e^x,$$

obwohl der Werth von y nicht anders als in dieser Form dargestellt werden kann, wenn man nicht eine neue Function einführt, deren Eigenschaften sich ermitteln lassen. Auf diese Weise giebt die Lösung von Differentialgleichungen beständig **neue** Functionen an die Hand, welche der Reihe der bereits bekannten Functionen hinzuzufügen sind.

§. 6.

Bevor wir weiter gehen, ist es gut, die **Erklärungen** einiger bei diesem Gegenstande **gebräuchlicher Ausdrücke** zu geben.

Jede Gleichung, welche eine Beziehung zwischen abhängigen Veränderlichen, ihren Differentialquotienten von irgend welcher Ordnung und unabhängigen Veränderlichen darstellt, wird eine **Differentialgleichung** genannt.

Die Differentialgleichungen werden **eingetheilt in zwei Arten,** nämlich:

I. In **gewöhnliche** Differentialgleichungen, das sind solche, in denen nur **eine** einzige **unabhängige** Veränderliche, sei es explicit, sei es implicit, vorkommt, und in denen alle Differentialquotienten auf diese Veränderliche bezogen sind. Sollten mehrere abhängige Veränderliche vorhanden sein, so ist die Anzahl der Gleichungen, welche nothwendig sind, um dieselben als Functionen der unabhängigen Veränderlichen vollständig

zu bestimmen, gleich der Anzahl jener Veränderlichen. So kann uns z. B. gegeben sein:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + \mu x = 0,$$

worin x eine Function der einen unabhängigen Veränderlichen t ist, oder:

$$\left.\begin{aligned}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \frac{d^2 x}{d t^2} + \mu x = 0 \\ (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \frac{d^2 y}{d t^2} + \mu y = 0\end{aligned}\right\},$$

worin x und y beides Functionen von t sind.

II. In **partielle** Differentialgleichungen, das sind solche, in denen mindestens **zwei unabhängige** Veränderliche und partielle Differentialquotienten in Bezug auf einige oder sämmtliche von diesen Veränderlichen vorkommen. Sind mehrere abhängige Veränderliche vorhanden, so muss die Anzahl der verschiedenen Gleichungen dieselbe sein wie die Anzahl der verschiedenen abhängigen Veränderlichen; jedoch kommen solche Systeme von Gleichungen verhältnissmässig selten vor.

Als Beispiele partieller Differentialgleichungen können wir anführen:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0,$$

und:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}\end{aligned}\right\}$$

Die **Ordnung** einer Differentialgleichung ist die nämliche wie die Ordnung des höchsten in ihr enthaltenen Differentialquotienten.

Der **Grad** einer Differentialgleichung ist der Exponent der Potenz, zu welcher dieser höchste Differentialquotient erhoben ist, sobald die Gleichung auf rationale Form gebracht und frei von Brüchen ist.

Die Gleichung

$$y = x \frac{d y}{d x} + \frac{a}{\frac{d y}{d x}}$$

ist von der ersten Ordnung und vom zweiten Grade; die Gleichung

$$\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}=a\frac{d^2y}{dx^2}$$

ist von der zweiten Ordnung und vom zweiten Grade.

Wenn eine Differentialgleichung so beschaffen ist, dass in ihr, nachdem sie rational gemacht und von Brüchen befreit ist, die Differentialquotienten und die abhängige Veränderliche in der ersten Potenz und überdies keine Producte dieser Grössen vorkommen, während die Coefficienten der einzelnen Glieder entweder Constanten oder Functionen der unabhängigen Veränderlichen sind, so heisst die Gleichung **linear.** Die folgenden Gleichungen sind Beispiele linearer Gleichungen:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0,$$

$$\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}=0,$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z=0.$$

Die Relation, welche zwischen den Veränderlichen selbst besteht, ohne deren Differentialquotienten zu enthalten, und die allgemeinste ist, welche es giebt, wird zuweilen die **allgemeine Lösung,** zuweilen die **Stammgleichung** der Differentialgleichung genannt.

§. 7.

Der Weg, den man einschlägt, um aus einer gegebenen Differentialgleichung die Stammgleichung zu erhalten, wird häufig der sein, dass man ein erstes Integral der Differentialgleichung ableitet, d. h. eine Gleichung, deren Ordnung um eine Einheit niedriger ist als die der ursprünglichen Gleichung, und die eine willkürliche Constante enthält, sodann ein erstes Integral dieser letzteren Gleichung, welches dann ein zweites Integral der ursprünglichen Gleichung ist, u. s. f., bis Differentialquotienten nicht mehr auftreten. Dies wird der Fall sein, wenn die Operation so oftmal wiederholt worden ist, als die Ordnung der ursprünglichen Differentialgleichung beträgt. Nun wird jede Transformation, welcher die Gleichung vor der Integration unterworfen werden kann, auf die Form des ersten Integrals von Einfluss sein, und da eine gegebene Gleichung auf mehrere verschiedene Arten transformirt werden kann, so wird es

eine entsprechende Anzahl verschiedener erster Integrale geben. Indessen werden diese nicht sämmtlich nothwendig von einander unabhängig sein; und in der That: Wenn die Gleichung von der $n$ten Ordnung ist, so kann sie nicht mehr als n von einander unabhängige erste Integrale haben. So hat z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + y = 0$$

die folgenden ersten Integrale:

$$\left(\frac{d y}{d x}\right)^2 + y^2 = A^2$$

$$\frac{d y}{d x} \cos x + y \sin x = B$$

$$-\frac{d y}{d x} \sin x + y \cos x = C$$

$$\frac{d y}{d x} = y \cot (x + \alpha);$$

diese sind indessen nicht sämmtlich von einander unabhängig, da die vier Constanten A, B, C, α durch die Gleichungen verbunden sind:

$$B = A \cos \alpha$$

$$C = A \sin \alpha.$$

Wenn man so in irgend einem Falle ein System von ersten Integralen erhalten hat, so kann es als ein simultanes System benutzt werden, aus dem sich die höchsten Differentialquotienten eliminiren lassen; und wenn man eben so viele von einander unabhängige erste Integrale der Gleichung erhalten hat, als die Ordnung der Gleichung beträgt, so kann man sämmtliche Differentialquotienten aus ihnen eliminiren, um die Stammgleichung zu erhalten. So können wir aus dem zweiten und dritten Integral in dem vorstehenden Beispiel herleiten:

$$y = B \sin x + C \cos x$$

und aus dem ersten und vierten:

$$y = A \sin (x + \alpha),$$

Resultate, deren jedes eine Stammgleichung ist; diese Lösungen fallen aber, wie man mit Rücksicht auf die zwischen den Constanten bestehenden Relationen erkennt, zusammen.

§. 8.

Wir gehen nun zum **Beweise** der in dem letzten Paragraphen aufgestellten **Behauptung** über.

> Eine Differentialgleichung von der $n$ten Ordnung hat n und nicht mehr als n von einander **unabhängige erste** Integrale.

Aus dem bisher Gesagten erhellt, dass eine Integralbeziehung zwischen y und x mit n von einander unabhängigen willkürlichen Constanten zu einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung führt. Wird die gegebene Integralgleichung $(n - 1)$ mal hinter einander differentiirt, so werden die $n - 1$ entstehenden Gleichungen sämmtliche Differentialquotienten bis zum $(n - 1)$ten einschliesslich enthalten, und man wird zusammen mit der ursprünglichen Gleichung im Ganzen n Gleichungen haben. Nun können aus n Gleichungen, in denen n Grössen vorkommen, alle diese Grössen mit Ausnahme einer einzigen eliminirt werden. Wir wollen die n willkürlichen Constanten mit C_1, C_2, ... C_n bezeichnen und aus den n Gleichungen, welche wir haben, alle willkürlichen Constanten ausser C_1 eliminiren. Die resultirende Gleichung wird die Veränderlichen und die Ableitungen von y bis zur $(n - 1)$ten einschliesslich und ferner noch die willkürliche Constante C_1 enthalten; sie wird daher ein erstes Integral der Differentialgleichung $n$ter Ordnung, welche der gegebenen Integralbeziehung entspricht, sein. Wir eliminiren ebenso alle willkürlichen Constanten mit Ausnahme von C_2; die resultirende Gleichung wird nun C_2 und wie vorher die Ableitungen von y bis zur $(n - 1)$ten einschliesslich enthalten und wird daher ein erstes Integral der Differentialgleichung sein; es wird dies jedoch unabhängig sein von dem vorigen, da C_2 unabhängig ist von C_1. Verfahren wir in dieser Weise der Reihe nach mit allen Constanten, so werden wir n von einander unabhängige erste Integrale erhalten, deren jedes sich ergiebt durch Elimination aller n unabhängigen Constanten mit Ausnahme einer einzigen.

Da nicht mehr als n unabhängige Constanten in der allgemeinen Integralgleichung vorkommen, so muss jede andere in ihr etwa auftretende Constante von C_1, C_2, ... C_n abhängen. Ist A eine solche Constante und wird die Relation zwischen ihnen dargestellt durch

$$\psi(A, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0,$$

so kann man zwischen dieser Gleichung, der ursprünglichen Integralgleichung und den $n - 1$ durch Differentiation erhaltenen Gleichungen (was im Ganzen $n + 1$ Gleichungen sind) die n Constanten C eliminiren, und das Resultat wird dann die Differentialquotienten bis zum $(n - 1)$ten einschliesslich und die Constante A enthalten. Dasselbe würde ein erstes Integral der Differentialgleichung sein, es ist jedoch nicht unabhängig von den n bereits erhaltenen; denn man denke sich aus den verschiedenen Gleichungen, in denen je nur eine einzige der Grössen C vorkommt, die bezüglichen Werthe dieser Grössen als Functionen der Veränderlichen und der Differentialquotienten von y hergeleitet und in die Gleichung $\psi = 0$ substituirt, so wird diese Gleichung die Differentialquotienten bis zum $(n - 1)$ten und die Constante A enthalten und demgemäss dieselbe sein, wie die vorher erhaltene. In der That sind beide Arten des Verfahrens bloss verschiedene Methoden zur Erreichung eines und desselben Resultats, und die zweite Art zeigt, dass das so erhaltene erste Integral aus den anderen n ersten Integralen abgeleitet werden kann. Es hat daher die Differentialgleichung der $n$ten Ordnung nicht mehr als n von einander unabhängige erste Integrale.

§. 9.

Es ist hier der Ort, um **zwei Hülfssätze** anzufügen, von denen in der Folge häufig Gebrauch gemacht werden wird.

Hülfssatz I. Es seien $u_1, u_2, \ldots u_n$ n Functionen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche letzteren von einander unabhängig sein sollen. Wenn dann durch diese Functionen eine Relation, welche dargestellt sein möge durch

$$(1) \qquad F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$

identisch erfüllt wird, so dass $u_1, u_2, \ldots u_n$ nicht unabhängig von einander sind, so wird die Gleichung

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, & \ldots\ldots, & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \ldots\ldots, & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_n}{\partial x_2}, & \ldots\ldots, & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0$$

identisch erfüllt.

Da Gleichung (1) identisch befriedigt wird, wenn man für $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ihre Werthe, ausgedrückt durch die unabhängigen Veränderlichen, substituirt, so sind die partiellen Differentialquotienten erster Ordnung von F in Bezug auf jede dieser Veränderlichen für sich gleich Null. Wir erhalten daher:

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_2} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0.$$

Werden die Verhältnisse der n partiellen Differentialquotienten von F nach jedem der u aus diesen n in Bezug auf diese Grössen linearen Gleichungen eliminirt, so ist das Resultat der Elimination:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_n}, & \ldots, & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0,$$

und dieses ist identisch erfüllt. Der Werth einer Determinante wird aber nicht geändert, wenn man die Zeilen mit den Colonnen und die Colonnen mit den Zeilen vertauscht; nimmt man diese Vertauschung vor, so geht die vorstehende Gleichung in die Gleichung (2) über, welche somit identisch erfüllt ist.

Hülfssatz II. Die Umkehrung hiervon ist ebenfalls richtig: Wenn $u_1, u_2, \ldots u_n$ n Functionen von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, und wenn die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_n}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0$$

identisch erfüllt ist, so sind die Functionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ nicht von einander unabhängig, sondern durch eine Beziehung von der Form

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$$

mit einander verbunden.

Sind die $n - 1$ Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ nicht von einander unabhängig, so ist der zu beweisende Satz ohne Weiteres richtig; wir können daher annehmen, dass sie unabhängig von einander seien.

Zwischen den n Functionen u können wir $n - 1$ der Veränderlichen eliminiren; wird dadurch die übrigbleibende Veränderliche, etwa x_n, nicht mit eliminirt, so kann das Resultat in der Form geschrieben werden:

$$u_n = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, x_n).$$

Schreibt man die Bedingungsgleichung in der Form:

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0,$$

so lässt sich das Multiplicationstheorem der Determinanten in der Form schreiben:

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, \varphi)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, x_n)} \times \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, x_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n)}.$$

Die linke Seite ist gleich Null nach Voraussetzung. Da die Functionen $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ von einander unabhängig sind, so ist der erste Factor auf der rechten Seite gleich $\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$ und der zweite gleich $\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}$. Einer von diesen muss daher verschwinden. Ist es der erste, so ist φ explicit unabhängig von x_n, so dass u_n eine Function von $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ allein ist, und es giebt daher in diesem Falle eine Relation zwischen den ursprünglichen n Functionen.

Ist der letzte Factor gleich Null, so haben wir:

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} = 0,$$

eine Gleichung, welche der gegebenen Bedingungsgleichung analog ist, in welcher aber nur $n - 1$ Functionen von $n - 1$ Veränderlichen auftreten, da für die noch vorkommenden Differentiationen x_n als Constante betrachtet werden kann. Diese Gleichung wird in derselben Weise behandelt wie vorher, und wir finden, dass ent-

weder eine Beziehung besteht zwischen $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$, betrachtet als Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, oder dass eine neue Bedingungsgleichung mit $n-2$ Functionen von $n-2$ Veränderlichen gelten muss. Existirt die Relation zwischen $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, so wird sie von der Form sein:

$$\psi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, x_n) = 0,$$

und diese wird x_n enthalten, da wir vorausgesetzt haben, dass $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ von einander unabhängig seien. Zwischen $\psi = 0$ und $u_n = \varphi$ können wir dann x_n eliminiren und erhalten so eine Relation zwischen $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Indem wir in dieser Weise weitergehen und jedesmal die Anzahl der Functionen, welche in die Bedingungsgleichung eingehen, um eine Einheit vermindern, können wir beweisen, dass eine der nothwendigen Folgerungen jeder Reduction die in unserem Satze enthaltene Behauptung ist. Und wenn die Reduction $(n-1)$ mal wiederholt worden ist, so bleibt schliesslich als einzige Folgerung nur die übrig, dass jede beliebig gewählte Function so beschaffen sein muss, dass durch sie die Gleichung $\frac{\partial u_r}{\partial x_s} = 0$ erfüllt würde für jede beliebig zu wählende Veränderliche x. Da dies augenscheinlich nicht der Fall ist, so ergiebt sich hiermit die Richtigkeit unseres Satzes.

§. 10.

Als einen besonderen Fall des allgemeinen Hülfssatzes erhalten wir den folgenden: Es seien U und V zwei Functionen von zwei unabhängigen Veränderlichen x und y; wenn dann V dargestellt werden kann als eine Function von U allein, so muss die Gleichung gelten:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

und umgekehrt, ist diese Gleichung erfüllt, so besteht für alle möglichen Werthe von x und y zwischen U und V eine Relation von der Form:

$$V = f(U).$$

1. Aufgabe. Sind die Functionen

$$x + 2y + z, \qquad x - 2y + 3z, \qquad 2xy - xz + 4yz - 2z^2$$

von einander unabhängig?

Die Bedingungsgleichung ist:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 2y - z \\ 2, & -2, & 2x + 4z \\ 1, & 3, & -x + 4y - 4z \end{vmatrix} = 0,$$

und diese ist offenbar erfüllt, da

die 3. Zeile $= 2 \times$ (1. Zeile) $- \frac{1}{2} \times$ (2. Zeile)

ist, und daher sind die Functionen von einander abhängig. Um die Relation zwischen ihnen zu finden, bezeichnen wir sie mit u_1, u_2, u_3 und haben dann:

$$2x = u_1 + u_2 - 4z$$
$$4y = u_1 - u_2 + 2z$$

und daher durch Substitution dieser Werthe

$$4u_3 = u_1^2 - u_2^2.$$

2. Aufgabe. Man beweise, dass die Functionen

$$ax^2 + by^2 + cz^2, \quad Ax + By + Cz,$$

$$a^2x^2(B^2c + C^2b) + b^2y^2(C^2a + A^2c) + c^2z^2(A^2b + B^2a) \\ - 2abc(BCyz + CAzx + ABxy)$$

nicht von einander unabhängig sind, und suche die Beziehung zwischen ihnen.

Zweites Capitel.

Differentialgleichungen erster Ordnung.

§. 11.

Die allgemeine Differentialgleichung **erster** Ordnung kann dargestellt werden durch

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

worin F in Bezug auf den Differentialquotienten eine rationale und algebraische Function ist. In dieser allgemeinen Form lässt sich die Gleichung nicht integriren; es giebt jedoch gewisse **besondere** Formen, auf deren eine oder andere sich viele Gleichungen reduciren lassen und **die eine unmittelbare Lösung zulassen.** Diese Formen können wir **Hauptformen** nennen.

§. 12.

Bevor wir dieselben im Einzelnen betrachten, wollen wir einen Satz beweisen, der nur ein besonderer Fall des allgemeinen im §. 8 angeführten Satzes ist, nämlich, dass eine Differentialgleichung, die sich darstellen lässt in der Form

$$M \frac{dy}{dx} = N,$$

wo M und N eindeutige Functionen von x und y sind, nur eine einzige unabhängige Stammgleichung haben kann.

Angenommen, man hätte, falls dies möglich wäre, zwei Stammgleichungen

$$\varphi_1(x, y) = a$$
$$\varphi_2(x, y) = b$$

erhalten, so bestimmt sich nach der ersten von diesen der Werth von $\frac{dy}{dx}$ durch

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

und daher:

$$M\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + N\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0.$$

Behandelte man die zweite Gleichung in derselben Weise, so würde man die Gleichung erhalten:

$$M\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + N\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0.$$

Die Elimination von M und N zwischen diesen zwei Gleichungen giebt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = 0,$$

und diese zeigt (§. 10), dass φ_2 eine Function von φ_1 ist. Es sind daher die beiden Stammgleichungen nicht unabhängig von einander, und die zweite kann dargestellt werden in der Form:

$$F(\varphi_1) = b,$$

welche algebraisch auflösbar ist in Gleichungen von der Form:

$$\varphi_1 = a,$$

deren jede nur eine Wiederholung der ersten der beiden Stammgleichungen ist.

Wenn man also bei der Auflösung einer solchen Differentialgleichung irgend eine Stammgleichung erhalten hat, so kann dieselbe angesehen werden als die allgemeine Lösung der Gleichung, denn aus ihr können alle anderen Stammgleichungen abgeleitet werden.

§. 13.

Hauptform I.

Die Gleichung $Mdy = Ndx$ kann stets gelöst werden, wenn die Veränderlichen **sich separiren** lassen; denn in diesem Falle kann die Gleichung umgeändert werden in die Form:

$$Ydy = Xdx,$$

worin Y eine Function von y allein und X eine Function von x allein ist.

Die Gleichung lässt sich dann integriren in der Form

$$\int Y\,d\,y = \int X\,d\,x + A,$$

wo A eine willkürliche Constante ist.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$\frac{d\,y}{d\,x} + \left(\frac{1-y^2}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Die Veränderlichen lassen sich trennen und die Gleichung wird:

$$\frac{d\,y}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{d\,x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Ein Integral derselben ist:

$$arc\ sin\ y + arc\ sin\ x = c.$$

Die Gleichung lässt sich aber auch in der Form schreiben:

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,d\,y + (1-y^2)^{\frac{1}{2}}\,d\,x = 0,$$

und diese giebt nach einer partiellen Integration:

$$y\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \int\frac{x\,y\,d\,x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} + x\,(1-y^2)^{\frac{1}{2}} + \int\frac{x\,y\,d\,y}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}} = C.$$

Nun ist aber:

$$\frac{x\,y\,d\,x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x\,y\,d\,y}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

und daher ist das Integral:

$$y\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + x\,(1-y^2)^{\frac{1}{2}} = C.$$

Dies giebt eine Erläuterung des Satzes im vorhergehenden Paragraphen, denn die letztere Stammgleichung kann aus der ersteren dadurch abgeleitet werden, dass man auf beiden Seiten den Sinus nimmt und zwischen den Constanten die Relation festsetzt:

$$C = sin\ c.$$

2. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$(x-y^2)\,d\,x + 2\,x\,y\,d\,y = 0.$$

Die Veränderlichen sind zwar nicht unmittelbar zu trennen, sie werden aber separirbar nach einer Substitution. Schreibt man $y^2 = v$, so wird die Gleichung:

$$x\,d\,x + x\,d\,v - v\,d\,x = 0,$$

oder:

$$\frac{dx}{x} + d\left(\frac{v}{x}\right) = 0,$$

somit:

$$\log x + \frac{v}{x} = const,$$

oder:

$$x\, e^{\frac{y^2}{x}} = A.$$

3. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $$x(1+y^2)^{\frac{1}{2}} + y\,(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} = 0.$$

(2) $$(y - x)(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} = n\,(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

(3) $$(x + y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2.$$

(4) $$(1 + y^2)\,dx - \{y + (1 + y)^{\frac{1}{2}}\}\,(1 + x)^{\frac{3}{2}}\,dy = 0.$$

(5) $$\sec^2 x \tang y\, dx + \sec^2 y \tang x\, dy = 0.$$

§. 14.

Hauptform II. Die lineare Form.

Wenn die Gleichung erster Ordnung linear ist, so kann sie in der Form geschrieben werden:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q,$$

worin P und Q Functionen von x und explicit unabhängig von y sind. Multiplicirt man jede Seite mit

$$e^{\int P dx},$$

so geht die Gleichung wegen

$$P\, e^{\int P dx} = \frac{d}{dx}\left\{e^{\int P dx}\right\}$$

über in:

$$\frac{dy}{dx} e^{\int P dx} + y \frac{d}{dx} e^{\int P dx} = Q\, e^{\int P dx}.$$

Durch Integration (die linke Seite ist nunmehr ein vollkommener Differentialquotient) erhalten wir als die Stammgleichung:

$$y e^{\int P dx} = C + \int Q\, e^{\int P dx}\, dx,$$

d. i.
$$y = C e^{-\int P dx} + e^{-\int P dx} \int Q e^{\int P dx} dx.$$

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:
$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1+x^2} y = \frac{1}{x(1+x^2)}.$$

Wie im allgemeinen Falle ist:
$$y e^{\int \frac{x dx}{1+x^2}} = C + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} e^{\int \frac{x dx}{1+x^2}},$$

somit:
$$y(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = C + \int \frac{dx}{x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= C + log \frac{x}{1+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $x(1-x^2)\frac{dy}{dx} + (2x^2-1)y = a x^3.$

(2) $\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$

(3) $y\frac{dy}{dx} + c y^2 = a \cos(x+\beta).$

(4) $\frac{dy}{dx} + y\frac{d\varphi}{dx} = \varphi(x)\frac{d\varphi}{dx}.$

3. Aufgabe. Man zeige, dass die Lösung der allgemeinen Gleichung dargestellt werden kann in der Form:
$$y = \frac{Q}{P} - e^{-\int P dx}\left(C + \int e^{\int P dx} d\frac{Q}{P}\right).$$

§. 15.

Eine wichtige hiermit zusammenhängende Form, welche nach derselben Methode gelöst werden kann, ist:
$$\frac{dy}{dx} + Py = Q y^n,$$

worin P und Q Functionen von x allein sind.

Dividirt man die Gleichung durch y^n, so wird dieselbe:
$$-\frac{1}{n-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y^{n-1}}\right) + P\frac{1}{y^{n-1}} = Q,$$

oder:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y^{n-1}}\right) - (n-1)\,P\,\frac{1}{y^{n-1}} = -\,Q\,(n-1),$$

welches die vorige Hauptform ist. Die allgemeine Lösung ist:

$$\frac{1}{y^{n-1}}\,e^{-(n-1)\int P\,dx} = C - (n-1)\int Q\,e^{-(n-1)\int P\,dx}\,dx.$$

4. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \log x.$$

Dieselbe geht nach einer zu der obigen analogen Transformation über in:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{x} = -\,\frac{1}{x}\log x,$$

deren Stammgleichung ist:

$$\frac{1}{y}\,e^{-\int\frac{dx}{x}} = C - \int\frac{dx\,.\log x}{x}\,e^{-\int\frac{dx}{x}},$$

oder:

$$\frac{1}{xy} = C - \int\frac{dx\,.\log x}{x^2}$$

$$= C + \frac{\log x}{x} + \frac{1}{x},$$

mithin:

$$\frac{1}{y} = 1 + Cx + \log x.$$

5. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $$\frac{dz}{dx} + 2xz = 2ax^3z^3.$$

(2) $$(1 - x^2)\frac{dz}{dx} - xz = axz^2.$$

(3) $$\frac{dy}{dx} + xy = y^2 \sin x.$$

(4) $$\frac{dy}{dx}(x^2y^3 + xy) = 1.$$

6. Aufgabe. Man zeige, dass die vier Gleichungen im §. 7 zu derselben Stammgleichung führen.

§. 16.

Hauptform III. Homogene Gleichungen.

Ist die Gleichung vom ersten Grade und dargestellt in der Form:

$$M \frac{dy}{dx} = N,$$

so heisst sie homogen, wenn M und N homogene Functionen von x und y von einerlei Grade sind. In diesem Falle können wir setzen:

$$M = x^r \varphi \left(\frac{y}{x}\right)$$

$$N = x^r \psi \left(\frac{y}{x}\right),$$

wo r der Grad von M und N ist. Substituiren wir nun:

$$y = vx,$$

so dass v als neue abhängige Veränderliche betrachtet werden kann, so geht die Gleichung über in:

$$\left(v + x \frac{dv}{dx}\right) \varphi(v) = \psi(v),$$

oder:

$$\frac{dx}{x} + \frac{\varphi(v)\, dv}{v\,\varphi(v) - \psi(v)} = 0,$$

in welcher die Veränderlichen separirt sind. Das Integral dieser ist:

$$\log x + \int \frac{\varphi(v)\, dv}{v\,\varphi(v) - \psi(v)} = A.$$

Die Stammgleichung erhält man, wenn man nach Ausführung der Integration $\frac{y}{x}$ für v substituirt.

Ist die Gleichung jedoch nicht vom ersten Grade, aber immer noch homogen in x und y, so kann sie in der Form geschrieben werden:

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Es giebt nun zwei Wege, auf denen man weitergehen kann; der erste besteht darin, dass man die Gleichung nach $\frac{dy}{dx}$ auflöst; eine der Auflösungen möge dargestellt werden durch

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Dies ist der bereits discutirte Fall.

Der zweite Weg besteht darin, dass man die Gleichung nach $\frac{y}{x}$ auflöst; alsdann erhält man:

$$\frac{y}{x} = f_1\left(\frac{dy}{dx}\right) = f_1(p),$$

oder:

$$y = xf_1(p),$$

worin p für $\frac{dy}{dx}$ geschrieben ist. Durch Differentiation nach x folgt aus dieser:

$$p = f_1(p) + xf_1'(p)\frac{dp}{dx},$$

und daher:

$$\frac{dx}{x} = \frac{f_1'(p)\,dp}{p - f_1(p)}.$$

Diese Gleichung giebt durch Integration:

$$\begin{aligned} log\, x &= C + \int \frac{f_1'(p)\,dp}{p - f_1(p)} \\ &= C + \psi(p). \end{aligned}$$

Eliminirt man p aus dieser Gleichung und aus

$$y = xf_1(p),$$

so ergiebt sich die Stammgleichung. Jedoch ist es nicht immer zweckmässig, p zu eliminiren, vielmehr kann dasselbe beibehalten werden als der Parameter eines Punktes auf der entsprechenden Curve, in welchem Falle der Gebrauch desselben analog ist der Anwendung des excentrischen Winkels bei einem Punkte der Ellipse.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$x + y\frac{dy}{dx} = 2y.$$

Setzen wir $y = vx$, so geht die Gleichung über in:

$$\frac{v\,dv}{(1 - v)^2} + \frac{dx}{x} = 0,$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{1 - v} + log\,(1 - v) + log\, x = A,$$

oder:

$$(x - y)\, e^{\frac{x}{x-y}} = e^A = C.$$

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$(1) \qquad x + y \frac{dy}{dx} = my.$$

$$(2) \qquad y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}.$$

3. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$(ax + by + c) \frac{dy}{dx} = Ax + By + C.$$

Setzt man $x = h + \xi$, $y = k + \eta$ und wählt man h und k so, dass

$$ah + bk + c = 0$$
$$Ah + Bk + C = 0$$

ist, so geht die Gleichung über in:

$$(a\xi + b\eta) \frac{d\eta}{d\xi} = A\xi + B\eta,$$

welche homogen ist.

Ist jedoch $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$, während $\frac{C}{c}$ von diesen beiden Brüchen verschieden ist, so können die Gleichungen, welche h und k bestimmen, nicht zusammen bestehen. Wird jeder der beiden gleichen Brüche gleich m gesetzt, so ist:

$$(ax + by + c) \frac{dy}{dx} = m(ax + by) + C.$$

Setzt man:

$$ax + by = v,$$

so wird:

$$a + b \frac{mv + C}{v + c} = \frac{dv}{dx},$$

und hiermit sind die Veränderlichen getrennt.

Ist $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = n$, so ist die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = n,$$

daher:

$$y = nx + E.$$

4. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$(1) \qquad 3y - 7x + 7 = (3x - 7y - 3)\frac{dy}{dx}.$$

$$(2) \qquad (2x + 4y + 3)\frac{dy}{dx} = 2y + x + 1.$$

$$(3) \qquad (3x + 5y + 6)\frac{dy}{dx} = 7y + x + 2.$$

5. Aufgabe. Man zeige, dass die Gleichung:

$$(P + Qx)\frac{dy}{dx} = R + Qy,$$

in welcher P, Q, R homogene Functionen von x und y und zwar P und R von dem nämlichen Grade sind, durch die Substitution $y = vx$ gelöst werden kann.

6. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$(Ax^2 + Bxy + \alpha x + \beta y + \gamma)\frac{dy}{dx} = Axy + By^2 + \alpha' x + \beta' y + \gamma'.$$

§. 17.

Wenn man die Curven, deren Gleichungen die vollständigen Stammgleichungen homogener Differentialgleichungen sind, sich gezeichnet denkt, so bilden dieselben ein System ähnlicher Curven. Denn zieht man durch den Coordinatenanfangspunkt einen Radiusvector, welcher alle diese Curven schneidet und mit der x-Achse einen Winkel ϑ bildet, so wird die Neigung der Tangente an eine der Curven in dem Punkte, in welchem dieser Radiusvector sie schneidet, gegen die x-Achse bestimmt durch:

$$tang\ \varphi = \frac{dy}{dx} = f_1\left(\frac{y}{x}\right) = f_1\ (tang\ \vartheta),$$

und daher sind alle Tangenten in den Punkten, welche auf jenem Radiusvector liegen, parallel. Es sind somit die Curven sämmtlich einander ähnlich und ähnlich gelegen.

§. 18.

Hauptform IV.

Es treten zuweilen auch Differentialgleichungen auf, in denen **eine** der beiden Veränderlichen **nicht explicit** vorkommt.

Wir betrachten zunächst diejenige Classe, in der die unabhängige Veränderliche fehlt. Die Gleichung wird dann von der Form sein:

$$\varphi\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Wie bei der allgemeinen Gleichung unter Hauptform III kann man auf zweierlei Art weitergehen. Falls sich dies machen lässt, können wir die Gleichung nach $\frac{dy}{dx}$ auflösen, so dass wir

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

erhalten, worin die Veränderlichen getrennt werden können. Die Stammgleichung wird:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = x + A.$$

Oder wir können, wenn es geht, die Gleichung nach y auflösen; ist dann eine Lösung dargestellt durch

$$y = f_1\left(\frac{dy}{dx}\right) = f_1(p),$$

so erhalten wir durch Differentiation nach x:

$$p = f_1'(p)\frac{dp}{dx},$$

in welcher Gleichung sich die Veränderlichen trennen lassen. Das Integral ist:

$$x = \int \frac{f_1'(p)}{p} dp + A;$$

wird daraus und aus der Gleichung

$$y = f_1(p)$$

die Grösse p eliminirt, so ergiebt sich die Stammgleichung. Indessen kann es zweckmässiger sein, p nicht zu eliminiren.

Wir wollen nun diejenige Classe von Gleichungen betrachten, in denen die abhängige Veränderliche nicht explicit vorkommt. Die Gleichung wird dann von der Form sein:

$$\varphi_1\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Wegen

$$\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy} = 1$$

kann diese Gleichung geschrieben werden:

$$\varphi_1\left(x, \frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right) = 0,$$

oder:

$$\Phi\left(x, \frac{dx}{dy}\right) = 0,$$

eine Gleichung, die zur ersten Classe gehört und durch die bei dieser angewendeten Methoden gelöst werden kann. Diese Methoden lassen sich jedoch auch auf die Gleichung anwenden, ohne sie erst dieser Transformation zu unterwerfen. Löst man die Gleichung, wenn es geht, nach $\frac{dy}{dx}$ auf, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = F(x),$$

und es ist somit die Stammgleichung:

$$y = \int F(x)\, dx + A.$$

Oder löst man sie, falls dies geht, nach x auf, so erhält man:

$$x = F_1\left(\frac{dy}{dx}\right) = F_1(p).$$

Differentiirt man diese Gleichung nach y (der fehlenden Veränderlichen), so folgt:

$$\frac{1}{p} = F'_1(p)\frac{dp}{dy},$$

und das Integral hiervon ist:

$$y = \int p\, F'_1(p)\, dp + C.$$

Wird dasselbe mit

$$x = F_1(p)$$

verbunden, so ergiebt sich die Stammgleichung.

Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $$y = a\frac{dy}{dx} + b\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

(2) $$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(x+a)^2}{x^2 + 2ax}.$$

§. 19.

Hauptform V.

Wenn die Gleichung erster Ordnung vom $n$ten Grade ist, so denke man sich dieselbe nach Potenzen des Differentialquotienten geordnet, so dass sie in der Form geschrieben werden kann:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + P_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + P_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \cdots + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_n = 0,$$

in welcher $P_1, P_2, \ldots P_n$ Functionen von x und y bezeichnen. Betrachten wir diese als eine algebraische Gleichung für $\frac{dy}{dx}$, welche n Wurzeln $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (welches Functionen von x und y sind) besitzt, so geht die Gleichung über in:

$$\left(\frac{dy}{dx} - p_1\right)\left(\frac{dy}{dx} - p_2\right) \cdots\cdots \left(\frac{dy}{dx} - p_n\right) = 0.$$

Diese kann nur dann bestehen, wenn einer oder mehrere der Factoren auf der linken Seite verschwinden, und daher wird jede Beziehung zwischen x und y, welche einen Factor zum Verschwinden bringt, eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung sein, während eine Beziehung, für welche kein Factor verschwindet, auch keine Lösung sein kann. Nimmt man an, dass die Stammgleichungen der Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} - p_1 = 0, \quad \frac{dy}{dx} - p_2 = 0, \ldots, \quad \frac{dy}{dx} - p_n = 0$$

(erhalten durch eine oder die andere der früher angegebenen Methoden) bezüglich seien:

$$\varphi_1(x, y, C_1) = 0, \quad \varphi_2(x, y, C_2) = 0, \ldots, \varphi_n(x, y, C_n) = 0,$$

so werden alle möglichen Lösungen der gegebenen Differentialgleichung enthalten sein in:

$$\varphi_1(x, y, C_1)\,\varphi_2(x, y, C_2) \ldots\ldots \varphi_n(x, y, C_n) = 0.$$

Die Allgemeinheit dieses Integrals wird indessen stets gewahrt bleiben, wenn alle Constanten $C_1, C_2, \ldots, C_n$ einander gleich gesetzt werden, etwa gleich C; denn um einen Werth von y zu finden, müssen wir irgend einen Factor der linken Seite der neuen Form gleich Null setzen, was eine Gleichung geben würde von der Form:

$$\varphi_r(x, y, C) = 0.$$

Nun ist C eine willkürliche Constante; werden derselben alle möglichen numerischen Werthe beigelegt, so müssen in der Reihe

der sich so ergebenden Gleichungen alle Integrale enthalten sein, welche in analoger Weise aus dem entsprechenden Factor des ersten Products abgeleitet werden können. Daher erhalten wir als die allgemeine vollständige Stammgleichung der ursprünglichen Differentialgleichung:

$$\varphi_1(x, y, C)\,\varphi_2(x, y, C)\,\ldots\ldots\,\varphi_n(x, y, C) = 0.$$

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$x^2p^2 - 2xyp + y^2 = x^2y^2 + x^4.$$

Hierbei ist:

$$xp - y = \pm x(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}},$$

und diese Gleichung geht durch die Substitution $y = xz$ über in die folgende:

$$\frac{dz}{(1 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \pm dx.$$

Nimmt man das positive Vorzeichen, so ist die Lösung:

$$z = \tfrac{1}{2}\left[e^{x+c} - e^{-(x+c)}\right] = \sinh(x + c).$$

Das negative Vorzeichen giebt:

$$z = \sinh(c - x),$$

daher ist die allgemeine Lösung:

$$[y - x\sinh(x + c)]\,[y - x\sinh(c - x)] = 0.$$

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$(1)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{a}{x} = 0.$$

$$(2)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = 1.$$

3. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $$x^2p^2 + 3xyp + 2y^2 = 0.$$

(2) $$x^2p^2 + 3xyp + 3y^2 = 0.$$

(3) $$p(p + y) = x(x + y).$$

(4) $$p^3 - (x^2 + xy + y^2)p^2 + (x^3y + x^2y^2 + xy^3)p - x^3y^3 = 0.$$

(5) $$(a^2 - x^2)p^3 + bx(a^2 - x^2)p^2 - p - bx = 0.$$

(6) $$\left(1 - y^2 - \frac{y^4}{x^2}\right)p^2 - 2\frac{y}{x}p + \frac{y^2}{x^2} = 0.$$

(7) $$p^2 + \left(x + y - 2\frac{y}{x}\right)p + xy + \frac{y^2}{x^2} - y - \frac{y^2}{x} = 0.$$

4. Aufgabe. Man zeige, dass, wenn die allgemeine Gleichung homogen ist in x und y, sie gelöst werden kann durch die Substitutionen:

$$y = t\,x, \quad x\,\frac{d\,t}{d\,x} = z.$$

Hiernach löse man die Gleichung:

$$p^3 - \frac{1}{2}\,p^2 + \frac{x}{y}\,p - \frac{x}{2\,y} = 0.$$

§. 20.

Hauptform VI. Die Clairaut'sche Form.

Die Differentialgleichung, welcher diese Bezeichnung gewöhnlich gegeben wird, lautet:

$$y = p\,x + f(p),$$

wobei p für $\frac{d\,y}{d\,x}$ gesetzt ist.

Differentiirt man die Gleichung nach x, so wird:

$$p = p + [x + f'(p)]\,\frac{dp}{dx},$$

so dass entweder

$$\frac{d\,p}{d\,x} = 0$$

oder

$$x + f'(p) = 0$$

ist. Nimmt man das erstere hiervon an, so erhält man:

$$p = const = c,$$

und daher lautet die Stammgleichung:

$$y = c\,x + f(c).$$

Die zweite Gleichung drückt x als eine Function von p aus; wird daher p aus dieser Gleichung und aus der Gleichung

$$y = p\,x + f(p)$$

eliminirt, so erhält man eine Beziehung zwischen x und y.

Von diesen beiden Resultaten ist das erste augenscheinlich eine Lösung der Differentialgleichung und kann aus ihm sogleich diese Differentialgleichung hergeleitet werden; denn durch Differentiation ergiebt sich:

$$p = c,$$

und, wenn man c eliminirt, so folgt:

$$y = p\,x + f(p).$$

Wenn wir nun zu der anderen Relation zwischen x und y zurückkehren, welche durch Elimination von p zwischen den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y &= px + f(p) \\ 0 &= x + f'(p) \end{aligned}\right\}\text{*)}$$

erhalten wird, so ist sofort ersichtlich, dass sie keine willkürliche Constante enthält und daher keine allgemeine Lösung ist. Indessen kann sie immerhin eine Lösung der Differentialgleichung sein; denn differentiirt man die erste Gleichung, so erhält man vermöge der zweiten Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = p + [x + f'(p)]\frac{dp}{dx} = p,$$

wofern nicht etwa $\frac{dp}{dx}$ unendlich ist. Eliminirt man sodann p aus den Gleichungen:

$$y = px + f(p)$$
$$\frac{dy}{dx} = p,$$

so erhält man:

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

und dieses ist die ursprüngliche Differentialgleichung.

§. 21.

Die Beziehung zwischen den beiden Lösungen, im Falle beide existiren, kann leicht durch geometrische Betrachtungen klar gemacht werden. Die erste Lösung

$$y = cx + f(c)$$

stellt eine Schaar von geraden Linien dar; haben dieselben eine Enveloppe, so wird diese gefunden durch Differentiation der Gleichung nach c (in der That ist dies gleichbedeutend damit, dass c für dieselben Werthe von x und y ein Paar gleicher Werthe erhält), und daraus folgt:

$$0 = x + f'(c).$$

---

*) Es kann bemerkt werden, dass zum Zwecke der Elimination p nur eine Grösse ist, die vermuthlich abhängt von x und y; sie braucht nicht nothwendig mehr $\frac{dy}{dx}$ zu sein. Anm. d. Verf.

Das Resultat der Elimination von c aus diesen beiden Gleichungen wird dasselbe sein wie das, welches man durch Elimination von p aus den beiden Gleichungen

$$y = px + f(p)$$
$$0 = x + f'(p)$$

erhält, und daher ist die durch das letzte Resultat dargestellte Curve die Enveloppe der Schaar von geraden Linien, welche durch die erste Lösung dargestellt werden, vorausgesetzt, dass diese Linien überhaupt eine Enveloppe haben.

Eine solche Lösung der Differentialgleichung, welche **nicht in der Stammgleichung enthalten** ist (die aber in der vorher angegebenen Weise aus ihr abgeleitet werden kann), wird eine **„singuläre Lösung"** genannt.

Wir werden in Kurzem auf eine eingehendere Discussion der singulären Lösungen zurückkommen.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$y = xp + \frac{a}{p}.$$

Die erste Lösung ist:

$$y = cx + \frac{a}{c}.$$

Die zweite bestimmt sich durch Elimination von p zwischen

$$0 = x - \frac{a}{p^2}$$

und der ursprünglichen Differentialgleichung. Eliminirt man p, so ergiebt sich:

$$y^2 = 4ax.$$

Die letztere ist die singuläre Lösung; die durch dieselbe dargestellte Curve wird von allen den Linien berührt, welche in der Stammgleichung enthalten sind.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $y = px + (1 + p^2)^{\frac{1}{2}}$.

(2) $y = px + p - p^2$.

(3) $ayp^2 + (2x - b)p = y$.

(4) $x^2(y - xp) = yp^2$.

(5) $y = 2xp + y^2p^3$.

§. 22.

Es giebt noch eine allgemeinere Form der Differentialgleichung, welche in ähnlicher Weise behandelt werden kann, nämlich:

$$y = xf(p) + \varphi(p).$$

Um diese zu lösen, differentiire man die Gleichung nach x; dann ist:

$$p = f(p) + [xf'(p) + \varphi'(p)]\frac{dp}{dx},$$

oder:

$$\frac{dx}{dp} + x\frac{f'(p)}{f(p) - p} = \frac{\varphi'(p)}{p - f(p)}.$$

Diese Gleichung ist linear in x und gehört zur Hauptform II. Ist das Integral derselben:

$$F(x, p, c) = 0,$$

so wird das Resultat der Elimination von p zwischen dieser und der ursprünglichen Differentialgleichung die Stammgleichung sein.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$x + yp = ap^2,$$

oder:

$$y = ap - \frac{x}{p}.$$

Durch Differentiation nach x folgt:

$$p = a\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p} + \frac{x}{p^2}\frac{dx}{dx},$$

und somit:

$$\frac{dx}{dp} - \frac{x}{p(1 + p^2)} = \frac{ap}{1 + p^2}.$$

Das Integral hiervon ist:

$$\frac{x(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}}{p} = C + a\log\{p + (1 + p^2)^{\frac{1}{2}}\},$$

und dieses stellt zusammen mit der gegebenen Gleichung die Stammgleichung dar.

Die Gleichung hätte auch durch Differentiation nach y gelöst werden können.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $x = yp + ap^2.$

(2) $y = xp + ax(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}.$

(3) $y = xmp + n(1 + p^3)^{\frac{1}{3}}.$

(4) $y = yp^2 + 2px.$

(5) $y(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} = n(x + yp).$

Singuläre Lösungen.

§. 23.

Aus der Untersuchung in §. 21 geht hervor, dass man zuweilen eine Lösung einer Differentialgleichung finden kann, welche nicht in der Stammgleichung enthalten ist; eine derartige Lösung enthält in ihrem Ausdrucke keine willkürliche Constante. Die einschränkende Bedingung, dass sie **nicht in der Stammgleichung** enthalten sein soll, ist die wichtigste; denn man hätte in der letzteren der willkürlichen Constanten einen speciellen Werth, etwa den Werth Null, beilegen können, wodurch sich auch eine Lösung ohne eine willkürliche Constante ergeben haben würde; dieselbe würde aber nicht von der angegebenen Beschaffenheit sein.

Wir gehen nun über zur Darlegung der Theorie dieser singulären Lösungen der allgemeinen Differentialgleichung erster Ordnung, die sich schreiben lässt in der Form:

$$\varphi(x, y, p) = 0.$$

Ist die Differentialgleichung entweder **linear** oder in ein System von rationalen linearen Gleichungen zerlegbar (wie bei der Hauptform V), so hat sie **keine** singuläre Lösung; jede Lösung derselben, die anscheinend von dieser Beschaffenheit ist, ist nur ein particuläres Integral, welches aus der Stammgleichung dadurch abgeleitet ist, dass man der darin enthaltenen willkürlichen Constanten einen speciellen Werth beilegt. Für den vorliegenden Zweck kann daher die Gleichung in p als unzerlegbar betrachtet werden; wäre sie in Factoren zerlegbar, die nicht linear sind und sich nicht in lineare Factoren auflösen lassen, so würden wir der Reihe nach jeden dieser unzerlegbaren Factoren betrachten.

Wir können daher $\varphi = 0$ als eine rationale und irreductible Gleichung $n$ten Grades betrachten. Wir werden jedoch ferner noch annehmen, dass φ eine eindeutige Function ist, und dass sie keinen

von p unabhängigen Factor enthält; würde ein solcher Factor beibehalten und gleich Null gesetzt, so würde er zwar die Gleichung befriedigen, aber nicht den Differentialquotienten enthalten. Treten in irgend einem Falle solche Factoren auf, so nehmen wir an, dass sie zunächst weggeschafft werden.

§. 24.

Aus den in der Einleitung angeführten Betrachtungen folgt, dass, wenn x und y die Coördinaten eines Punktes in der Ebene sind, die Differentialgleichung eine Schaar von Curven in dieser Ebene bestimmt, welche von einem einzigen unabhängigen veränderlichen Parameter abhängen; und da die Differentialgleichung in jedem Punkte eine durch diesen Punkt gehende Linie ihrer Richtung nach bestimmt, so wird es n durch die für den betreffenden Punkt geltenden Werthe von p bestimmte Richtungen und daher n Curven geben, welche durch jeden Punkt in der Ebene hindurch gehen.

Um dieses System algebraïsch darzustellen, brauchen wir eine rationale algebraische Gleichung von der Form:

$$f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_m) = 0,$$

in welcher die Constanten ebenfalls rational und algebraisch sind. Da aber nur ein einziger unabhängiger Parameter erforderlich ist, so werden zwischen diesen m Constanten $m - 1$ algebraische Relationen bestehen. Ferner wird diese Function f eindeutig sein, und jeder Factor, welcher x und y (oder eine von beiden), aber keine von den Constanten enthält, wird aus ihr aus dem nämlichen Grunde wegzuschaffen sein, welcher uns zur Beseitigung analoger Factoren aus der Differentialgleichung veranlasste. Da die Differentialgleichung nicht in einfachere Gleichungen von niedrigerem Grade auflösbar ist, so ist die algebraische Gleichung ebenfalls nicht zerlegbar; denn wäre sie es, so würde zu jeder algebraischen Gleichung von niedrigerem Grade eine entsprechende Differentialgleichung von niedrigerem Grade gehören — ein Resultat, das nach der Voraussetzung ausgeschlossen ist. Und der Grund, weshalb wir m Constanten, die durch $m - 1$ Relationen verbunden sind, in die Function aufgenommen haben an Stelle einer einzigen Constanten, ist folgender: Die Gleichung im letzteren Falle würde dieselbe sein, wie diejenige, welche man im ersten erhalten würde, wenn man sämmtliche Constanten mit Ausnahme einer einzigen eliminirte, und

da diese Elimination gewöhnlich Operationen (z. B. Erhebungen zum Quadrat u. s. w.) nöthig macht, welche andere als die gewünschten Gleichungen einführen, so wird die Folge davon sein, dass die Endgleichung mehr ausdrückt, als die eine gesuchte Gleichung. Man nehme z. B. an, dass man auf irgend einem Wege ein Integral erhalten habe in der Form:

$$\{x^2 + y^2 - a(x \cos \alpha + y \sin \alpha)\}^2 = a^2(x^2 + y^2),$$

oder, indem man zu algebraischen Constanten übergeht:

$$\{x^2 + y^2 - a(lx + my)\}^2 = a^2(x^2 + y^2),$$

wobei dann die Constanten der Bedingung unterliegen:

$$l^2 + m^2 = 1.$$

Alsdann wird die entsprechende Gleichung, welche nur eine von diesen Constanten, z. B. m, allein enthält, nicht nur jene Gleichung, sondern auch die folgende

$$\{x^2 + y^2 - a(-lx + my)\}^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

darstellen, mit derselben einschränkenden Bedingung, und daher würde sie nicht bloss der ersten von diesen äquivalent sein.

Wir haben ferner durch jeden Punkt in der Ebene n Curven; daher muss die Gleichung $f = 0$ zusammen mit den $m - 1$ Relationen zwischen den Constanten für jeden Punkt n Werthsysteme für diese Constanten liefern. Wird die Gesammtheit der Constanten mit C bezeichnet, so wird C in jedem Punkte der Ebene n Werthe haben.

§. 25.

Wir wollen nun die **Bildung der Differentialgleichung aus der Stammgleichung**

$$f(x, y, C) = 0$$

betrachten. Dieselbe wird erhalten, wenn man die Constanten aus den $m - 1$ Relationen, aus dieser Gleichung und aus der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

eliminirt.

Man nehme aber an, dass die Grössen C durch Functionen von x ersetzt würden; dann wird die Ableitung der Differentialgleichung in derselben Weise geschehen, wie vorher, nur dass für die letzte Gleichung zu setzen ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial C}\frac{dC}{dx} = 0.$$

Das Resultat wird genau dasselbe sein wie zuvor, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial C}\frac{dC}{dx} = 0$$

ist.

Soll diese Gleichung befriedigt werden, so muss entweder $\frac{dC}{dx} = 0$ sein, wodurch C constant bleibt, oder es muss C bestimmt werden durch

$$\frac{\partial f}{\partial C} = 0.$$

Wird der so bestimmte Werth von C in die Function f substituirt, so können wir somit im Allgemeinen, um eine Lösung derselben Differentialgleichung zu erhalten, die Discriminante von f nach C gleich Null setzen, was wir in der Form schreiben:

$$Disct_C\, f(x, y, C) = 0.$$

§. 26.

Der hierdurch dargestellte geometrische Ort ist der Ort aller Punkte der Ebene, in denen die Parameterconstanten C zwei oder mehr **gleiche** Werthe haben. Derselbe wird demnach in sich schliessen:

1. Den **Ort aller Knotenpunkte** (Doppelpunkte, dreifache Punkte u. s. w.) des Systems von Curven; denn in jedem solchen Punkte giebt es je nach der Anzahl von Curvenzweigen, die durch ihn hindurch gehen, zwei oder mehr einander gleiche Werthe von C, da die Zweige zu einer und derselben Curve gehören.

2. Den **Ort aller Spitzen** des Systems aus ähnlichen Gründen.

3. Die **Enveloppe** des Systems von Curven, die entweder eine einzige Curve oder aus mehreren Curven zusammengesetzt sein kann. Denn jeder Punkt der Enveloppe kann als zu zwei verschiedenen aber auf einander folgenden Curven des Systems gehörig betrachtet werden, da die Constanten dieser auf einander folgenden Curven schliesslich gleich werden. (In dem Falle, wo die Enveloppe aus mehreren Curven zusammengesetzt ist, kann es vorkommen, dass eine von diesen nur eine specielle Curve des Systems $f(x, y, C) = 0$

ist; dann ist aber ihre Gleichung auszuschliessen, da sie ein particuläres Integral darstellt.)

Diese drei geometrischen Oerter wollen wir bezüglich nennen den Ort der Knotenpunkte, den Ort der Spitzen und die Enveloppe.

§. 27.

Wenn wir nun die Differentialgleichung

$$\varphi\,(x,\,y,\,p) = 0$$

zusammen mit dem System von Curven betrachten, deren Gleichung ihr allgemeines Integral bildet, so ist klar, dass die Enveloppe des Systems eine Lösung der Differentialgleichung ist; denn in jedem Punkte der Enveloppe (welches ein Punkt auf zwei auf einander folgenden Curven ist) ist die Richtung der Tangente dieselbe, wie die Richtung der Tangente jeder dieser beiden Curven in dem betreffenden Punkte, und da die Differentialgleichung durch die Grössen, welche zu einem Element einer Curve des Systems gehören, befriedigt wird, so muss sie auch durch diese (unveränderten) Grössen, welche zu dem Element der Enveloppe gehören, befriedigt werden.

Der Ort der Knotenpunkte ist jedoch keine Lösung der Differentialgleichung; wäre dies der Fall, so würde die Differentialgleichung befriedigt werden durch die Werthe von x und y in irgend einem Knotenpunkte und den entsprechenden Werth von p in demselben Punkte des Ortes der Knotenpunkte. Erinnern wir uns, dass der Ort der Knotenpunkte durch eine Reihe von Punkten auf unserem Curvensystem gebildet wird, so sind bekanntlich diejenigen Werthe von p in jedem solchen Punkte, welche die Differentialgleichung befriedigen, gerade die, welche durch die durch diesen Punkt gehende Curve des Systems bestimmt werden. Da aber die Tangente des Ortes der Knotenpunkte in einem solchen Punkte im Allgemeinen nicht zugleich Tangente an einem der Zweige der Curve des Systems in diesem Punkte ist, so folgt, dass der Werth von p für den Ort der Knotenpunkte verschieden ist von denjenigen Werthen von p für die Curve des Systems, welche zusammen mit den Coordinaten des betreffenden Punktes die Differentialgleichung befriedigen. Und nur durch Zufall könnte es geschehen, dass der Werth von p für den Ort der Knotenpunkte übereinstimmt mit einem der anderen Werthe von p, welche nicht zu der Curve, auf welcher der Knotenpunkt liegt, gehören, sondern durch andere durch diesen Punkt gehende Curven des Systems

geliefert werden. Es wird daher der Werth von p für den Ort der Knotenpunkte zusammen mit den Coordinaten dieses Punktes die Differentialgleichung nicht befriedigen, und somit wird der Ort der Knotenpunkte keine Lösung der Differentialgleichung sein.

Genau analoge Betrachtungen, angewendet auf den Ort der Spitzen, führen zu einem ähnlichen Schlusse: — der Ort der Spitzen ist keine Lösung der Differentialgleichung.

§. 28.

Die Gleichung der Enveloppe des Systems kann nun aus der Differentialgleichung **allein**, d. h. ohne dass man die Stammgleichung kennt, abgeleitet werden. In jedem Punkte der Enveloppe fallen mindestens zwei der Zweige der verschiedenen Curven ihrer Richtung nach zusammen; wir werden daher in jedem solchen Punkte gleiche Werthe von p haben, die zu verschiedenen aber auf einander folgenden Curven gehören.

Wenn wir nun die Bedingung, dass zwei Werthe von p gleich sein sollen, mittelst der Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0$$

ausdrücken und p zwischen dieser und der ursprünglichen Gleichung eliminiren (d. i. die Discriminante von φ gleich Null setzen), so wird der durch die Gleichung

$$Disct_p \, \varphi \, (x, y, p) = 0$$

dargestellte Ort der Ort solcher Punkte sein, in denen zwei Werthe von p einander gleich sind, und dieser wird offenbar die Enveloppe mit enthalten.

Aber ausser der Enveloppe wird diese Gleichung auch den geometrischen Ort aller Punkte geben:

1) in denen zwei Zweige derselben Curve einander berühren, d. h. sie wird alle Spitzen bestimmen; sie giebt daher wie vorher den Ort der Spitzen;

2) in denen zwei verschiedene aber nicht auf einander folgende Curven sich berühren; dieser Ort wird der **Ort der Berührungspunkte** genannt. Wenn z. B. zwei Schaaren von concentrischen Kreisen, eine um je einen von zwei Punkten, gegeben sind, so wird die gerade Linie, welche die Mittelpunkte verbindet (und nach beiden Seiten verlängert ist), der Ort der Berührungspunkte von je zwei Kreisen sein, von denen jeder zu einem anderen Systeme gehört.

Wie zuvor ist der Ort der Spitzen, da er keine Lösung ist, beiseite zu lassen; und genau analoge Gründe wie diejenigen, welche uns zur Verwerfung des Ortes der Knotenpunkte veranlassten, zeigen, dass auch der Ort der Berührungspunkte keine Lösung ist.

§. 29.

Demnach wird von allen diesen geometrischen Oertern **nur allein die** Gleichung der **Enveloppe** eine **Lösung** der Differentialgleichung darstellen, und diese, und zwar diese allein, nennen wir die „**singuläre Lösung**" der Differentialgleichung. Jeder Weg, die Enveloppe zu finden, kann zu einigen der anderen Oerter führen, die, wie wir soeben gesehen haben, keine Lösungen sind, und es ist daher in jedem besonderen Falle, wofern nicht die erhaltene Gleichung augenscheinlich die Enveloppe und nichts weiter als die Enveloppe darstellt, nothwendig, sich zu überzeugen, ob das Resultat der Differentialgleichung genügt. Sollte dies nicht der Fall sein, so kann es möglich sein, die Gleichung in andere einfachere zu zerlegen, und eine oder mehrere von diesen können dann die Differentialgleichung befriedigen; diese werden dann die singuläre Lösung bilden; und diejenigen, welche der Differentialgleichung nicht genügen, werden sich als Oerter erweisen, welche den vorher aus einander gesetzten Principien gemäss zu verwerfen sind.

§. 30.

Es ist selbstverständlich, dass eine irreductible Differentialgleichung nicht nothwendig eine singuläre Lösung zu haben braucht. Man bezeichne z. B. die Discriminante in Bezug auf p von

$$\varphi(x, y, p) = 0$$

mit U, wo U eine Function der veränderlichen Coefficienten von p in dieser Gleichung ist, und nehme an, dass U sich nicht in einfache Factoren zerlegen lasse.

Ist die Gleichung $U = 0$ eine Lösung der Differentialgleichung, so bestimmt sich der Werth von p aus der Gleichung:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} p = 0,$$

und es muss die Gleichung

$$\varphi\left(x,\, y,\, -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}\right) = 0$$

identisch bestehen für die Werthe von x und y, die durch die Gleichung $U = 0$ verbunden sind; mit anderen Worten, es muss eine Relation zwischen den Coefficienten von p in φ und ihren Differentialquotienten nach x und y bestehen. Dies wird aber im Allgemeinen nicht der Fall sein.

Betrachten wir insbesondere die Gleichung zweiten Grades in der Form:

$$Lp^2 + 2Mp + N = 0,$$

so ist die singuläre Lösung, wenn eine solche existirt, $S = 0$, wo S entweder gleich $LN - M^2$ oder ein Factor hiervon ist. Im Allgemeinen lässt sich $LN - M^2$ nicht in Factoren zerlegen, und es ist selbst keine Lösung, wofern nicht

$$L\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - 2M\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial y} + N\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 = 0$$

ist, wobei $LN = M^2$; und dies würden im Allgemeinen zwei unabhängige simultane Gleichungen zur Bestimmung von x und y als von einander unabhängige Grössen sein. Wie wir aber gesehen haben, ist die Stammgleichung der Differentialgleichung von der Form:

$$L'c^2 + 2M'c + N' = 0,$$

und, wenn dies eine algebraische Gleichung ist, so wird es eine allgemeine Enveloppe geben, die enthalten ist in

$$L'N' - M'^2 = 0,$$

und die die singuläre Lösung sein wird. Die Erklärung des scheinbaren Widerspruches liegt in dem Umstande, dass diese Integralgleichung gewöhnlich von transcendenter Form ist und daher im Allgemeinen keine Enveloppe hat; die Ausnahmen in dem ersten Falle — wenn die Differentialgleichung eine singuläre Lösung hat — sind auch Ausnahmen in dem anderen, — wenn die transcendente Gleichung ein System von Curven mit einer eigentlichen Enveloppe darstellt —*).

*) Vgl. Cayley, Mess. of Math. Vol. VI, p. 23—37. Die Theorie der singulären Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung, so wie sie gegenwärtig angenommen ist, ist zuerst von Cayley gegeben worden in den Mess. of Math. Vol. II (1872), p. 6—12. Anm. d. Verf.

Wir gehen nun über zur Betrachtung einiger allgemeinen Beispiele der Theorie.

1. Aufgabe.

$$p^2 y + p(x - y) - x = 0.$$

Die Bedingung, dass p gleiche Werthe haben solle, ist:

$$(x - y)^2 + 4xy = 0,$$

d. i.

$$(x + y)^2 = 0$$

oder:

$$y = -x,$$

und dies ist keine Lösung. Nun kann man die Gleichung schreiben:

$$(p - 1)(py + x) = 0,$$

und die Lösungen hiervon sind:

$$y - x = c \quad \text{und} \quad y^2 + x^2 = c.$$

Die verschiedenen hierdurch dargestellten Curven erkennt man leicht.

Es ist dies ein Beispiel zu der Bemerkung (§. 23), dass, wenn die Gleichung in lineare und rationale Factoren zerlegbar ist, dieselbe keine singuläre Lösung besitzt.

In jedem Falle soll die entsprechende Figur gezeichnet werden.

2. Aufgabe.

$$p^2 y^2 \cos^2\alpha - 2pxy \sin^2\alpha + y^2 - x^2 \sin^2\alpha = 0.$$

Die Bedingung, dass p gleiche Werthe habe, ist:

$$x^2 y^2 \sin^4\alpha = y^2 \cos^2\alpha\,(y^2 - x^2 \sin^2\alpha),$$

d. i.

$$(x^2 \sin^2\alpha - y^2 \cos^2\alpha)\,y^2 = 0,$$

daher:

$$y = 0 \quad \text{und} \quad y = \pm x \operatorname{tang}\alpha.$$

Die Stammgleichung ist:

$$x^2 + y^2 - 2cx + c^2 \cos^2\alpha = 0,$$

und die Bedingung, dass sich für c gleiche Werthe ergeben, wird:

$$x^2 = (x^2 + y^2)\cos^2\alpha,$$

oder:

$$y = \pm x \operatorname{tang}\alpha.$$

Die durch obige Gleichung dargestellten Curven sind eine Schaar von Kreisen, deren Enveloppe die beiden geraden Linien $y = \pm x \operatorname{tang}\alpha$ sind, die zugleich die singuläre Lösung bilden.

Die Linie $y = 0$ ist ein Ort der Berührungspunkte.

3. Aufgabe.

$4p^2 x(x-a)(x-b) = \{3x^2 - 2x(a+b) + ab\}^2.$

Die Bedingung, dass p gleiche Werthe annehme, ist:

$$x(x-a)(x-b)\{3x^2 - 2x(a+b) + ab\}^2 = 0.$$

Die Stammgleichung ist:

$$(y+c)^2 = x(x-a)(x-b),$$

und die Bedingung, dass c gleiche Werthe haben solle, ist:

$$x(x-a)(y-b) = 0.$$

Die Differentialgleichung wird befriedigt durch $x=0$, $x=a$, $x=b$ (und die zugehörigen unendlich grossen Werthe von p), und dieses sind singuläre Lösungen. Der noch übrig bleibende Factor in der Discriminante in Bezug auf p giebt:

$$3x = a + b \pm (a^2 - ab + b^2)^{1/2},$$

und die hierdurch dargestellten Linien sind Oerter der Berührungspunkte.

Die Curve

$$y^2 = x(x-a)(x-\mathrm{b})$$

$(0 < a < b)$ besteht aus einem Oval, welches die x-Achse in dem Anfangspunkte und in der Entfernung a von diesem schneidet, und aus einer einer Parabel ähnlichen Curve, welche die x-Achse in der Entfernung b vom Anfangspunkte schneidet. Die Tangenten in allen diesen Punkten sind parallel der y-Achse. Das System der Curven erhält man, wenn man diese Curve parallel zur y-Achse fortbewegt. Die geraden Linien $x=0$, $x=a$, $x=b$ sind Enveloppen des Systems. Die Linie $3x = (a+b) - (a^2 - ab + b^2)^{1/2}$ ist der Ort reeller Berührungspunkte, und die Linie $3x = (a+b) + (a^2 - ab + b^2)^{1/2}$ der Ort imaginärer Berührungspunkte.

4. Aufgabe. Setzt man in der vorigen Aufgabe $a = b$ und hebt den Factor $(x-a)^2$ weg (§. 23), so wird die Differentialgleichung:

$$4xp^2 = (3x-a)^2.$$

Die Bedingung, dass p gleiche Werthe annehmen solle, ist:

$$x(3x-a)^2 = 0.$$

Die Integralgleichung ist:

$$(y+c)^2 = x(x-a)^2,$$

und die Bedingung, dass c gleiche Werthe annehmen solle, ist:

$$x(x-a)^2 = 0.$$

Beiden Bedingungen gemeinschaftlich ist $x = 0$, welches (zusammen mit dem entsprechenden unendlich grossen Werthe von p) eine Lösung der Gleichung und daher eine singuläre Lösung ist. Jede Curve des Systems hat einen Doppelpunkt; der Ort derselben ist $x = a$, welches somit ein Ort der Knotenpunkte ist. Die Linie $x = \frac{1}{3} a$ ist ein Ort der Berührungspunkte.

5. Aufgabe. In der vorigen Aufgabe setze man $a = 0$ und hebe den Factor x weg, dann ist die Differentialgleichung:

$$4 p^2 = 9 x.$$

Die Bedingung, dass p gleiche Werthe habe, ist:

$$x = 0.$$

Die Stammgleichung ist:

$$(y + c)^2 = x^3,$$

und die Bedingung, dass c gleiche Werthe annehme, wird:

$$x^2 = 0.$$

Die Differentialgleichung wird durch $x = 0$ (nebst dem entsprechenden unendlich grossen Werthe von p) nicht befriedigt.

Die Curve $y^2 = x^3$ ist die semicubische Parabel, welche eine Spitze im Anfangspunkte hat; und das ganze System wird erhalten, wenn man die Curve parallel zur y-Achse fortbewegt, so dass $x = 0$ der Ort der Spitzen und daher keine singuläre Lösung ist.

6. Aufgabe.

$$p^3 - 4 x y p + 8 y^2 = 0.$$

Die Bedingung, dass p gleiche Werthe annehme, ist:

$$y^4 - \frac{4}{27} x^3 y^3 = 0.$$

Die Stammgleichung ist:

$$y = c (x - c)^2,$$

und die Bedingung, dass c gleiche Werthe annehme, wird erhalten, wenn man c zwischen dieser und der Gleichung

$$(x - c)(x - 3 c) = 0$$

eliminirt, so dass

$$\text{entweder } y = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{4}{27} x^3$$

ist, in Uebereinstimmung mit der ersten Bedingung. Beide genügen

der Differentialgleichung; die erste von diesen Gleichungen ist aber ein particuläres Integral (entsprechend $c = 0$) und wir betrachten daher die letzte allein als die singuläre Lösung.

7. Aufgabe. Man suche die Stammgleichungen und die singulären Lösungen (wenn solche existiren) von den folgenden Gleichungen und untersuche die Natur der Oerter, welche keine Lösungen sind, aber zugleich mit der singulären Lösung gefunden werden:

$$(\alpha) \qquad x p^2 - 2 y p + 4 x = 0.$$

Stammgleichung:

$$x^2 = c\,(y - c).$$

Singuläre Lösungen:

$$y = \pm\, 2 x.$$

$$(\beta) \qquad (x^2 - a^2)\, p^2 - 2 x y p - x^2 = 0.$$

Stammgleichung:

$$c^2 + 2 c y + a^2 = x^2.$$

Singuläre Lösung:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Ort der Berührungspunkte:

$$x = 0.$$

$$(\gamma) \qquad p^2 + 2 x p = y.$$

Stammgleichung:

$$(2 x^3 + 3 x y + c)^2 = 4\,(x^2 + y)^3.$$

Keine singuläre Lösung.

Ort der Spitzen:

$$x^2 + y = 0.$$

$$(\delta) \qquad x y p^2 + (x^2 - y^2 - b^2)\, p - x y = 0.$$

$$(\varepsilon) \qquad (1 - y^2)\, p^2 = 1.$$

$$(\zeta) \qquad p^2\,(1 - x^2) = 1 - y^2.$$

$$(\eta) \qquad (b x - a y)^2\,(b^2 + a^2 p^2) = c^2\,(b + a p)^2.$$

Fernere Beispiele kommen vor in der Abhandlung von Cayley, Mess. of Math. Vol. VI (l. c.) und in einer von J. W. L. Glaisher, Mess. of Math. Vol. XII (1882), p. 1—14.

Vermischte Aufgaben.

1. Man löse die Gleichungen:

$$(1) \qquad y - x p = x + y p.$$

$$(2) \qquad a\,(x p + 2 y) = x y p.$$

$$(3) \qquad x^2 + y = p^2.$$

$$(4) \qquad m y - n x p = y p^2.$$

$$(5) \qquad p^3 = y^4\,(y + x p).$$

(6) $$p^3 + x^3 = a\,x\,p.$$

(7) $$x^3 p^2 + x^2 y p + a^3 = 0.$$

(8) $$a\,x^2 y^n p + y = 2\,x\,p.$$

(9) $$p^2 + 2\,y\,p\,\cot x = y^2.$$

(10) $$y - 2\,x\,p = f\,(x\,p^2).$$

(11) $$x^2 - \frac{x\,y}{p} = f\,(y^2 - x\,y\,p).$$

(12) $$(1 - p)^2 - e^{-2y} = p^2 e^{-2x}.$$

(13) $$(n\,x + y\,p)^2 = (1 + p^2)\,(y^2 + n\,x^2).$$

(14) $$(1 + 6\,y^2 - 3\,x^2 y)\,p = 3\,x\,y^2 - x^2.$$

(15) $$a\,y + b\,x\,p = x^m y^n (c\,y + e\,x\,p).$$

(16) $$y\,p\,(x^2 + y^2 + a^2) + x\,(x^2 + y^2 - a^2) = 0.$$

(17) $$(x\,p - y)^2 = p^2 - 2\,\frac{y}{x}\,p + 1.$$

(18) $$(x\,p - y)^2 = a\,(1 + p^2)\,(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

(19) $$(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}\,p + y = (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} - x.$$

(20) $$y = p\,x + (1 + p^2)^{\frac{1}{2}}\,\varphi\,(x^2 + y^2).$$

(21) $$\left(x \cos \frac{y}{x} + y \sin \frac{y}{x}\right) y = \left(y \sin \frac{y}{x} - x \cos \frac{y}{x}\right) x\,p.$$

(22) $$(x^3 y^3 + x^2 y^2 + x y + 1)\;y + (x^3 y^3 - x^2 y^2 - x\,y + 1)\;x\,p = 0.$$

(23) $$\{(x^2 - y^2) \sin \alpha + 2 x y \cos \alpha - y\,(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\}\;p$$
$$= 2\,x\,y \sin \alpha - (x^2 - y^2) \cos \alpha + x\,(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Man zeige, dass, wenn

$$u = 1 + A_1\,x + \frac{1}{2!}\,A_2\,x^2 + \frac{1}{3!}\,A_3\,x^3 + \cdots$$

ist, wobei die Grössen A durch die Relation

$$A_m = m\,A_{m-1} - \frac{1}{2}\,(m - 1)\,(m - 2)\,A_{m-3}$$

mit einander verbunden sind, die Gleichung gilt:

$$\log\,\{u\,(1 - x)^{\frac{1}{2}}\} = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}\,x^2.$$

3. Man integrire die Gleichung:

$$\cos \vartheta\,(\cos \vartheta - \sin \alpha \sin \varphi)\,d\,\vartheta + \cos \varphi\,(\cos \varphi - \sin \alpha \sin \vartheta)\,d\,\varphi = 0.$$

Man zeige, dass, wenn die willkürliche Constante durch die Bedingung bestimmt wird, dass die Gleichung durch die Werthe $(0, \alpha)$ von (ϑ, φ) befriedigt werden solle, die Gleichung befriedigt wird, wenn man $\vartheta + \varphi = \alpha$ setzt.

4. Man beweise, dass, wenn die Gleichung

$$c\,y\,d\,x - (y + a + b\,x)\,d\,y - n\,x\,(x\,d\,y - y\,d\,x) = 0$$

mittelst der Substitution

$$u(y + a + bx + nx^2) = y(c + nx)$$

in eine Gleichung zwischen u und x transformirt wird, die Veränderlichen separirt sind, und bringe die Gleichung durch die fernere Substitution:

$$v = \alpha u + \beta,$$

wo α und β passend zu bestimmen sind, auf die Form:

$$\frac{dv}{\varphi(v)} = \frac{dx}{\varphi(x)}.$$

5. Man bringe die Gleichung

$$axyp^2 + (x^2 - ay^2 - b)p - xy = 0$$

auf die Clairaut'sche Form und löse darauf die Gleichung.

Man löse die Gleichung:

$$\alpha \frac{x}{dx} + \beta \frac{y}{dy} + \gamma \frac{x + y - 1}{dx + dy} = 0,$$

in welcher $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ist.

6. Man zeige, dass, wenn y_1 und y_2 Lösungen sind der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q,$$

worin P und Q Functionen von x allein sind und $y_2 = y_1 z$ gesetzt ist, alsdann z gegeben ist durch:

$$z = 1 + a e^{-\int \frac{Q}{y_1} dx},$$

wo a eine willkürliche Constante ist.

7. Man zeige, dass die Veränderlichen in der Gleichung

$$\{x(x + y) + a^2\} \frac{dy}{dx} = y(x + y) + b^2$$

separirt werden können durch die Substitution $x = u + v$ und $y = ku - v$, vorausgesetzt, dass k passend gewählt ist, und integrire die Gleichung.

8. Man zeige, dass die Gleichungen

$$y - xp = a(y^2 + p) \quad \text{und} \quad y - xp = b(1 + x^2 p)$$

aus einer gemeinschaftlichen Stammgleichung abgeleitet werden können, und bestimme die letztere.

Sind die beiden

$$x + p(1 + p^2)^{-\frac{1}{2}} = a \quad \text{und} \quad y - (1 + p^2)^{-\frac{1}{2}} = b,$$

und ebenso die beiden

$$yp = ax \quad \text{und} \quad y^2(1 - p^2) = b$$

auch je aus derselben Stammgleichung ableitbar?

9. Man integrire die Differentialgleichung:

$$x\{ay^3 + (ay + bx)^3\} + y \frac{dy}{dx} \{bx^3 + (ay + bx)^3\} = 0.$$

Eine Tangente einer Curve in irgend einem Punkte P schneidet die Tangente und Normale eines festen Punktes O der Curve in den Punkten M und N und es ist das Rechteck $OMP'N$ construirt. Man bestimme die Curve von der Beschaffenheit, dass das Dreieck, welches von den Tangenten in irgend drei Punkten P, Q, R gebildet wird, gleich dem von den entsprechenden Punkten P', Q', R' gebildeten Dreiecke ist.

10. Man bestimme das System von Curven, welches der Differentialgleichung

$$dx\,\{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+ny\}+dy\,\{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}+nx\}=0$$

genügt, und zeige, dass die Curve, welche durch den Punkt $x=0$ und $y=n$ hindurchgeht, als einen Theil von sich den Kegelschnitt enthält:

$$x^2+y^2+2xy\,(1+n^2)^{\frac{1}{2}}=n^2.$$

11. Man integrire die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=\frac{a-b}{a+b}\,\frac{x-yp}{x+yp}$$

und untersuche die Natur der Lösung:

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1.$$

12. Man untersuche, ob $y=0$ ein particuläres Integral oder eine singuläre Lösung der Gleichung ist:

$$2\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)^3=y\,\frac{dy}{dx}.$$

13. Man bestimme die Stammgleichung und die singuläre Lösung (wenn es eine solche giebt) der Gleichung:

$$p^3+\mu p^2=a\,(y+\mu x).$$

Ebenso von

$$a^2yp^2-8xp+4y=0,$$

und von

$$xp^2-2yp+x+2y=0.$$

14. Man suche und interpretire die Stammgleichung und die singuläre Lösung von jeder der Gleichungen:

$$y\,(1+p^2)=2xp.$$
$$p^2=(4y+1)\,(p-y).$$

15. Man bestimme die Stammgleichung der Differentialgleichung:

$$2y=xp+\frac{a}{p}$$

und zeige, dass genau dieselbe Gleichung erhalten wird, wenn man die Bedingung, dass p in der Differentialgleichung gleiche Werthe haben solle, aufstellt, wie wenn man die Bedingung ausdrückt, dass c (die willkürliche Constante) gleiche Werthe haben solle in der Stammgleichung, und bestimme die geometrische Bedeutung dieser Gleichung. Ist es eine singuläre Lösung?

16. Die Stammgleichung der Differentialgleichung

$$(2x^2 + 1)p^2 + (x^2 + 2xy + y^2 + 2)p + 2y^2 + 1 = 0$$

ist $c^2 + c(x + y) + 1 - xy = 0$. Man beweise dies und suche die singuläre Lösung sowohl aus der Gleichung in p, wie aus der Gleichung in c, und erörtere die geometrische Bedeutung der auftretenden nebensächlichen Factoren.

17. Man zeige, dass die Lösung der Gleichung

$$a^2 y p^2 - 4xp + y = 0$$

die folgende ist:

$$c^2 + 2cx(3a^2y^2 - 8x^2) - 3x^2a^4y^4 + a^6y^6 = 0.$$

Ist $2x = \pm ay$ eine singuläre Lösung?

Man zeichne die Curve und den geometrischen Ort, welcher durch die von einer willkürlichen Constanten unabhängige Gleichung gegeben wird. (Woolsey Johnson.)

18. Man zeige, dass die Differentialgleichung

$$Lp^2 + 2Mp + N = 0,$$

welche keine singuläre Lösung hat, keine Stammgleichung besitzt, welche ein System von algebraischen Curven darstellt. (Cayley.)

Drittes Capitel.

Die allgemeine lineare Differentialgleichung mit constanten Coefficienten.

Vorbereitende Formeln.

§. 31.

Bevor wir zu der Discussion der linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung mit constanten Coefficienten übergehen, erscheint es zweckmässig, gewisse Sätze über Differentiation und Integration, welche bei dieser Discussion erforderlich sind, aufzustellen und zu beweisen.

Man schreibe D für $\frac{d}{dx}$, D^2 für $\frac{d^2}{dx^2}$ u. s. w. Alsdann unterliegt dieses Symbol D offenbar den Fundamentalgesetzen der Algebra. Denn es ist augenscheinlich:

$$(D^r + D^n)\, u = (D^n + D^r)\, u.$$

$$D^r . D^n u = D^n . D^r u = D^{n+r} u.$$

$$D(u + v) = Du + Dv.$$

Wir müssen auch negative Indices einführen. Haben wir z. B.

$$Du = v,$$

und schreiben wir nach Analogie der Algebra:

$$u = D^{-1} v,$$

so ist:

$$v = Du = D . D^{-1} v,$$

mithin:

$$D . D^{-1} = 1.$$

Es stellt demnach D^{-1} eine solche Operation an irgend einer Grösse dar, dass, wenn die durch D dargestellte Operation hinterher

ausgeführt wird, die Grösse ungeändert bleibt. Zugleich folgt, dass diese Symbole mit negativen Indices den Gesetzen der Algebra ebenfalls gehorchen, und eine Operation mit einem negativen Index ist gleichbedeutend mit einer Integration. Es ist jedoch wichtig, darauf aufmerksam zu machen, dass der besondere Zweck dieser inversen Operationen in der Ermittelung eines Integrals, aber nicht des vollständigen Integrals besteht; es ist daher die willkürliche Constante, welche bei der Integration auftritt, weggelassen.

In dem Folgenden bezeichnet ψ ein Functionszeichen und $\psi(x)$ bezeichnet überall eine algebraische rationale Function von x, welche nach steigenden oder fallenden ganzen Potenzen (oder nach beiden zugleich) der Veränderlichen entwickelt werden kann.

§. 32.

1. Satz.

$$\psi(D)\, e^{ax} = \psi(a)\, e^{ax}.$$

Denn da D für $\frac{d}{dx}$ steht, so ist:

$$D e^{ax} = a e^{ax}.$$

Wendet man auf jede Seite die Operation D^{-1} an, so entsteht die Gleichung:

$$D^{-1} . D e^{ax} = a D^{-1} e^{ax},$$

oder wenn wir die Seiten der Gleichung umstellen und durch a dividiren:

$$D^{-1} e^{ax} = a^{-1} e^{ax}.$$

Durch Wiederholung dieser Operationen erhalten wir die Gleichungen:

$$D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$$

$$D^{-m} e^{ax} = a^{-m} e^{ax}.$$

Da nun ψ eine algebraische Function ist, die nach Potenzen entwickelt werden kann, so können wir schreiben:

$$\begin{aligned}\psi(D)\, e^{ax} &= [A_0 + A_1 D + \cdots + A_r D^r + \cdots + B_1 D^{-1} + B_2 D^{-2} + \cdots]\, e^{ax}\\ &= [A_0 + A_1 a + \cdots + A_r a^r + \cdots + B_1 a^{-1} + B_2 a^{-2} + \cdots]\, e^{ax}\\ &= \psi(a)\, e^{ax}.\end{aligned}$$

§. 33.

2. Satz.

Bezeichnet X irgend eine Function von x, so ist:

$$\psi(D)\{e^{ax} X\} = e^{ax} \psi(D + a) X.$$

Eine einzige Operation mit D giebt:

$$D\{e^{ax} X\} = e^{ax} (D + a) X;$$

hieraus folgt, wenn man auf beiden Seiten mit e^{-ax} multiplicirt:

$$(e^{-ax} D e^{ax}) X = (D + a) X,$$

so dass eine Operation mit $e^{-ax} D e^{ax}$ an X dieselbe Wirkung hat wie die Operation $D + a$, ausgeführt an X. Wiederholt man die Operation, so kommt:

$$(e^{-ax} D e^{ax}) (e^{-ax} D e^{ax}) X = (D + a) (D + a) X,$$

oder:

$$(e^{-ax} D^2 e^{ax}) X = (D + a)^2 X.$$

Operirt man nochmals mit $e^{-ax} D e^{ax}$, so wird:

$$(e^{-ax} D e^{ax}) (e^{-ax} D^2 e^{ax}) X = (D + a) (D + a)^2 X,$$

oder:

$$(e^{-ax} D^3 e^{ax}) X = (D + a)^3 X,$$

u. s. w. Wird die Operation n-mal ausgeführt, so wird die resultirende Gleichung sein:

$$e^{-ax} D^n \{e^{ax} X\} = (D + a)^n X,$$

und diese giebt, mit e^{ax} multiplicirt:

$$D^n \{e^{ax} X\} = e^{ax} (D + a)^n X,$$

worin n eine positive ganze Zahl bedeutet.

Wir betrachten nun den Fall der negativen Indices und setzen:

$$(D + a)^n X = X_1,$$

so dass

$$X = (D + a)^{-n} X_1$$

ist. Dann kann das eben erhaltene Resultat geschrieben werden:

$$D^n e^{ax} (D + a)^{-n} X_1 = e^{ax} X_1.$$

Operirt man an jeder Seite mit D^{-n}, so ergiebt sich das Resultat:

$$e^{ax} (D + a)^{-n} X_1 = D^{-n} e^{ax} X_1.$$

Nun sind der Form von X keine Beschränkungen auferlegt, es giebt daher auch keine in Bezug auf die Form von X_1, welches somit jede beliebige Function von x darstellen kann. Ersetzen wir sie also durch X, so haben wir:

$$D^{-n} \{e^{ax} X\} = e^{ax} (D + a)^{-n} X.$$

Man entwickele nun $\psi (D)$ nach ganzen positiven und (wenn nöthig) negativen Potenzen von D, operire mit diesen ganzen Potenzen der Reihe nach an $e^{ax} X$, substituire die aus den vorstehenden Gleichungen abgeleiteten äquivalenten Werthe und fasse die Glieder wie vorher zusammen. Dann ist das Resultat:

$$\psi (D) \{e^{ax} X\} = e^{ax} \psi (D + a) X.$$

Zusatz. Setzen wir:

$$e^{ax} X = Y,$$

so dass Y eine Function von x ist, dann ist:

$$\psi(D) Y = e^{ax} \psi(D + a) \{Y e^{-ax}\},$$

ein Satz, der häufige Anwendung findet. Soll z. B. ein particulärer Werth von y gefunden werden, welcher der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + ky = V$$

genügt, so wird derselbe der eingeführten Bezeichnung gemäss sein:

$$y = \frac{1}{D+k} V$$

$$= e^{ax} \frac{1}{D + k + a} V e^{-ax},$$

oder, wenn man a so wählt, dass $a + k = 0$ ist:

$$y = e^{-kx} \frac{1}{D} V e^{kx}$$

$$= e^{-kx} \int V e^{kx} dx.$$

§. 34.

3. Satz.

Ist $\psi(x^2)$ eine gerade Function von x, so ist:

$$\psi(D^2) \sin(ax + \alpha) = \psi(-a^2) \sin(ax + \alpha).$$

Denn es ist:

$$D^2 \sin(ax + \alpha) = (-a^2) \sin(ax + \alpha),$$

und der Satz ergiebt sich wie vorher.

Zusatz. Ist $\psi(x)$ keine gerade Function von x, so kann sie dargestellt werden in der Form:

$$\varphi(x^2) + x\chi(x^2),$$

worin φ und χ gerade Functionen sind. In diesem Falle ist:

$$\psi(D) \sin(ax + \alpha) = \{\varphi(D^2) + D\chi(D^2)\} \sin(ax + \alpha)$$
$$= \varphi(-a^2) \sin(ax + \alpha) + a\chi(-a^2) \cos(ax + \alpha).$$

Ist die Function, an welcher die Operation ausgeführt werden soll, nicht der Sinus, sondern der Cosinus, so liegen die entsprechenden Aenderungen auf der Hand.

§. 35.

4. Satz.

Dieser stellt in Wirklichkeit eine Erweiterung des Leibnitz'schen Satzes für die aufeinanderfolgende Differentiation des Products zweier Grössen dar, deren Differentialquotienten bekannt sind.

Bezeichnet $\psi(x)$ wie zuvor irgend eine algebraische rationale Function, welche nach ganzen Potenzen von x entwickelbar ist, und bezeichnen $\psi'(x)$, $\psi''(x)$, $\psi'''(x)$, ... ihren ersten, zweiten, dritten, ... Differentialquotienten nach x, so lautet der verallgemeinerte Satz:

$$\psi(D)uv = u\psi(D)v + Du\psi'(D)v + \frac{D^2u}{2!}\psi''(D)v + \frac{D^3u}{3!}\psi'''(D)v + \cdots$$

Der Beweis stützt sich auf das Leibnitz'sche Theorem und ist ähnlich dem der vorhergehenden Sätze.

Der Nutzen dieses Satzes tritt in Fällen zu Tage, wo eine der beiden Grössen u und v eine Potenz von x oder die Summe von Potenzen von x ist. Ist z. B. $u = x^{m-1}$, so braucht die Reihe auf der rechten Seite nur bis zum $m$ten Gliede geschrieben zu werden, und inverse Operationen dieser Art, die ausgeführt werden sollen, werden an einer einzigen Grösse v ausgeführt werden.

Aufgabe. Man zeige, dass, wenn

$$(D + k)^2 y = x^2 V$$

ist, worin V eine Function von x allein bedeutet, y gegeben wird durch:

$$e^{-kx}(x^2\int\int e^{kx} V\,dx^2 - 4x\int\int\int e^{kx} V\,dx^3 + 6\int\int\int\int e^{kx} V\,dx^4).$$

§. 36.

Ein anderes wichtiges Operationszeichen, welches zuweilen vorkommt, ist $x\frac{d}{dx}$ oder, nach der oben angegebenen Bezeichnung, xD. In Bezug auf dieses kann man analoge Sätze aussprechen.

Bezeichnet $F(z)$ eine rationale algebraische, nach Potenzen von z entwickelbare Function, so werden wir in $F(xD)$ Glieder von der Form $(xD)^n$ erhalten, worunter nicht $x^n\frac{d^n}{dx^n}$, sondern $x\frac{d}{dx}\cdot x\frac{d}{dx}\cdots$

(wo diese Operation n mal zu wiederholen ist) zu verstehen ist. Die Beziehungen zwischen diesen sollen kurz bewiesen werden.

1. Satz.

$$F(xD)\,x^m = F(m)\,x^m.$$

Denn es ist:

$$(xD)\,x^m = m\,x^m$$

$$(xD)^2\,x^m = (xD)\,m\,x^m = m^2\,x^m,$$

und so fort für alle ganzen positiven und negativen Potenzen. Daraus folgt unmittelbar der Satz.

Aufgabe. Man beweise, dass, wenn U eine Function von x von der Form

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots$$

ist, alsdann die Gleichung besteht:

$$\frac{1}{F(xD)}\,U = \frac{A}{F(0)} + \frac{B}{F(1)}\,x + \frac{C}{F(2)}\,x^2 + \frac{D}{F(3)}\,x^3 + \cdots$$

2. Satz.

$$F(xD)\,x^m\,V = x^m F(xD + m)\,V.$$

Wir haben:

$$xD\,(x^m V) = x^m (xD + m)\,V,$$

oder:

$$(x^{-m}.\,xD.\,x^m)\,V = (xD + m)\,V,$$

so dass die Operationen $x^{-m}.\,xD.\,x^m$ und $xD + m$ einander äquivalent sind. Der weitere Gang des Beweises ist vollständig analog dem für das entsprechende auf $F(D)$ bezügliche Theorem, und das Resultat ist von der angegebenen Form.

§. 37.

Die Beziehung zwischen den Operationssymbolen D^n und xD wird durch die Formel gegeben:

$$x^n D^n = xD\,(xD - 1)\,(xD - 2)\,\ldots\,(xD - n + 1).$$

Dieser Satz kann direct bewiesen werden. Denn operirt man an u und entwickelt man u in eine Reihe von Gliedern von der Form $A_m x^m$, so ist das mit x^n multiplicirte Resultat der Operation mit D^n an diesem Gliede gleich Null, falls $m < n$, und es ist gleich

$$m\,(m - 1)\,(m - 2)\,\ldots\,(m - n + 1)\,A_m x^m,$$

falls $m \geqq n$ ist. Dies ist jedoch auch das Resultat der Operation mit dem rechts stehenden Symbol. Somit sind die beiden Operations-

symbole für jedes Glied von u und daher für die Summe aller Glieder von u, d. h. für u selbst, einander äquivalent.

Der Satz lässt sich aber auch durch Induction beweisen. Denn nimmt man an, dass

$$x^n D^n u = x D(x D - 1)(x D - 2) \dots (x D - n + 1) u$$

sei, und setzt man:

$$u = (x D - n) v,$$

so ist:

$$D^n u = x D^{n+1} v,$$

und daher:

$$x^{n+1} D^{n+1} v = x D (x D - 1)(x D - 2) \dots (x D - n) v.$$

Da nun u irgend eine allgemeine Function ist, so ist auch v eine allgemeine Function. Ist der Satz also gültig für n, so gilt er auch für $n + 1$; nun ist er offenbar richtig für die Werthe 1 und 2, somit ist er allgemein richtig.

Einige Eigenschaften der allgemeinen linearen Differentialgleichung.

§. 38.

Der allgemeine Typus einer linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung ist:

$$\frac{d^n y}{d x^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}} + \dots + X_{n-1} \frac{d y}{d x} + X_n y = V,$$

worin $X_1, X_2, \dots, X_n, V$ Functionen von x (oder Constanten) sind, die jedoch y nicht enthalten. Der Kürze wegen möge geschrieben werden:

$$\Phi (D) y = V.$$

Wird diese Gleichung Schritt für Schritt integrirt, so dass jede Integration die Ordnung der Gleichung um eine Einheit erniedrigt, so wird durch jede solche Integration stets eine willkürliche Constante eingeführt, und es werden demnach, nachdem man schliesslich die Integralgleichung erhalten hat, im Ganzen n willkürliche Constanten vorkommen, oder wir dürfen erwarten, dass die Stammgleichung einer gegebenen linearen Differentialgleichung eine Anzahl von willkürlichen Constanten enthält, welche gleich der Ordnung der Gleichung ist.

Es giebt gewisse Eigenschaften, die allen linearen

Gleichungen gemeinschaftlich zukommen und bis zu einem gewissen Grade ihre Integration vereinfachen. Die wichtigsten derselben sind die folgenden:

§. 39.

I. Ist η irgend ein particulärer Werth von y, welcher der Gleichung genügt, setzt man ferner

$$y = \eta + Y,$$

und substituirt man diesen Werth von y in die Gleichung, so erhält man:

$$\Phi(D)\,Y + \Phi(D)\,\eta = V.$$

Da aber η irgend eine Lösung der Gleichung

$$\Phi(D)\,y = V$$

ist, so geht diese Gleichung über in:

$$\Phi(D)\,Y = 0,$$

so dass wir, um unsere ursprüngliche Gleichung zu lösen, die vorstehende Gleichung allgemein zu lösen haben, welche dieselbe ist wie die ursprüngliche, nur dass nunmehr die rechte Seite Null ist. Nachdem das vollständige Integral dieser Gleichung, welches n willkürliche Constanten enthalten wird, da die Gleichung von der n ten Ordnung ist, erhalten ist, muss dasselbe zu η hinzugefügt werden; das Resultat wird alsdann, gleich y gesetzt, die Stammgleichung der gegebenen Gleichung sein. Diese besteht dann aus zwei Theilen:

Erstens aus der Grösse η, welche das **particuläre Integral** genannt wird und irgend eine beliebige Lösung (je einfacher, um so besser) der ursprünglichen Gleichung ist.

Zweitens aus der Grösse Y, welche die **Complementär-Function** heisst; dieselbe stellt das vollständige Integral der Gleichung dar, wenn die rechte Seite gleich Null gesetzt wird.

Die Summe dieser beiden Theile ist die Stammgleichung der ursprünglichen Gleichung. Wenn in irgend einem besonderen Falle die rechte Seite bereits Null sein sollte, so wird der erste von diesen Theilen nicht vorkommen.

Die verschiedenen Methoden, welche bei der Ermittelung des particulären Integrals von Nutzen sind, werden später im §. 46 angegeben; die anderen sogleich zu erwähnenden Eigenschaften sind von Vortheil bei der Aufsuchung der Complementär-Function.

§. 40.

II. Ist $Y = Y_1$ eine Lösung der Gleichung

$$\Phi(D)\,Y = 0,$$

so ist auch $Y = C_1 Y_1$, worin C_1 eine Constante ist, eine Lösung, und wenn $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ particuläre Lösungen sind, so ist auch

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \cdots + C_n Y_n,$$

worin $C_1, C_2, \ldots, C_n$ Constanten sind, eine Lösung.

Denn es ist:

$$\Phi(D)\,Y = \Phi(D)\; C_1 Y_1 + \Phi\,(D)\; C_2 Y_2 + \cdots,$$

und jedes Glied der rechten Seite ist Null. Den Werthen der Constanten C ist nun keinerlei Beschränkung auferlegt, dieselben sind somit vollkommen willkürlich. Der obige Werth von Y ist daher das vollständige Integral der Gleichung

$$\Phi(D)\,Y = 0,$$

und daher die Complementär-Function in dem Integral der Gleichung:

$$\Phi(D)\,y = V.$$

Hierdurch ist also die Bestimmung der Complementär-Function zurückgeführt auf die Bestimmung von particulären Integralen der Hülfsgleichung.

§. 41.

III. Ist ein einziges particuläres Integral der Hülfsgleichung bekannt, so kann die Ordnung der gegebenen Differentialgleichung um eine Einheit erniedrigt werden.

Ist Y_1 eine Lösung von

$$\Phi(D)\,Y = 0,$$

und denkt man sich die Substitution des Werthes $Y_1 z$ in der Gleichung $\Phi(D)\,y = V$ ausgeführt, so wird die linke Seite nach §. 35:

$$z\,\Phi(D)\,Y_1 + Dz\,\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,D}\,Y_1 + \frac{D^2 z}{2!}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial\,D^2}\,Y_1 + \cdots + \frac{D^n z}{n!}\,\frac{\partial^n\,\Phi}{\partial\,D^n}\,Y_1,$$

wobei die Operationssymbole $\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,D}, \cdots$ aus $\Phi(D)$ dadurch abgeleitet sind, dass man für den Augenblick D als eine Grösse betrachtet und die partiellen Differentialquotienten nach D bestimmt,

Nun ist aber:

$$\frac{\partial^n \Phi}{\partial D^n} = n!$$

$$\frac{\partial^{n-1} \Phi}{\partial D^{n-1}} = \frac{n!}{1!} D + (n-1)!\, X_1$$

$$\frac{\partial^{n-2} \Phi}{\partial D^{n-2}} = \frac{n!}{2!} D^2 + \frac{(n-1)!}{1!} X_1 D + (n-2)!\, X_2,$$

u. s. w.; wir erhalten daher, wenn wir unsere Gleichung rückwärts schreiben:

$$Y_1 D^n z + (X_1 Y_1 + n D Y_1) D^{n-1} z + \cdots + D z \frac{\partial \Phi}{\partial D} Y_1 + z\, \Phi(D) Y_1 = V.$$

Nach Voraussetzung ist aber:

$$\Phi(D)\, Y_1 = 0,$$

so dass das letzte Glied auf der linken Seite wegfällt. Die Grösse Y_1 ist als bekannt vorausgesetzt; es können daher alle Functionen derselben auf der linken Seite als bekannt angesehen werden. Setzt man dann Z für Dz, so wird die Gleichung:

$$Y_1 D^{n-1} Z + (X_1 Y_1 + n D Y_1) D^{n-2} Z + \cdots + Z \frac{\partial \Phi}{\partial D} Y_1 = V,$$

und dies ist eine Gleichung von der $(n-1)$ten Ordnung.

Aufgabe. Als einen Zusatz hierzu beweise man, dass, wenn m particuläre Integrale der Hülfsgleichung bekannt sind, die Ordnung der ursprünglichen Differentialgleichung um m Einheiten erniedrigt werden kann.

§. 42.

IV. Die gegebene Gleichung kann in eine Gleichung transformirt werden, in welcher das zweite Glied (d. h. das Glied, welches den Differentialquotienten enthält, dessen Ordnung um eine Einheit kleiner ist als die Ordnung der Gleichung) fehlt.

Die Substitution von $Y_1 z$ für y giebt als Coefficienten von $D^{n-1} z$:

$$X_1 Y_1 + n D Y_1.$$

(Bis zu diesem Punkte des letzten Paragraphen war es auf den vorausgesetzten Werth von Y_1 noch nicht angekommen, so dass die Gleichung vollständig allgemein war.) Da nun das Glied mit $D^{n-1} z$ fehlen soll, so erhalten wir:

$$X_1 Y_1 + n D Y_1 = 0,$$

und daher:

$$log\ Y_1 = -\frac{1}{n}\int X_1\,dx,$$

oder:

$$Y_1 = e^{-\frac{1}{n}\int X_1\,dx},$$

wo keine willkürliche Constante hinzugesetzt ist, da die Differentialgleichung linear und von der n ten Ordnung bleibt. Wird der Werth von Y_1 eingesetzt, so ist die Differentialgleichung in z frei von dem Gliede mit $D^{n-1}z$.

Von diesen Eigenschaften werden I. und II. unmittelbar Anwendung finden.

Allgemeine lineare Differentialgleichung mit constanten Coefficienten.

§. 43.

Wenn in der allgemeinen linearen Differentialgleichung die Coefficienten von y und seinen Differentialquotienten Constanten sind, so kann sie geschrieben werden:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_{n-1}\frac{dy}{dx} + A_n y = V,$$

oder etwa:

$$f(D)\,y = V,$$

wobei $f(D)$ eine rationale algebraische ganze Function von D allein und V irgend eine Function von x ist. Es ist bereits gezeigt worden, dass die Lösung der Gleichung aus zwei Theilen besteht, die besonders erhalten werden können. Dies soll nach einander ausgeführt werden.

§. 44.

Es soll die **Complementär-Function** gefunden werden.

Die Complementär-Function ist das vollständige Integral von

$$f(D)\,y = 0.$$

Wir haben nun gezeigt, dass

$$f(D)\,e^{ax} = f(a)\,e^{ax}$$

ist, so dass $y = e^{ax}$ eine particuläre Lösung der Gleichung sein wird, wenn a so beschaffen ist, dass es die Gleichung

$$f(a) = 0$$

befriedigt. Da aber $f(z)$ eine rationale algebraische ganze Function vom Grade n ist, so giebt es n Wurzeln der Gleichung:

$$f(z) = 0.$$

Bezeichnet man diese n Wurzeln mit $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, so sind $e^{\alpha x}$, $e^{\beta x}, \ldots, e^{\lambda x}$ n particuläre Integrale der Gleichung:

$$f(D)\, y = 0,$$

und daher ist die Stammgleichung:

$$y = A\, e^{\alpha x} + B e^{\beta x} + \cdots + L e^{\lambda x},$$

in welcher $A, B, \ldots, L$ n willkürliche Constanten sind. Dieses ist dann die Complementär-Function der ursprünglichen Gleichung, und zwar ist dieselbe vollständig, wenn die Wurzeln sämmtlich reell und von einander verschieden sind.

Sind jedoch zwei Wurzeln einander gleich, z. B. α und β, dann wird der Werth von y:

$$y = (A + B)\, e^{\alpha x} + C e^{\gamma x} + \cdots + L e^{\lambda x}$$
$$= A_1 e^{\alpha x} + C e^{\gamma x} + \cdots + L e^{\lambda x},$$

wo A_1 eine einzige willkürliche Constante ist (gleich der Summe zweier willkürlichen Constanten). Da nun in y nur $n - 1$ willkürliche Constanten vorkommen, so ist es nicht die Stammgleichung. Um die Stammgleichung zu erhalten, können wir annehmen, dass die Wurzeln nicht gleich, sondern um eine Grösse h verschieden sind, die schliesslich gleich Null wird. Der Theil, welcher von den Wurzeln α und β abhängt, wird dann sein:

$$A\, e^{\alpha x} + B\, e^{(\alpha + h)x}$$
$$= e^{\alpha x}\left\{A + B\left(1 + h x + \frac{h^2 x^2}{2\,!} + \cdots\right)\right\}$$
$$= e^{\alpha x}\left\{(A + B) + B h x + B h \frac{h}{2!} x^2 + \cdots\right\}.$$

Da die Grössen A und B willkürlich sind, so können wir sie unendlich gross von solcher Art annehmen, dass, wenn h sich der Null nähert, Bh endlich bleibt und gleich B_1 ist, während A und B von entgegengesetztem Zeichen sind und ihre numerische Differenz (oder algebraische Summe) endlich und gleich A_1 ist. Auf diese Weise geht die Summe der beiden Glieder $A\, e^{\alpha x} + B e^{\beta x}$, wenn h gleich Null gesetzt wird, schliesslich über in:

$$e^{\alpha x}\left\{A_1 + B_1\left(x + \frac{h}{2!} x^2 + \frac{h^2}{3!} x^3 + \cdots\right)\right\} = (A_1 + B_1 x)\, e^{\alpha x}.$$

In ähnlicher Weise werden, wenn r Wurzeln gleich sind, die entsprechenden r Glieder in der Complementär-Function sich offenbar zu einem einzigen Gliede zusammenziehen; es ist aber leicht zu zeigen, durch eine ähnliche Schlussfolgerung wie die im Falle zweier gleichen Wurzeln angewendete, dass die r Glieder werden ersetzt werden durch:

$$e^{\alpha x}(A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \cdots + A_r x^{r-1}),$$

wo α den gemeinsamen Werth der r gleichen Wurzeln bezeichnet, und die Complementär-Function wird dann sein:

$$y = e^{\alpha x}(A_1 + A_2 x + \cdots + A_r x^{r-1}) + \cdots + L e^{\lambda x}.$$

Sind ferner die Wurzeln nicht sämmtlich reell, so müssen die imaginären Wurzeln paarweise vorkommen; ein solches Paar möge $\vartheta \pm \varphi i$ *) sein. Die entsprechenden Glieder der Complementär-Function werden sein:

$$e^{\vartheta x}(A' e^{x\varphi i} + B' e^{-x\varphi i}),$$

und es ist zuweilen nothwendig, dieselben in einer von imaginären Grössen freien Form darzustellen. Werden für die Exponentialgrössen ihre Werthe in den Cosinus und Sinus eingesetzt, so wird der Ausdruck:

$$e^{\vartheta x}\{(A' + B') \cos \varphi x + i(A' - B') \sin \varphi x\}.$$

Da A' und B' willkürliche Constanten sind, so können wir setzen:

$$A' + B' = F$$
$$i(A' - B') = G,$$

wo F und G willkürlich sein werden, und daher werden die entsprechenden Glieder in der Complementär-Function:

$$e^{\vartheta x}(F \cos \varphi x + G \sin \varphi x).$$

Kommt endlich eine imaginäre Wurzel wiederholt vor, so wird die conjugirte imaginäre Wurzel gleichfalls wiederholt vorkommen, und die entsprechenden Glieder in y werden sein:

$$e^{x(\vartheta+\varphi i)}(A' + A'' x) + e^{x(\vartheta-\varphi i)}(B' + B'' x).$$

Wendet man dasselbe Verfahren an wie vorher, und setzt man:

$$A' + B' = F, \quad A'' + B'' = F'$$
$$i(A' - B') = G, \quad i(A'' - B'') = G',$$

so erhält man als den entsprechenden Theil der Complementär-Function:

$$e^{\vartheta x}\{(F + F' x) \cos \varphi x + (G + G' x) \sin \varphi x\}.$$

*) Durch das ganze Buch ist $\sqrt{-1}$ durch i ersetzt. Anm. d. Verf.

Im Falle, wo imaginäre Wurzeln in mehrfacher Wiederholung vorkommen, erhält man analoge Resultate wie im Falle mehrfach vorkommender reeller Wurzeln.

§. 45.

In einigen Fällen der allgemeinen linearen Gleichung, in welcher die Coefficienten nicht Constanten, sondern irgend welche Functionen von x sind, kann man eine in gewissem Sinne zu der vorigen analoge Methode anwenden. So kann es z. B., wenn man in der Gleichung

$$(D^n + X_1 D^{n-1} + X_2 D^{n-2} + \cdots + X_{n-1} D + X_n)\, y = 0$$

$\psi(m, x)$ für y substituirt, wo ψ eine Function von bestimmter Form ist, sich ereignen, dass die resultirende Gleichung einen Factor besitzt, der unabhängig von x ist, z. B. den Factor $\varphi(m)$. Ist dies der Fall, so wird der Factor gewöhnlich vom $n$ten Grade sein und wird daher, gleich Null gesetzt, der Differentialgleichung genügen und n Werthe von m liefern, welche durch $m_1, m_2, \cdots, m_n$ bezeichnet sein mögen. Die Stammgleichung würde alsdann sein:

$$y = A_1 \psi(m_1, x) + A_2 \psi(m_2, x) + \cdots + A_n \psi(m_n, x).$$

Wären zwei Wurzeln einander gleich, z. B. m_1 und m_2, so würden wir, wenn wir $m_2 = m_1 + h$ setzen, für den entsprechenden Theil von y erhalten:

$$(A_1 + A_2)\, \psi(m_1, x) + h A_2 \left\{ \frac{\partial \psi(m_1, x)}{\partial m_1} + \frac{h}{2!} \frac{\partial^2 \psi(m_1, x)}{\partial m_1^2} + \cdots \right\},$$

oder, wenn wir wie vorher die Constanten ändern und schliesslich h zu Null werden lassen:

$$A' \psi(m_1, x) + B' \frac{\partial}{\partial m_1} \psi(m_1, x).$$

Ein analoges Verfahren gilt in dem Falle, wo eine Wurzel m_1 sich mehrfach wiederholt, und im Falle imaginärer Wurzeln würde man in der Regel die Constanten in dem entsprechenden Theile von y derart zu ändern haben, dass der abgeänderte Ausdruck frei von imaginären Grössen wird.

Dieses Verfahren war angewendet worden im Falle constanter Coefficienten, wo e^{mx} die benutzte specielle Form von ψ war. Ist die Gleichung homogen (§. 55), d. h. besitzt sie die Form:

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_{n-1} x \frac{dy}{dx} + A_n y = 0,$$

in welcher die Grössen A Constanten sind, so ist die geeignete Form von ψ, welche einzusetzen ist (siehe §. 36), x^m. Zuweilen lässt sich eine gegebene Gleichung durch eine zweckmässige Aenderung der Veränderlichen auf die obige Form zurückführen.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\,\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Setzt man $y = e^{mx}$ ein, so wird die Gleichung für m:

$$(m + 1)\,(m + 2) = 0,$$

somit:

$$y = Ae^{-x} + Be^{-2x}.$$

2. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\lambda\,\frac{dy}{dx} + (\lambda^2 + \mu^2)\,y = 0.$$

Die Gleichung für m ist:

$$(m - \lambda)^2 + \mu^2 = 0,$$

mithin:

$$y = e^{\lambda x}\,C\,cos\,(\mu x + \alpha) = e^{\lambda x}\,(A\,cos\,\mu x + B\,sin\,\mu x).$$

Folgerung. Die Lösung von

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mu^2 y = 0$$

ist:

$$y = A\,cos\,\mu x + B\,sin\,\mu x.$$

3. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\,\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Die Gleichung für m ist:

$$(m - 1)^2 = 0,$$

und daher:

$$y = e^x\,(A + Bx).$$

4. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2n^2\,\frac{d^2y}{dx^2} + n^4 y = 0.$$

Die Gleichung für m ist:

$$(m^2 + n^2)^2 = 0,$$

und der Werth von y ist:

$$(A + Bx) \cos nx + (C + Dx) \sin nx.$$

5. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Substituirt man x^m für y, so ist die Gleichung für m:

$$m(m-1) + m - 1 = 0,$$

so dass $m = +1$ oder $= -1$, und daher der Werth von y:

$$Ax + \frac{B}{x}.$$

6. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} - 3x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 7x \frac{dy}{dx} - 8y = 0.$$

Bei derselben Substitution, wie in der 5. Aufgabe, ist die Gleichung in m:

$$m(m-1)(m-2) - 3m(m-1) + 7m - 8 = 0,$$

oder:

$$m^3 - 6m^2 + 12m - 8 = 0.$$

Dieselbe giebt dreimal $m = 2$. Daher ist der Werth von y:

$$Ax^m + B \frac{\partial x^m}{\partial m} + C \frac{\partial^2 x^m}{\partial m^2},$$

wo nach der Differentiation $m = 2$ zu setzen ist. Das Integral ist daher:

$$x^2 (A + B \log x + C (\log x)^2).$$

7. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$(a + bx)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + A(a + bx) \frac{dy}{dx} + By = 0.$$

Setzt man $a + bx = z$, so wird die Gleichung von ähnlicher Form wie die letzten beiden werden.

8. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $(D^4 + 5D^2 + 6)\, y = 0.$

(2) $(D^4 + a^4)\, y = 0.$

(3) $(D^6 - a^6)\, y = 0.$

(4) $\frac{d^8 y}{dx^8} = y.$

(5) $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = 0.$

(6) $(1+x)^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + (1+x)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3(1+x) \frac{dy}{dx} - 8y = 0.$

§. 46.

Kehren wir nun zu der linearen Gleichung zurück, in welcher die Coefficienten der Differentialquotienten von y Constanten sind, so haben wir jetzt ein **particuläres Integral** der Gleichung

$$f(D)\, y = V,$$

in welcher V eine Function von x ist, zu suchen. Lösen wir sie nach der Methode der Operationssymbole, so erhalten wir:

$$y = \frac{1}{f(D)}\, V,$$

und die Auswerthung der rechten Seite wird einen Werth von y liefern, der der Gleichung genügt.

In einigen besonderen Fällen macht die Form von V diese Auswerthung leicht; wir wollen einige derselben, welche am häufigsten vorkommen, erwähnen.

I. Es möge V eine rationale algebraische ganze Function von x sein, und es möge angenommen werden, dass die höchste Potenz von x in V die $n$te sei. Um das particuläre Integral zu finden, müssen wir $\frac{1}{f(D)}$ nach steigenden Potenzen von D entwickeln, und da D^{n+1} sowie Operationszeichen von höherer Ordnung alle Glieder von V zu Null machen würden, so können wir in dieser Entwickelung alle Glieder über D^n hinaus weglassen. Wenn ferner in $f(D)$ die niedrigste Potenz von D die $k$te ist, dann wird die Entwickelung mit D^{-k} beginnen, und sie braucht nicht über D^n, d. i. $D^{-k+(n+k)}$, hinaus erstreckt zu werden; daher können in diesem Falle in $f(D)$ sogleich alle Glieder von höherer Ordnung als D^{n+k} vor der Entwickelung weggelassen werden.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$(D^2 - 4D + 4)\, y = x^2.$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{(2-D)^2}\, x^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(1 + 2\,\frac{D}{2} + 3\,\frac{D^2}{2^2}\right) x^2 \\ &= \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}, \end{aligned}$$

und die Complementär-Function ist:

$$e^{2x}(A + Bx).$$

Somit ist die Stammgleichung:

$$y = e^{2x}(A + Bx) + \frac{1}{8}(2x^2 + 4x + 3).$$

2. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$(D^4 - a^4)y = x^3.$$

Die Stammgleichung ist offenbar:

$$y = -\frac{x^3}{a^4} + Ae^{ax} + Be^{-ax} + C\cos(ax + \alpha).$$

3. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$(D^4 - 2D^3 + D^2)y = x^3.$$

$$y = \frac{1}{D^2(1-D)^2}x^3$$

$$= \frac{1}{D^2}(1 + 2D + 3D^2 + 4D^3 + 5D^4 + 6D^5)x^3,$$

wobei die Glieder bis zur fünften Potenz beibehalten sind (§. 46). Nun können $1 + 2D + \cdots$ und $\frac{1}{D^2}$ einzeln als Operationszeichen betrachtet werden. Operirt man zunächst mit dem ersteren und beachtet man, dass nur ein particuläres Integral verlangt wird, so dass also bei $\frac{1}{D^2}$ keine Constanten hinzugesetzt zu werden brauchen, so ist der Werth für y:

$$\frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{2} + 3x^3 + 12x^2.$$

Operirt man jedoch mit $\frac{1}{D^2}$ zuerst (oder auch, löst man das zweite Operationszeichen, indem man jedes Glied mit $\frac{1}{D^2}$ multiplicirt, in einzelne Theile auf, so dass dasselbe in

$$\frac{1}{D^2} + \frac{2}{D} + 3 + 4D + 5D^2 + 6D^3$$

übergeht), so würde man für y den Werth erhalten:

$$\frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{2} + 3x^3 + 12x^2 + 30x + 36.$$

Die Stammgleichung ist:

$$y = (A + Bx)e^x + C + Dx + \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{2} + 3x^3 + 12x^2,$$

und der scheinbar noch hinzuzufügende Theil des particulären Integrals, welches wir erhalten haben, wenn die Operationszeichen in der zweiten Weise genommen werden, ist offenbar in der Complementär-Function mit einbegriffen, da C und D willkürliche Constanten sind.

Es ist leicht zu sehen, dass im Allgemeinen nicht nur die Glieder von höherer Ordnung als D^{n+k} aus $f(D)$ ohne Weiteres weggelassen werden können, sondern dass auch in der Entwickelung selbst alle Glieder von höherer Ordnung denn D^n vernachlässigt werden dürfen, mag nun das nachher anzuwendende Operationszeichen D^{-k} von höherer oder niedrigerer Ordnung wie n sein. Ist im Besonderen V eine Constante, so braucht man nur die niedrigste Potenz beizubehalten.

4. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $(D^4 + 2D^3 + 3D^2 + 2D + 1)\, y = 1 + x + x^2.$

(2) $(D^3 + D^2 - D + 15)\, y = x^2.$

II. Dieselbe Methode kann auch, wenn V eine Exponentialfunction ist, zur Berechnung von y, oder, wenn V einen Exponentialfactor enthält, zur Vereinfachung des Verfahrens und somit zur Erleichterung der Berechnung angewendet werden. Im letzteren Falle können wir setzen:

$$V = e^{ax} X,$$

und sodann:

$$y = \frac{1}{f(D)} V = \frac{1}{f(D)} e^{ax} X$$

$$= e^{ax} \frac{1}{f(D+a)} X.$$

Ist X eine Constante, so kann nunmehr der Werth von y ohne Weiteres durch das vorhergehende Verfahren erhalten werden. Die Grösse a kann eine Wurzel von $f(z) = 0$ sein oder nicht. Wir nehmen an, dass sie eine r-fache Wurzel sei, so dass für eine einfache Wurzel $r = 1$ ist. Ist a keine Wurzel, so ist $r = 0$. Entwickelt man dann $f(D + a)$, so erhält man:

$$f(D+a) = \frac{D^r}{r!} f^{(r)}(a) + \frac{D^{r+1}}{(r+1)!} f^{(r+1)}(a) + \cdots,$$

wobei $f^{(\mu)}(a)$ den μten Differentialquotienten von $f(z)$ nach z, in welchem a für z gesetzt ist, bedeutet. Alsdann ergiebt sich für y

(mit Rücksicht auf die Bemerkung am Ende der 3. Aufgabe der letzten Seite):

$$y = e^{ax} \frac{1}{\frac{f^{(r)}(a)}{r!} D^r} C$$

$$= C \frac{e^{ax} x^r}{f^{(r)}(a)}.$$

Ist im Besonderen $r = 0$, so ist:

$$y = C \frac{e^{ax}}{f(a)}.$$

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$(D^2 + D + 1)\, y = e^{2x}.$$

Hier ist 2 keine Wurzel von $z^2 + z + 1 = 0$ und daher.

$$y = \frac{e^{2x}}{2^2 + 2 + 1} = \frac{1}{7} e^{2x},$$

und die Stammgleichung ist:

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(A \cos \frac{3^{\frac{1}{2}} x}{2} + B \sin \frac{3^{\frac{1}{2}} x}{2}\right) + \frac{1}{7} e^{2x}.$$

2. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$(D^2 - 4D + 3)\, y = 2e^{3x}.$$

Hier ist:

$$y = \frac{1}{(D-1)(D-3)} 2e^{3x}$$

$$= e^{3x} \frac{1}{D(D+2)} 2$$

$$= e^{3x} \frac{1}{2D} 2$$

$$= x e^{3x},$$

und die Stammgleichung ist:

$$y = A e^x + B e^{3x} + x e^{3x}.$$

3. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $(D - a)^n y = e^{ax}$.

(2) $(D^2 - 6D + 8)\, y = e^x + e^{2x}$.

4. Aufgabe. Die Gleichung $f(z) = 0$ besitzt n Wurzeln, nämlich $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Man bestimme das particuläre Integral der Gleichung:

$$f(D)\, y = e^{a_1 x} + e^{a_2 x} + \cdots + e^{a_n x},$$

und discutire den Fall, wo zwei der Wurzeln (a_1 und a_2) einander gleich sind.

Ist X eine rationale algebraische ganze Function von x und demnach entwickelbar nach Potenzen von x, so muss die Grösse

$$\frac{1}{f(D+a)} X$$

wie vorher in I. ausgewerthet werden.

5. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$(D^2 - 2D + 1)\, y = x^2 e^{3x}.$$

Hier ist:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{(D-1)^2} x^2 e^{3x} \\ &= e^{3x} \frac{1}{(D+2)^2} x^2 \\ &= e^{3x} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}\right), \end{aligned}$$

und die Stammgleichung ist:

$$y = (A + Bx) e^x + e^{3x} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}\right).$$

6. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$(D-2)^3 y = x^2 e^{2x}.$$

Hier ist:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{(D-2)^3} x^2 e^{2x} \\ &= e^{2x} \frac{1}{D^3} x^2 \\ &= \frac{1}{60} x^5 e^{2x}, \end{aligned}$$

und die Stammgleichung ist:

$$y = e^{2x} \left(A + Bx + Cx^2 + \frac{1}{60} x^5\right).$$

7. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $(D^2 + D + 1)^2\, y = x e^x.$

(2) $(D^4 - 1)^2\, y = x^4 e^x.$

III. Wir setzen voraus, dass V einen Sinus oder Cosinus als Factor enthält, so dass

$$V = X \cos(nx + \alpha)$$

ist, wobei n und α Constanten sind.

Dann haben wir zu berechnen:

$$y = \frac{1}{f(D)} X \cos(nx + \alpha).$$

Setzt man:

$$y_1 = \frac{1}{f(D)} X \sin(nx + \alpha),$$

so wird:

$$y + iy_1 = \frac{1}{f(D)} X e^{i(nx+\alpha)}$$

$$= e^{i(nx+\alpha)} \frac{1}{f(D + in)} X.$$

Es bleibt daher noch

$$\frac{1}{f(D + in)} X$$

zu berechnen übrig, was unter die eine oder die andere der gegebenen Regeln fallen kann. Ist $u + iv$ der Werth desselben, so erhalten wir, wenn wir die reellen und imaginären Theile gleichsetzen:

$$y = u \cos(nx + \alpha) - v \sin(nx + \alpha).$$

$$y_1 = u \sin(nx + \alpha) + v \cos(nx + \alpha).$$

In dem Falle, wo X eine Constante und $\cos nx$ kein Theil der Complementär-Function ist, so dass in nicht Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ ist, ist die Berechnung unmittelbar ausführbar, denn dann ist:

$$\frac{1}{f(D + in)} X = \frac{1}{f(in)} C.$$

Wäre indessen $\cos nx$ ein Theil der Complementär-Function, also in eine r-fache Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$, so würden wir wegen

$$f(D + in) = \frac{D^r}{r!} f^{(r)}(in) + \frac{D^{r+1}}{(r+1)!} f^{(r+1)}(in) + \cdots$$

erhalten:

$$\frac{1}{f(D + in)} C = \frac{Cx^r}{f^{(r)}(in)}.$$

Sodann trennen wir das Reelle und Imaginäre und setzen die reellen und imaginären Theile gleich, wie vorher.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2 y = x \cos ax.$$

Alsdann ist:

$$y = \frac{1}{D^2 + n^2} x \cos a x$$

$$= \Re \left(e^{axi} \frac{1}{(D + a i)^2 + n^2} \right)^{*)}$$

$$= \Re \left\{ e^{axi} \frac{1}{n^2 - a^2} \left(1 - \frac{2 a i}{n^2 - a^2} D \right) x \right\}$$

$$= \Re \left\{ e^{axi} \left(\frac{x}{n^2 - a^2} - \frac{2 a i}{(n^2 - a^2)^2} \right) \right\}$$

$$= \frac{x \cos a x}{n^2 - a^2} + \frac{2 a \sin a x}{(n^2 - a^2)^2}.$$

2. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \cos x.$$

Alsdann ist:

$$y = \frac{1}{D^2 + 1} \cos x$$

$$= \Re \left(e^{xi} \frac{1}{(D + i)^2 + 1} 1 \right)$$

$$= \Re \left(e^{xi} \frac{1}{2 i D + D^2} 1 \right)$$

$$= \Re \left(e^{xi} \frac{x}{2 i} \right)$$

$$= \frac{x}{2} \sin x,$$

und die Stammgleichung ist:

$$y = A \cos x + B \sin x + \frac{1}{2} x \sin x.$$

3. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$\varphi(D) y = \cos n x,$$

wenn $\cos n x$ kein Theil der Complementär-Function ist.

Setzt man:

$$\varphi(D) = \varphi_1(D^2) + D \varphi_2(D^2),$$

---

*) $\Re$ deutet an, dass der reelle Theil des nachfolgenden Ausdrucks genommen werden soll. Anm. d. Uebers.

so ist:

$$y = \frac{1}{\varphi_1(D^2) + D\varphi_2(D^2)} \cos nx$$

$$= \frac{1}{\varphi_1(-n^2) + D\varphi_2(-n^2)} \cos nx$$

$$= \frac{\varphi_1(-n^2) - D\varphi_2(-n^2)}{\{\varphi_1(-n^2) + D\varphi_2(-n^2)\}\{\varphi_1(-n^2) - D\varphi_2(-n^2)\}} \cos nx$$

$$= \frac{\varphi_1(-n^2)\cos nx + n\varphi_2(-n^2)\sin nx}{\{\varphi_1(-n^2)\}^2 + n^2\{\varphi_2(-n^2)\}^2}.$$

Wenn jedoch $\cos nx$ ein Theil der Complementär-Function ist, so wird der Nenner verschwinden und das particuläre Integral scheinbar unendlich gross werden. Jedoch ist es bloss ein Theil der Complementär-Function, der mit einer unendlich grossen Constanten multiplicirt ist, die in die willkürliche Constante aufgenommen werden kann. Um das particuläre Integral zu bestimmen, würde es ausreichend sein, den Werth von

$$\frac{1}{\varphi_1(D^2) + D\varphi_2(D^2)} \cos(n+h)x$$

zu berechnen, indem man den unendlich werdenden Theil (wenn h gleich Null gesetzt wird) mit der Complementär-Function zusammennimmt und den endlichen Theil als das particuläre Integral beibehält. Es ist indessen in solchen Fällen besser, das frühere Verfahren anzuwenden; in der That verdient die jetzige Methode nur im Falle von Aufgaben, die der eben behandelten analog sind, den Vorzug.

4. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin nx$ (sowohl für $n = 1$, wie für n nicht gleich 1).

(2) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = \sin 2x$.

(3) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{3^{\frac{1}{2}}x}{2}$.

(4) $\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^2 \cos ax$ (sowohl für $a = 1$, wie für a nicht gleich 1).

(5) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = x \sin^2 x$.

(6) $(D^2 + m^2)^r y = (1-x)^2 \cos mx$.

(7) $(D^2 - 2D + 4)^2 y = x e^x \cos(3^{\frac{1}{2}}x + \alpha)$.

(8) $\frac{d^2y}{dx^2} + \varkappa \frac{dy}{dx} + n^2 y = E \cos px$.

(9) $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{dy}{dx} + 4y = e^x \cos x.$

(10) $\frac{d^4y}{dx^4} + n^4y = \sin \lambda x + e^{\mu x} + x^5.$

(11) $\{D^4 + (m^2 + n^2) D^2 + m^2 n^2\} y = \cos \frac{1}{2} (m + n) x \cos \frac{1}{2} (m - n) x.$

(12) $\frac{d^6y}{dx^6} + y = \sin \frac{3}{2} x \sin \frac{1}{2} x.$

IV. Enthält V eine Potenz von x als Factor, so dass wir

$$V = x^m T$$

setzen können, so können wir zur Bestimmung des particulären Integrals die erweiterte Form des Leibnitz'schen Theorems (§. 35) anwenden.

So ist:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{f(D)} x^m T \\ &= x^m \frac{1}{f(D)} T + m x^{m-1} \left\{\frac{d}{dD} \frac{1}{f(D)}\right\} \\ &\qquad + \frac{m(m-1)}{2!} x^{m-2} \left\{\frac{d^2}{dD^2} \frac{1}{f(D)}\right\} T + \cdots, \end{aligned}$$

wo die Reihe bis zum $(m + 1)$ten Gliede fortzusetzen ist. Jedes dieser Glieder lässt die Bestimmung einer Grösse übrig, was vermittelst der Methoden eines der vorhergehenden Abschnitte geschehen kann. Ist dies nicht möglich, so kann der Werth der Grösse mit Hülfe der folgenden **Methode, die von allgemeiner Anwendung** ist, gefunden werden. Der Erfolg dieser allgemeinen Methode hängt allein ab von der Lösung einer Gleichung, deren Lösung auch erforderlich ist, um die Complementär-Function zu erhalten, und von der Integration dabei sich ergebender Ausdrücke.

V. Wir setzen voraus, dass alle Factoren, welche in V vorkommen und durch eine oder die andere der vorhergehenden Methoden behandelt werden können, vor das Operationszeichen gebracht sind, und dass die übrigbleibende Grösse unter keinen von jenen Abschnitten fällt, so dass wir Ausdrücke von der Form

$$\frac{1}{\psi(D)} U$$

zu berechnen haben.

Wir denken uns $\frac{1}{\psi(D)}$ in Partialbrüche zerlegt, von denen jeder als Nenner einen linearen Factor von $\psi(D)$ besitzt, und in

denen die auftretenden Constanten nicht nothwendig reell sind; dann werden die Brüche von der Form sein:

$$\frac{A_n}{(D-\alpha)^n},$$

worin n eine ganze Zahl, A_n und α Constanten und α eine Wurzel der Gleichung $\psi(z) = 0$ ist. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\psi(D)} U &= \Sigma \frac{A_n}{(D-\alpha)^n} U \\ &= \Sigma e^{\alpha x} \frac{A_n}{D^n} e^{-\alpha x} U \\ &= \Sigma A_n e^{\alpha x} \int\int \cdots e^{-\alpha x} U dx^n.\end{aligned}$$

Wenn in irgend einem Ausdrucke imaginäre Grössen vorkommen, so werden in einem anderen die conjugirten imaginären Grössen auftreten; zwei solche zusammengehörige Ausdrücke müssen im Allgemeinen mit einander vereinigt werden, damit in dem expliciten Ausdrucke des particulären Integrals keine imaginäre Grösse mehr übrig bleibt.

1. Aufgabe.

$$(D^2 - 5D + 6)\, y = \log x.$$

Wir erhalten:

$$\frac{1}{D^2 - 5D + 6} = \frac{1}{D-3} - \frac{1}{D-2}.$$

Daher ist das particuläre Integral:

$$\frac{1}{D-3} \log x - \frac{1}{D-2} \log x = e^{3x} \int e^{-3x} \log x\, dx - e^{2x} \int e^{-2x} \log x\, dx,$$

und die Complementär-Function ist:

$$A e^{2x} + B e^{3x}.$$

2. Aufgabe. In der vorhergehenden Aufgabe möge die rechte Seite $x \log x$ anstatt x heissen; alsdann können wir entweder die theilweise Integration oder die Erweiterung des Leibnitz'schen Theorems anwenden. Die letztere giebt:

$$\begin{aligned}y = x \frac{1}{D-3} \log x - \frac{1}{(D-3)^2} \log x - x \frac{1}{D-2} \log x + \frac{1}{(D-2)^2} \log x \\ = x e^{3x} \int e^{-3x} \log x\, dx - e^{3x} \int\int e^{-3x} \log x\, dx^2 - x e^{2x} \int e^{-2x} \log x\, dx \\ + e^{2x} \int\int e^{-2x} \log x\, dx^2.\end{aligned}$$

3. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2 y = U,$$

in welcher U eine Function von x ist.

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{D^2 + n^2} U \\ &= \frac{1}{2in}\left\{\frac{1}{D - in} U - \frac{1}{D + in} U\right\} \\ &= \frac{1}{2in}\left\{e^{inx}\int U e^{-inx}\, dx - e^{-inx}\int U e^{inx}\, dx\right\}, \end{aligned}$$

oder, wenn wir die Veränderliche unter dem Integralzeichen ändern:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2in}\int^x U_\xi \left\{e^{in(x-\xi)} - e^{-in(x-\xi)}\right\} d\xi \\ &= \frac{1}{n}\int^x U_\xi \sin n(x - \xi)\, d\xi, \end{aligned}$$

worin U_ξ dieselbe Function von ξ wie U von x ist.

Es giebt noch eine andere, von dieser verschiedene Methode, diese Gleichung zu integriren. Multiplicirt man beiderseits mit $\sin nx$, so ist:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\sin nx - ny\cos nx\right) = U \sin nx,$$

und daher:

$$\frac{dy}{dx}\sin nx - ny\cos nx = -An + \int^x U_\xi \sin n\xi\, d\xi.$$

Multiplicirt man die ursprüngliche Gleichung mit $\cos nx$ und schreibt sie dann in der entsprechenden Form, so findet man analog das Integral:

$$\frac{dy}{dx}\cos nx + ny \sin nx = Bn + \int^x U_\xi \cos n\xi\, d\xi.$$

Eliminirt man $\frac{dy}{dx}$ zwischen diesen beiden, so erhält man:

$$y = A\cos nx + B\sin nx + \frac{1}{n}\int^x U_\xi \sin n(x - \xi)\, d\xi,$$

übereinstimmend mit dem ersteren Resultat.

4. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2 y = x^2 \cos a x \quad (\text{für } n \gtrless a \text{ und für } n = a).$$

(2) $$\frac{d^2y}{dx^2} - n^2 y = U \quad (\text{wo } U \text{ irgend eine Function von } x \text{ ist}).$$

(3) $$\frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 4x^2 e^{x^2}.$$

5. Aufgabe. Mit Hülfe von (3) in der 4. Aufgabe beweise man, dass

$$\sqrt{2}\, e^{x\sqrt{2}} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{x} x^2 e^{x^2 - x\sqrt{2}}\, dx - \sqrt{2}\, e^{-x\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{x} x^2 e^{x^2 + x\sqrt{2}}\, dx = e^{x^2}$$

ist.

§. 47.

Wegen der nahen Verwandtschaft der linearen Gleichung mit constanten Coefficienten und der **homogenen linearen Gleichung** kann die letztere hier mitbehandelt werden. Dieselbe lässt sich in der Form schreiben:

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_{n-1} x \frac{dy}{dx} + A_n y = V,$$

worin V eine Function von x allein ist und auch eine Constante C sein kann.

Im letzteren Falle kann man das particuläre Integral sofort bestimmen; es ist offenbar:

$$\frac{1}{A_n} C.$$

Wird das Operationszeichen $x \frac{d}{dx}$ durch ϑ bezeichnet, so ist (§. 37):

$$x^m \frac{d^m}{dx^m} = \vartheta(\vartheta - 1)(\vartheta - 2) \ldots (\vartheta - m + 1),$$

und die Differentialgleichung kann wie folgt geschrieben werden:

$$F(\vartheta)\, y = V.$$

Betrachten wir die beiden Theile der Stammgleichung gesondert, so ist die Complementär-Function das Integral von

$$F(\vartheta)\, y = 0.$$

Wie wir bereits gesehen haben, ist nun:

$$F(\vartheta)\, x^p = F(p)\, x^p.$$

Hieraus folgt, dass, wenn p so gewählt wird, dass

$$F(p) = 0$$

ist, alsdann x^p eine Lösung der Gleichung ist; und sind $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die Wurzeln von $F(z) = 0$, so ist die Complementär-Function:

$$y = A_1 x^{p_1} + A_2 x^{p_2} + \cdots + A_n x^{p_n}.$$

Der Fall gleicher Wurzeln ist bereits (§. 45) discutirt worden; sind zwei Wurzeln imaginär, etwa p_1 und p_2, so dass

$$p_1 = \alpha + i\beta, \; p_2 = \alpha - i\beta$$

ist, so wird der entsprechende Werth von y sein:

$$x^\alpha \{A_1' \cos(\beta \log x) + A_2' \sin(\beta \log x)\},$$

wo die willkürlichen Constanten geändert sind.

Aufgabe. Sind die imaginären Wurzeln $\alpha \pm i\beta$ r-fache Wurzeln, so wird der zugehörige Theil der Complementär-Function sein:

$$x^\alpha \{[A_1' + A_2' \log x + A_3' (\log x)^2 + \cdots + A'_r (\log x)^{r-1}] \cos(\beta \log x)$$
$$+ [B' + B_2' \log x + B_3' (\log x)^2 + \cdots + B'_r (\log x)^{r-1}] \sin(\beta \log x)\}.$$

§. 48.

Das particuläre Integral ist der Werth von

$$\frac{1}{F(\vartheta)} V.$$

Die Auswerthung dieses Ausdrucks kann auf zwei Wegen geschehen, die in Wirklichkeit äquivalent sind, abgesehen von dem Unterschiede in den angewendeten Operationszeichen.

Ist V entweder eine Potenz von x oder enthält sie eine solche, etwa x^m, als Factor, so ist:

$$y = \frac{1}{F(\vartheta)} x^m T$$
$$= x^m \frac{1}{F(\vartheta + m)} T.$$

In dem Falle, wo T eine Constante ist, ist die Berechnung des Werthes leicht. Ist m nicht eine Wurzel von $F(z) = 0$, so können wir $\{F(\vartheta + m)\}^{-1}$ nach aufsteigenden Potenzen von ϑ entwickeln und alle Glieder weglassen mit Ausnahme des ersten, welches von ϑ unabhängig ist und in der That giebt:

$$y = \frac{Cx^m}{F(m)}.$$

Dieselbe Methode (der Entwickelung) kann angewendet werden, wenn T eine rationale ganze algebraische Function von $\log x$ ist; und wegen

$$\vartheta \log x = 1$$

braucht die Entwickelung nicht über ϑ^n hinaus erstreckt zu werden, wobei n der Exponent der höchsten Potenz von $\log x$ in T ist.

Ist jedoch m eine r-fache Wurzel von $F(z) = 0$, so ist:

$$F(\vartheta + m) = \frac{\vartheta^r}{r!} F^{(r)}(m) + \frac{\vartheta^{r+1}}{(r+1)!} F^{(r+1)}(m) + \cdots,$$

und es bleibt zu bestimmen der Werth von

$$y = \frac{1}{\frac{\vartheta^r}{r!} F^{(r)}(m) + \cdots} T.$$

Ist T eine Constante C, so ist wegen

$$\frac{1}{\vartheta} 1 = \log x$$

der Werth von y:

$$\frac{C(\log x)^r}{F^{(r)}(m)}.$$

Ist es eine Function von $\log x$ wie vorher, so wird das Operationssymbol nach steigenden Potenzen von ϑ bis zu ϑ^n (während ϑ^r im Nenner stehen bleibt) entwickelt, und der Werth von y wird gegeben als die Summe einer Anzahl von Gliedern von der Form:

$$\frac{1}{\vartheta^r} (\log x)^s,$$

d. h. einer Anzahl von Gliedern von der Form:

$$\frac{s!}{(s+r)!} (\log x)^{s+r}.$$

Ein allgemeiner Ausdruck lässt sich für das particuläre Integral in dem Falle angeben, wenn V keine von diesen Formen besitzt. Denkt man sich $\frac{1}{F(\vartheta)}$ in Partialbrüche zerlegt und nimmt man an, dass irgend ein Glied

$$\frac{A}{\vartheta - \alpha}$$

sei, so wird y die Summe von Gliedern von der Form sein:

$$\frac{A}{\vartheta - \alpha} V,$$

und diese ist äquivalent mit

$$A x^{\alpha} \frac{1}{\vartheta} V x^{-\alpha} \quad \text{oder} \quad A\, x^{\alpha} \int V x^{-\alpha-1}\, d\, x.$$

Ein anderes Verfahren besteht darin, dass man für die unabhängige Veränderliche x eine andere z einführt durch die Gleichung $x = e^z$. Dadurch verwandelt sich ϑ in $\frac{d}{d\,z}$ oder D, und es werden die sämmtlichen Methoden des §. 46 anwendbar. Es ist leicht zu sehen, dass die sämmtlichen für ϑ angegebenen Fälle genau analog sind zu den Fällen, welche wir für D angeführt haben.

Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} - 4 x \frac{d y}{d x} + 6 y = x.$

(2) $x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} - x \frac{d y}{d x} + 2 y = x \log x.$

(3) $x^3 \frac{d^3 y}{d x^3} - x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} + 2 x \frac{d y}{d x} - 2 y = x^3 + 3 x.$

(4) $x^4 \frac{d^4 y}{d x^4} + 6 x^3 \frac{d^3 y}{d x^3} + 9 x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} + 3 x \frac{d y}{d x} + y = (1 + \log x)^2.$

(5) $x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} - 3 x \frac{d y}{d x} + 4 y = 2 x^2.$

(6) $x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} - 2 y = x + \cos x.$

(7) $x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} - (2 m - 1) x \frac{d y}{d x} + (m^2 + n^2) y = n^2 x^m \log x.$

Vermischte Aufgaben.

1. Wenn es zwei lineare Differentialgleichungen von den Ordnungen m und $n\,(n > m)$ giebt, welche durch dieselbe abhängige Veränderliche befriedigt werden, so lässt sich aus den ersten beiden eine dritte lineare Gleichung von der $(n - m)$ten Ordnung ohne irgend eine Integration ableiten, und die Gleichungen von der Ordnung m und $n - m$ werden (wenn integrirt) genügen, um das Integral der Gleichung von der Ordnung n zu liefern. (Liouville.)

2. Man löse die Gleichungen:

(α) $\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{2}{x} \frac{d y}{d x} = n^2 y.$

(β) $\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{2}{x} \frac{d y}{d x} = \left(n^2 + \frac{2}{x^2}\right) y.$

(γ) $\frac{d^2 y}{d x^2} + y = \sin x \sin 2 x.$

3. Man beweise, dass die Lösung von

$$(D + c)^n y = \cos a x$$

dargestellt wird durch:

$$y = e^{-cx}(A_1 + A_2 x + \cdots + A_n x^{n-1}) + (c^2 + a^2)^{-\frac{n}{2}} \cos\left(a x - n \operatorname{arc} \cot \frac{c}{a}\right).$$

4. Man bestimme die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d t^2} + k \frac{dy}{dt} + n^2 y = U$$

in der Form:

$$y = e^{-\frac{1}{2} k t} (A \cos n' t + B \sin n' t) + \frac{1}{n'} \int_0^t e^{-\frac{1}{2} k (t - t')} \sin n' (t - t')\, U' \, d t',$$

worin U′ dieselbe Function von t' wie U von t und n' durch die Gleichung gegeben ist:

$$n'^2 = n^2 - \frac{1}{4} k^2.$$

5. Man löse die Gleichungen:

(1) $$x^4 \frac{d^4 y}{d x^4} + 6 x^3 \frac{d^3 y}{d x^3} + 4 x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} - 2 x \frac{d y}{d x} - 4 y = x^2 + 2 \cos(\log x).$$

(2) $$\frac{d^4 y}{d x^4} - 12 \frac{d^2 y}{d x^2} + 12 y = 16 x^4 e^{x^2}.$$

(3) $$\frac{d^4 y}{d x^4} + 32 \frac{d y}{d x} + 48 y = x e^{-2x} + e^{2x} \cos 2^{3/2} x.$$

(4) $$\frac{d^3 y}{d x^3} - 3 \frac{d^2 y}{d x^2} + 4 \frac{d y}{d x} - 2 y = e^x + \cos x.$$

(5) $$\frac{d^4 y}{d x^4} + \frac{d^2 y}{d x^2} + y = a x^2 + b e^{-x} \sin 2 x.$$

(6) $$\left(\frac{d}{d x} + 1\right)^3 y = e^{-x} + x^2 + x^{-1}.$$

6. Man bestimme die Complementärfunction der Gleichung

$$\frac{d^{2n} y}{d x^{2n}} - a^{2n} y = f(x)$$

in der Form:

$$y = C e^{ax} + D e^{-ax} + \sum_{r=1}^{r=n-1} e^{a x \cos \frac{r\pi}{n}} \left\{ A_r \cos\left(a x \sin \frac{r\pi}{n}\right) + B_r \sin\left(a x \sin \frac{r\pi}{n}\right) \right\}$$

und zeige, dass der Theil des particulären Integrals, welcher dem allgemeinen Gliede unter dem Summationszeichen entspricht, lautet:

$$\frac{1}{n a^{2n-1}} \int^x e^{a(x-\xi) \cos \frac{r\pi}{n}} \cos \left\{ \frac{r\pi}{n} + a(x - \xi) \sin \frac{r\pi}{n} \right\} f(\xi)\, d\xi.$$

7. Man beweise, dass die Lösung der Gleichung

$$\left(\cos \frac{d}{d x}\right) y = \cos x$$

lautet:

$$y = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ A_n e^{(n+\frac{1}{2})\pi x} + B_n e^{-(n+\frac{1}{2})\pi x} \right\} + \frac{2 \cos x}{e + e^{-1}}.$$

8. Man beweise, dass, wenn $x \dfrac{d}{dx}$ mit ϑ bezeichnet wird,

$$\frac{(\vartheta - n)!}{\vartheta !} \, 0 = A_0 + A_1 x + \cdots + A_{n-1} x^{n-1}$$

ist, worin $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ willkürliche Constanten sind.

9. Man beweise die Gleichungen:

(1) $2^{2n+1} D^n x^{n+\frac{1}{2}} D^{n+1} e^{x^{\frac{1}{2}}} = e^{x^{\frac{1}{2}}}$.

(2) $D^m x^{m+r} D^r x^{-m} D^{n-r} \varphi(x) = x^r D^{m+n} \varphi(x)$.

(3) $D^n (\vartheta - n)^r y = \vartheta^r D^n y$.

Viertes Capitel.

Vermischte Methoden.

§. 49.

Bevor wir die lineare Gleichung zweiter Ordnung mit veränderlichen Coefficienten discutiren, halten wir es für gut, einige **vermischte Methoden** zu betrachten. Dieselben lassen sich anwenden auf Systeme von Gleichungen, die entweder eine vollständige Lösung zulassen, oder doch dadurch, dass man ein erstes Integral finden kann, der Lösung näher gebracht werden können. Es ist zu bemerken, dass die hernach gegebenen Gleichungen typisch sind und nicht bloss vereinzelte Gleichungen darstellen, die sich integriren lassen. Es ist sehr oft möglich, andere Gleichungen unter irgend eine der folgenden Classen einzureihen mit Hülfe von geschickt gewählten Substitutionen sei es für die abhängige, sei es für die unabhängige Veränderliche. Derartige Substitutionen bestimmen jedoch die Grenzen, innerhalb deren die Methoden meistentheils zum Ziele führen, so dass man stets im Gedächtniss behalten muss, dass die Methoden nicht allgemeine Anwendung auf alle linearen Gleichungen zweiter Ordnung haben.

§. 50.

Der einfachste Fall von allen ist der, in welchem die Gleichung die Form besitzt:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = X,$$

wobei X eine Function von x allein ist. Dieselbe lässt sich ohne Weiteres integriren, und das Resultat der Integration ist:

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int X dx + A_1,$$

wo A_1 eine willkürliche Constante bezeichnet. Eine zweite Integration giebt:

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int dx \int X dx + A_1 x + A_2,$$

wo A_2 eine andere willkürliche Constante ist. Geht man in dieser Weise weiter, so findet man nach n Integrationen als die allgemeine Lösung:

$$y = \int\int \ldots X(dx)^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \cdots + B_{n-1} x + B_n,$$

worin B_r für $\frac{A_r}{(n-r)!}$ steht und demnach eine willkürliche Constante ist.

§. 51.

Eine andere sehr einfache Gleichung, die wir betrachten müssen, ist:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = Y,$$

worin Y eine Function von y allein ist; dieselbe lässt sich aber allgemein nur integriren, wenn n gleich 1 oder 2 ist. Im Falle $n = 2$ multiplicire man die Gleichung mit $2\frac{dy}{dx}$; dann lässt sich jede Seite integriren, und man erhält:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int Y dy + A,$$

oder etwa:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \psi(y) + A.$$

In dieser Gleichung lassen sich die Veränderlichen separiren, und die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = Y$$

ist schliesslich:

$$\int \frac{dy}{\{\psi(y) + A\}^{1/2}} = x + B.$$

Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 y = 0.$$

Ein erstes Integral ist:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a^2 y^2 = A = a^2 c^2,$$

wo c eine willkürliche Constante ist. Die Separation der Veränderlichen giebt:

$$\frac{dy}{(c^2 - y^2)^{1/2}} = a\,dx,$$

und daher:

$$arc\,sin\frac{y}{c} = ax + \alpha \quad \text{oder} \quad y = c\,sin(ax + \alpha).$$

§. 52.

Jede Differentialgleichung, welche nur eine Beziehung zwischen Differentialquotienten, deren Ordnungen sich um eine oder zwei Einheiten unterscheiden, ausdrückt, lässt eine Lösung zu. Als Typus der Differentialgleichung in dem Falle, wo die Ordnungen um eine Einheit verschieden sind, kann man setzen:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(\frac{d^{n-1}y}{d\,x^{n-1}}\right).$$

Setzt man:

$$\frac{d^{n-1}y}{d\,x^{n-1}} = Y,$$

so geht die Gleichung über in:

$$\frac{dY}{dx} = F\,(Y),$$

deren Integral ist:

$$\psi\,(Y) = \int\frac{d\,Y}{F(Y)} = x + A.$$

Nehmen wir an, dass diese Gleichung nach Y aufgelöst werden könne und dass die Lösung sei:

$$Y = \varphi\,(x + A),$$

so ist:

$$\frac{d^{n-1}y}{d\,x^{n-1}} = \varphi\,(x + A).$$

Dies ist alsdann einer der bereits discutirten Fälle (§. 50), deren allgemeines Integral sich bestimmen lässt.

Wir können auch, nachdem wir die Gleichung $\psi\,(Y) = x + A$ erhalten haben, folgendermaassen fortfahren: Da

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-2}y}{d\,x^{n-2}}\right) = Y$$

ist, so wird:

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int Y dx = \int \frac{Y dY}{F(Y)}.$$

In analoger Weise:

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int dx \int \frac{Y dY}{F(Y)} = \int \frac{dY}{F(Y)} \int \frac{Y dY}{F(Y)},$$

u. s. w. bis:

$$y = \int \frac{dY}{F(Y)} \int \frac{dY}{F(Y)} \cdots \int \frac{Y dY}{F(Y)},$$

wobei nach jeder der Integrationen, welche in der Reihenfolge von rechts nach links ausgeführt werden müssen, eine willkürliche Constante einzuführen ist. Wir erhalten dann zwei Gleichungen zwischen x, y, Y, aus denen Y eliminirt werden kann; die sich so ergebende Gleichung wird die Stammgleichung sein.

Es ist ersichtlich, dass durch diese Methode auch die Gleichung

$$f\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0$$

gelöst werden kann.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$a \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Setzt man:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \xi,$$

so ist:

$$a \frac{d\xi}{dx} = \xi,$$

und hiervon ist das Integral:

$$\xi = A' e^{\frac{x}{a}}.$$

Somit:

$$y = A e^{\frac{x}{a}} + Bx + C,$$

worin A, B, C willkürliche Constanten sind.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$(1) \qquad a \frac{d^2 y}{dx^2} = \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{1/2}.$$

$$(2) \qquad -a \frac{d^2 y}{dx^2} = \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}.$$

$$(3) \qquad a^3 \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{d^2 y}{dx^2} = \left\{1 + c^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2\right\}^{1/2}.$$

§. 53.

Als einen Typus der Differentialgleichungen, welche Differentialquotienten, deren Ordnungen um zwei Einheiten verschieden sind, mit einander in Beziehung setzen, können wir annehmen:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}}\right).$$

Setzt man:

$$\frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}} = z,$$

so geht die Gleichung über in:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = f(z),$$

deren Lösung in der Form erhalten worden war:

$$\int \frac{dz}{\{A + 2\int f(z)\, dz\}^{1/2}} = x + B.$$

Wenn die Gleichung, nachdem die Integrationen ausgeführt worden sind, algebraisch aufgelöst werden kann nach z, etwa:

$$z = \vartheta(x),$$

(wobei die Function $\vartheta(x)$ die Constanten A und B enthalten wird), so werden $n - 2$ directe Integrationen die Stammgleichung liefern. Sollte aber die Ausführung dieser algebraischen Auflösung unmöglich sein, so haben wir:

$$\frac{dz}{dx} = \{A + 2\int f(z)\, dz\}^{1/2},$$

daher:

$$\frac{d^{n-3} y}{d x^{n-3}} = \int z\, dx = \int \frac{z\, dz}{\{A + 2\int f(z)\, dz\}^{1/2}},$$

$$\frac{d^{n-4} y}{d x^{n-4}} = \int \frac{dz}{\{A + 2\int f(z)\, dz\}^{1/2}} \int \frac{z\, dz}{\{A + 2\int f(z)\, dz\}^{1/2}}$$

u. s. w. Schliesslich werden wir y als eine Function von z erhalten und die Stammgleichung wird das Resultat der Elimination von z aus der Gleichung zwischen y und z und der Gleichung zwischen x und z sein.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$a^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Schreiben wir z für $\frac{d^2 y}{d x^2}$, so geht die Gleichung über in:

$$a^2 \frac{d^2 z}{d x^2} = z,$$

so dass sich ergiebt:

$$z = c_1 e^{\frac{x}{a}} + c_2 e^{-\frac{x}{a}},$$

und daher:

$$y = A e^{\frac{x}{a}} + B e^{-\frac{x}{a}} + C x + D,$$

worin A und B respective für $c_1 a^2$ und $c_2 a^2$ gesetzt sind.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$(1) \quad x^2 \frac{d^4 y}{d x^4} = \lambda \frac{d^2 y}{d x^2}.$$

$$(2) \quad c^2 \frac{d^3 y}{d x^3} = \frac{d y}{d x} \left\{1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2\right\}^2.$$

§. 54.

In einigen besonderen Fällen lässt sich die allgemeine Differentialgleichung **zweiter** Ordnung durch Substitution derart erniedrigen, dass sie zu einer Differentialgleichung **erster** Ordnung wird. Diese Fälle treten ein, wenn eine der Veränderlichen **nicht explicit** in der Gleichung vorkommt.

Wir betrachten zunächst eine Gleichung, in welcher x nicht vorkommt, so dass dieselbe geschrieben werden kann in der Form:

$$\psi\left(y, \frac{d y}{d x}, \frac{d^2 y}{d x^2}\right) = 0.$$

Setzt man $\frac{d y}{d x} = p$ und sodann $\frac{d^2 y}{d x^2} = p \frac{d p}{d y}$, so geht die Gleichung über in:

$$\psi\left(y, p, p \frac{d p}{d y}\right) = 0,$$

und dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung, aus welcher p als Function von y gefunden wird. Ist die Lösung:

$$p = f(y),$$

worin $f(y)$ eine willkürliche Constante enthält, so lassen sich die Veränderlichen separiren, da wir schreiben können:

$$\frac{d y}{f(y)} = d x.$$

Die Integration dieser Gleichung wird zu der Stammgleichung führen.

Sodann betrachten wir eine Gleichung, in welcher y nicht vorkommt, so dass dieselbe geschrieben werden kann in der Form:

$$\varphi\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

Setzt man $\frac{dy}{dx} = p$ und sodann $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, so wird die Gleichung transformirt in:

$$\varphi\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0,$$

und dies ist eine Gleichung erster Ordnung, aus welcher p als Function von x gefunden werden kann. Ist die Lösung:

$$p = F(x),$$

worin $F(x)$ eine willkürliche Constante enthält, und integriren wir diese, so erhalten wir als die Stammgleichung:

$$y = A + \int F(x)\, dx.$$

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$2(2a - y)\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Setzt man $\frac{dy}{dx} = p$, so wird die Gleichung transformirt in:

$$\frac{2p\frac{dp}{dy}}{1 + p^2} = \frac{1}{2a - y},$$

und das Integral dieser ist:

$$(1 + p^2)(2a - y) = \mu,$$

wo μ eine willkürliche Constante ist. Die Stammgleichung wird gegeben durch Berechnung des Werthes von

$$\int dy \left\{\frac{2a - y}{\mu - 2a + y}\right\}^{1/2} = x + B.$$

2. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$a^2\frac{d^2y}{dx^2} = 2x\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}.$$

Die Substitution $\frac{dy}{dx} = p$ transformirt die Gleichung in:

$$\frac{a^2}{(1 + p^2)^{3/2}} \frac{dp}{dx} = 2x.$$

Durch Integration giebt diese:

$$\frac{a^2 p}{(1 + p^2)^{1/2}} = x^2 + A,$$

und daher:

$$p^2 = \frac{(x^2 + A)^2}{a^4 - (x^2 + A)^2},$$

so dass die Stammgleichung lautet:

$$y = \int p\,dx = B + \int \frac{x^2 + A}{\{a^4 - (x^2 + A)^2\}^{1/2}}\,dx.$$

3. Aufgabe. Man integrire die Gleichungen:

(1) $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x \frac{dy}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} = a \frac{d^2y}{dx^2} \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{1/2}.$

(2) $ab \frac{d^2y}{dx^2} = \left\{y^2 + a^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{1/2}.$

(3) $y \frac{d^2y}{dx^2} + \left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right\}^{1/2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$

(4) $(1 + x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$

(5) $\frac{dy}{dx} + a^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 2ax \frac{d^2y}{dx^2}.$

(6) $(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 2.$

(7) $y \frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2 \log y.$

(8) $y(1 - \log y) \frac{d^2y}{dx^2} + (1 + \log y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$

Homogene Differentialgleichungen.

§. 55.

Es giebt gewisse Classen von Differentialgleichungen, in denen eine Art von Homogenität besteht. Die Lösung von diesen kann durch zweckmässige Transformationen von der Lösung von Gleichungen niedrigerer Ordnung abhängig ge-

macht werden. Die Homogenität besteht in Folgendem: Betrachtet man y als eine Grösse von n Dimensionen, während x von einer Dimension ist, so ist $\frac{dy}{dx}$, da es die Grenze von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist, von $n-1$ Dimensionen; ferner ist $\frac{d^2y}{dx^2}$, da es die Grenze von $\frac{\Delta p}{\Delta x}$ ist, von $n-2$ Dimensionen u. s. w. Die Gleichung heisst dann homogen, sobald die Glieder sämmtlich von denselben Dimensionen sind, wenn man den entsprechenden Grössen diese Dimensionen beilegt. Der einfachste Fall ist demnach der, in welchem n gleich 1 ist.

Es sei zunächst $n = 1$, so dass x und y beide als Grössen von einer Dimension betrachtet werden können. Setzt man dann $y = xz$ und $x = e^{\vartheta}$, so ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{d\vartheta} + z,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2z}{d\vartheta^2} + \frac{dz}{d\vartheta}\right) e^{-\vartheta}$$

u. s. w., und die resultirende Differentialgleichung wird eine Gleichung zwischen z und ϑ sein. Es ist nun zu bemerken, dass der Coefficient von ϑ im Exponenten der Exponentialgrösse überall, wo eine solche in irgend einem Differentialquotienten vorkommt, diejenige Zahl ist, welche die Dimensionen des Differentialquotienten angiebt, und daher wird, wenn die Substitution in der als homogen vorausgesetzten Differentialgleichung vorgenommen wird, der Coefficient von ϑ in der Exponentialgrösse für jedes Glied der Gleichung derselbe sein, und es wird demnach diese Exponentialgrösse ein Factor der Gleichung sein, der weggelassen werden kann. Die neue unabhängige Veränderliche ϑ wird nicht mehr explicit in der Gleichung vorkommen; die letztere wird somit von der bereits in §. 54 discutirten Art sein und wird sich in ihrer Ordnung um eine Einheit erniedrigen lassen.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \left\{m x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + n y^2\right\}^{1/2}.$$

Führt man die in §. 55 angegebene Substitution aus, so erhält man:

$$\frac{d^2z}{d\vartheta^2} + \frac{dz}{d\vartheta} = \left\{m \left(\frac{dz}{d\vartheta} + z\right)^2 + n z^2\right\}^{1/2}.$$

Setzt man $\frac{dz}{d\vartheta} = v$, so wird die Gleichung:

$$\frac{dv}{d\vartheta} + v = \{m(v+z)^2 + nz^2\}^{1/2},$$

oder, wenn $v = zs$ ist:

$$s^2 + \frac{ds}{d\vartheta} + s = \{m(1+s)^2 + n\}^{1/2},$$

und daher:

$$\frac{ds}{\{m(1+s)^2+n\}^{1/2} - s^2 - s} = d\vartheta.$$

Hierin sind die Veränderlichen separirt und die Gleichung kann integrirt werden.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$(1) \quad n\frac{d^2y}{dx^2}(x^2+y^2)^{1/2} = \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}.$$

$$(2) \quad nx^3\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{y - x\frac{dy}{dx}\right\}^2$$

$$(3) \quad x^4\frac{d^2y}{dx^2} = \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

Indem wir nun zu dem allgemeinen Falle übergehen, in welchem unter der Annahme, dass y von n Dimensionen sei, Homogenität besteht, setzen wir:

$$x = e^{\vartheta}, \quad y = x^n z = z e^{n\vartheta},$$

und erhalten:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dz}{d\vartheta} + nz\right)e^{(n-1)\vartheta}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{\frac{d^2z}{d\vartheta^2} + (2n-1)\frac{dz}{d\vartheta} + n(n-1)z\right\}e^{(n-2)\vartheta}$$

u. s. w. Es ist ersichtlich, dass der Coefficient von ϑ in dem Exponenten der Exponentialgrösse, welche in dem Ausdrucke eines jeden Differentialquotienten vorkommt, genau die Dimensionen dieses Differentialquotienten angiebt, und substituirt man diese Ausdrücke, so wird, wie vorher, die Exponentialgrösse sich wegheben, und es wird die Differentialgleichung, nachdem sie auf diese Weise in eine andere transformirt worden ist, in welcher die unabhängige Veränderliche explicit nicht mehr vorkommt, in ihrer Ordnung um eine Einheit erniedrigt werden können.

3. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2} = (x^3 + 2xy)\frac{dy}{dx} - 4y^2.$$

Dieselbe ist homogen, wenn man y als eine Grösse von zwei Dimensionen betrachtet, während x nur von einer Dimension ist. Daher setzen wir:

$$x = e^{\vartheta}, \quad y = x^2 z = z e^{2\vartheta},$$

und erhalten die Gleichung:

$$\frac{d^2 z}{d\vartheta^2} + 3\frac{dz}{d\vartheta} + 2z = (1+2z)\left(\frac{dz}{d\vartheta} + 2z\right) - 4z^2,$$

oder:

$$\frac{d^2 z}{d\vartheta^2} + 2(1-z)\frac{dz}{d\vartheta} = 0.$$

Ein erstes Integral wird gegeben durch:

$$\frac{dz}{d\vartheta} - (1-z)^2 = A,$$

und in diesem können die Veränderlichen separirt werden wie folgt:

$$\frac{dz}{A + (1-z)^2} = d\vartheta.$$

Das Integral dieser Gleichung wird verschieden sein (entweder eine inverse Kreisfunction oder ein Logarithmus) je nach dem Vorzeichen von A.

4. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$(1) \quad x^4 \frac{d^2 y}{dx^2} - x^3 \frac{dy}{dx} = x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4y^2.$$

$$(2) \quad x\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y^2.$$

Eine besondere Reihe von Fällen entsteht, wenn man n unendlich gross annimmt. Die Grössen $y, \frac{dy}{dx}, \cdots$ haben dann alle dieselben Dimensionen. Die einfachste Methode der Lösung besteht darin, dass man die Substitution anwendet:

$$y = e^{\int u\,dx}.$$

Die resultirende Gleichung zwischen x und y wird dann von einer Ordnung sein, die um eine Einheit niedriger ist, als die der gegebenen Gleichung.

5. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$(1) \quad a y \frac{d^2 y}{d x^2} + b \left(\frac{d y}{d x}\right)^2 = y \frac{d y}{d x} (c^2 + x^2)^{-1/2}.$$

$$(2) \quad x y \frac{d^2 y}{d x^2} - x \left(\frac{d y}{d x}\right)^2 = y \frac{d y}{d x} + b x \left(\frac{d y}{d x}\right)^2 (a^2 - x^2)^{-1/2}.$$

Exacte Differentialgleichungen.

§. 56.

Eine Differentialgleichung von der Form

$$f\left(\frac{d^n y}{d x^n}, \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}, \ldots, \frac{d y}{d x}, y, x\right) = 0$$

wird exact genannt, wenn, nachdem die linke Seite mit V bezeichnet worden ist, der Ausdruck $V dx$ das genaue Differential irgend einer Function U ist, die dann nothwendig die Form besitzt:

$$f_1\left(\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}, \ldots, \frac{d y}{d x}, y, x\right).$$

Wir betrachten zunächst eine **lineare exacte** Differentialgleichung, welche dargestellt werden kann durch:

$$P_n \frac{d^n y}{d x^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \cdots + P_1 \frac{d y}{d x} + P_0 y = P,$$

worin sämmtliche Coefficienten Functionen von x sind. Eine Gleichung von dieser Form wird im Allgemeinen nicht eine exacte Differentialgleichung sein, wir werden aber zeigen, dass die Gleichung, wenn eine gewisse Bedingung durch diese Grössen P erfüllt ist, einmal integrirt werden kann.

Bezeichnen wir der Bequemlichkeit wegen Differentiationen nach x durch Striche, so erhalten wir durch directe Integration:

$$\int P_0 y dx = \int P_0 y dx$$

$$\int P_1 \frac{dy}{dx} dx = -\int P_1' y dx + P_1 y$$

$$\int P_2 \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \int P_2'' y dx - P_2' y + P_2 y'$$

$$\int P_3 \frac{d^3 y}{dx^3} dx = -\int P_3''' y dx + P_3'' y - P_3' y' + P_3 y'',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und daher:

$$\int P\,dx = \int (P_0 - P_1' + P_2'' - P_3''' + \cdots)\,y\,dx$$
$$+ (P_1 - P_2' + P_3'' - \cdots)\,y$$
$$+ (P_2 - P_3' + P_4'' - \cdots)\,y'$$
$$+ (P_3 - P_4' + P_5'' - \cdots)\,y''$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$= \int Q_0\,y\,dx + Q_1\,y + Q_2\,y' + \cdots + Q_n \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

wobei die auf einander folgenden Coefficienten Q_0, Q_1, Q_2, ... dasselbe Bildungsgesetz befolgen. Im Besonderen ist:

$$Q_n = P_n$$
$$Q_{n-1} = P_{n-1} - P_n'.$$

Nun ist die **Integrabilitätsbedingung** offenbar die, dass kein Glied mehr übrig bleiben darf, welches ein Integral über y enthält; und die nothwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, dass

$$Q_0 = 0,$$

oder also

$$P_0 - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2P_2}{dx^2} - \cdots + (-1)^n \frac{d^nP_n}{dx^n} = 0$$

ist.

Ist diese Gleichung befriedigt, so ist das erste Integral:

$$Q_n \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q_{n-1} \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + Q_1\,y = \int P\,dx + A_1,$$

worin A_1 eine willkürliche Constante ist.

Wenn nun die Coefficienten Q die entsprechende Bedingung, nämlich

$$Q_1 - \frac{dQ_2}{dx} + \frac{d^2Q_3}{dx^2} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}Q_n}{dx^{n-1}} = 0$$

erfüllen, so ist die Gleichung noch einmal integrabel, und dies Verfahren kann so lange fortgesetzt werden, als die Coefficienten der in dieser Weise abgeleiteten auf einander folgenden Gleichungen die Integrabilitätsbedingung erfüllen.

1. Aufgabe. Die Gleichung

$$(ax^2 - bx)\frac{d^3y}{dx^3} + (cx - e)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = x$$

ist eine exacte Differentialgleichung; denn wir haben:

$$P_0 = 1,\quad P_1' = 1,\quad P_2'' = 0,\quad P_3''' = 0,$$

und demnach ist die Bedingungsgleichung erfüllt. Integrirt man jede Seite, so erhält man:

$$(a x^2 - b x)\frac{d^2 y}{d x^2} - \{(2 a - c) x + e - b\}\frac{d y}{d x}$$

$$+ (2 a - c + x) y = \frac{1}{2} x^2 + A.$$

In der Praxis ist es zuweilen leicht zu sehen, dass sich eine gegebene Gleichung integriren lässt. In manchen Fällen sind die Grössen P entweder von der Form $a x^m$ oder Summen von Ausdrücken von dieser Form; und $x^m \frac{d^n y}{d x^n}$ ist ein vollkommener Differentialquotient, wenn m kleiner als n ist. Denn integrirt man denselben partiell, so erhält man:

$$x^m \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} - m x^{m-1} \frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}} + m (m - 1) x^{m-2} \frac{d^{n-3} y}{d x^{n-3}} - \cdots$$

$$+ (-1)^m m! \frac{d^{n-m-1} y}{d x^{n-m-1}}.$$

Ist $n = m + 1$, so ist das letzte Glied $(-1)^m m!\, y$.

Wenden wir dies auf unser Beispiel an, so sehen wir, dass die Glieder, welche $\frac{d^3 y}{d x^3}, \frac{d^2 y}{d x^2}$ enthalten, vollkommene Differentialquotienten sind, und $x \frac{d y}{d x} + y$ ist $\frac{d}{d x}(x y)$, so dass die linke Seite ein vollständiger Differentialquotient und daher die Gleichung exact ist.

2. Aufgabe. Man beweise, dass die Gleichung in der 1. Aufgabe durch die vorher angeführte Methode nicht weiter integrirt werden kann.

3. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$(1) \quad x \frac{d^3 y}{d x^3} + (x^2 - 3) \frac{d^2 y}{d x^2} + 4 x \frac{d y}{d x} + 2 y = 0,$$

$$(2) \quad 2 x + y^2 + 2 x y \frac{d y}{d x} + x \frac{d^2 y}{d x^2} + x^2 \frac{d^3 y}{d x^3} = \frac{d y}{d x},$$

und zeige, dass die Gleichung

$$x^2 \frac{d^3 y}{d x^3} + 4 x \frac{d^2 y}{d x^2} + (x^2 + 2) \frac{d y}{d x} + 3 x y = 2$$

integrabel wird, wenn man sie mit einer gewissen Potenz von x multiplicirt. Man bestimme ihr Integral.

§. 57.

Die Methode, welche zur Integration **nicht linearer exacter** Differentialgleichungen angewendet wird, kann durch Betrachtung eines Beispiels veranschaulicht werden.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$y + 3x\frac{dy}{dx} + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \left(x^2 + 2y^2\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

In der Voraussetzung, dass dies eine exacte Differentialgleichung sei, können wir schreiben:

$$dU = (y + 3xp + 2yp^3)\,dx + (x^2 + 2y^2p)\,dp,$$

worin p für $\frac{dy}{dx}$ steht. Mit U_1 wollen wir den Werth von U bezeichnen, den dieses haben würde, wenn p die einzige Veränderliche wäre, so dass

$$U_1 = x^2p + y^2p^2$$

ist. Lässt man diese Einschränkungen wieder fallen, so ist:

$$dU_1 = (2xp + 2yp^3)\,dx + (x^2 + 2y^2p)\,dp,$$

und daher:

$$dU - dU_1 = (y + xp)\,dx = d(xy).$$

Dies giebt durch Integration:

$$U - U_1 = xy + A,$$

also:

$$U = x^2\frac{dy}{dx} + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy + A,$$

und daher ist das erste Integral:

$$x^2\frac{dy}{dx} + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy = C.$$

Die vorstehende Methode wird, wie man sieht, zu der folgenden **allgemeinen Regel** für die Integration einer exacten Differentialgleichung $n$ter Ordnung führen. Die Gleichung, welche aus einer Gleichung von der $(n-1)$ten Ordnung durch directe Differentiation ableitbar ist, wird $\frac{d^ny}{dx^n}$ nur **in der ersten Potenz** enthalten. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ist die Gleichung nicht exact.

Man schreibe die Gleichung in der Form $V = 0$ und integrire $V dx$, als ob $\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}$ die einzige Veränderliche, welche in V vorkommt, und $\frac{d^n y}{d x^n}$ ihr Differentialquotient wäre. Das Resultat möge U_1 heissen. Alsdann enthält $V dx - d U_1$ Differentialquotienten von y höchstens von der Ordnung $n - 1$; insofern dies ein exacter Differentialquotient ist, kann der höchste Differentialquotient von y, welcher vorkommt, nur in der ersten Potenz auftreten. Wiederholt man das Verfahren so oft als nöthig, so wird man schliesslich erhalten:

$$V dx - d U_1 - d U_2 - \cdots = 0,$$

und ein erstes Integral der gegebenen Gleichung ist:

$$U_1 + U_2 + \cdots = C.$$

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} - y x^2 \frac{dy}{dx} = x y^2,$$

$$(2) \quad x^2 \frac{d^3 y}{d x^3} + x \frac{d^2 y}{d x^2} + (2 x y - 1) \frac{dy}{dx} + y^2 = 0.$$

3. Aufgabe. Man zeige, dass die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{a^2 y}{(y^2 + x^2)^2} = 0$$

integrirbar wird, wenn man sie mit dem Factor $2 x^2 \frac{dy}{dx} - 2 x y$ multiplicirt. Daraus bestimme man ein erstes Integral und die Stammgleichung.

4. Aufgabe. Man integrire die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{\alpha y}{(\beta y^2 + \gamma + 2 \delta x + \varepsilon x^2)^2} = 0,$$

wenn man weiss, dass sie einen integrirenden Factor von der Form $X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 y$ besitzt. (Euler.)

Lineare Gleichung zweiter Ordnung.

§. 58.

Wir werden hier einige der Haupteigenschaften der linearen Differentialgleichung **zweiter Ordnung** beweisen;

jedoch wird die gegenwärtige Untersuchung nicht etwa die Discussion der allgemeinen linearen Gleichung zum grössten Theil anticipiren, da die hier bewiesenen Eigenschaften nur der Gleichung zweiter Ordnung zukommen.

Die allgemeine Form der Gleichung ist:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + P \frac{d y}{d x} + Q y = R,$$

worin P, Q, R Functionen von x oder auch nur constante Grössen sind.

Man substituire in der Gleichung für y einen Werth $v w$, wo v und w beides Functionen von x sind, die bis jetzt nur der Beschränkung unterliegen, dass ihr Product gleich y sein muss. Es ist dann:

$$w \frac{d^2 v}{d x^2} + \left(2 \frac{d w}{d x} + P w\right) \frac{d v}{d x} + \left(\frac{d^2 w}{d x^2} + P \frac{d w}{d x} + Q w\right) v = R.$$

Da wir zwischen v und w willkürlich eine Beziehung festsetzen oder bewirken können, dass eine von ihnen irgend eine Bedingung erfüllt, so wollen wir annehmen, dass es möglich sei, w so zu bestimmen, dass der Coefficient von v verschwindet, dass also die Gleichung besteht:

$$\frac{d^2 w}{d x^2} + P \frac{d w}{d x} + Q w = 0,$$

die, was zu beachten ist, die nämliche ist wie die ursprüngliche Gleichung, wenn man die rechte Seite gleich Null setzt. Wird nunmehr die Grösse w als bekannt betrachtet, so ist die umgeänderte Gleichung:

$$\frac{d^2 v}{d x^2} + \left(\frac{2}{w} \frac{d w}{d x} + P\right) \frac{d v}{d x} = \frac{R}{w},$$

so dass

$$w^2 \frac{d v}{d x} e^{\int P dx} = A + \int w R e^{\int P dx} d x,$$

und somit

$$v = B + A \int \frac{d x}{w^2} e^{-\int P dx} + \int \frac{d x}{w^2} e^{-\int P dx} \int w R e^{\int P dx} d x$$

ist.

Es folgt somit: Kann irgend eine beliebige Lösung der ursprünglichen Gleichung, nachdem in ihr die rechte Seite gleich Null gesetzt ist, gefunden werden, so kann

man auch die vollständige Stammgleichung der ursprünglichen Differentialgleichung in ihrer allgemeinen Form finden. Die Aufgabe, diese vollständige Stammgleichung zu bestimmen, ist daher zurückgeführt auf die Aufgabe, irgend eine einzige Lösung der einfacheren Gleichung zu finden. Die letztere ist zwar in dem allgemeinsten Falle, wo P und Q noch keine speciellen Functionen sind, bisher noch nicht gelöst worden; indessen ist es in besonderen Fällen möglich, eine Lösung von der Art, wie sie gewünscht wird, manchmal durch den blossen Anblick, zuweilen mittelst convergenter Reihen, zuweilen mittelst eines bestimmten Integrals zu bestimmen. In den beiden letzten Fällen aber (welche gewöhnlich eng mit einander zusammenhängen) ist die explicite Bestimmung des Werthes des für v erhaltenen Ausdrucks schwierig oder ganz unmöglich, gleichwohl wird dieser Ausdruck immer die Lösung bleiben (§. 5).

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - x^2 \frac{d y}{d x} + x y = x^{m+1}.$$

Eine particuläre Lösung von

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - x^2 \frac{d y}{d x} + x y = 0$$

ist augenscheinlich $y = x$. Daher erhalten wir, wenn wir in der ursprünglichen Gleichung $y = x v$ setzen:

$$x \frac{d^2 v}{d x^2} + 2 \frac{d v}{d x} - x^2 \left(x \frac{d v}{d x} + v\right) + x^2 v = x^{m+1},$$

oder:

$$\frac{d^2 v}{d x^2} + \left(\frac{2}{x} - x^2\right) \frac{d v}{d x} = x^m.$$

Somit:

$$\frac{d v}{d x} x^2 e^{-\frac{1}{3}x^3} = A + \int x^{m+2} e^{-\frac{1}{3}x^3} d x,$$

und daher:

$$v = B + A \int \frac{d x}{x^2} e^{\frac{1}{3}x^3} + \int \frac{d x}{x^2} e^{\frac{1}{3}x^3} \int x^{m+2} e^{-\frac{1}{3}x^3} d x.$$

Im Falle $m = 0$ lässt sich dieser Ausdruck vereinfachen.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{d x^2} - x \frac{d y}{d x} + (x - 1) y = X,$$

$$(2) \quad (a x - b x^2) \frac{d^2 y}{d x^2} + 2 a \frac{d y}{d x} + 2 b y = x^{n-1}.$$

§. 59.

Kann man jedoch, nachdem R gleich Null gesetzt worden ist, keine Lösung der Gleichung erhalten, so ist es zuweilen nützlich, aus der transformirten Differentialgleichung das Glied, welches $\frac{dv}{dx}$ enthält, fortzuschaffen. Damit dies der Fall sein könne, muss w die Gleichung befriedigen:

$$2\frac{dw}{dx} + Pw = 0,$$

aus der wir finden:

$$w = e^{-\frac{1}{2}\int P dx}$$

Hier brauchen wir bei der Integration keine Constante hinzuzufügen, da sie nachher doch wieder verschwindet. Setzt man diesen Werth von w in die Gleichung ein und macht man:

$$I = Q - \frac{1}{2}\frac{dP}{dx} - \frac{1}{4}P^2,$$

so geht die Gleichung über in:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + Iv = Re^{\frac{1}{2}\int P dx}$$

In einigen besonderen Fällen lässt diese Gleichung eine unmittelbare Lösung zu; aber diese Fälle kommen weit weniger häufig vor als die, auf welche die vorhergehende Methode anwendbar ist, und der Vortheil dieser Methode, welcher in Kurzem angedeutet werden wird, liegt nach einer ganz anderen Richtung hin. Wir wissen bereits, dass, wenn man eine Lösung dieser Gleichung, nachdem darin die rechte Seite gleich Null gesetzt ist, finden kann, auch die Stammgleichung der allgemeinen Gleichung sich bestimmen lässt, und wir können daher unsere Gleichung in der Form schreiben:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + Iv = 0.$$

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{4x^2}(-8 + x^{\frac{1}{2}} + x) = 0.$$

Hierbei ist $P = -\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ und daher:

$$w = e^{-\frac{1}{2}\int P dx} = e^{x^{\frac{1}{2}}}.$$

Ferner ist:

$$I = \frac{-2}{x^2} + \frac{1}{4 x^{3/2}} + \frac{1}{4x} - \frac{1}{4 x^{3/2}} - \frac{1}{4x} = -\frac{2}{x^2},$$

so dass die Gleichung, welche v liefert, ist:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{2}{x^2} v = 0.$$

Die Lösung derselben ist:

$$v = A x^2 + \frac{B}{x},$$

und daher das allgemeine Integral der ersten Gleichung:

$$y = (A x^2 + B x^{-1}) e^{x^{\frac{1}{2}}}.$$

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $$\frac{d^2 y}{d x^2} - 2 b x \frac{dy}{dx} + b^2 x^2 y = x.$$

(2) $$\frac{d^2 y}{d x^2} - \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + \left(a^2 + \frac{2}{x^2}\right) y = 0.$$

(3) $$\frac{d^2 y}{d x^2} - 4 x \frac{dy}{dx} + (4 x^2 - 3) y = e^{x^2}.$$

§. 60.

Der Vortheil, den man hat, wenn man die Form

$$\frac{d^2 v}{d x^2} + I v = 0$$

an Stelle der Form

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + P \frac{dy}{dx} + Q y = 0$$

als typische Form der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung anwendet, liegt in dem Umstande, dass, wenn für y in der letzteren Gleichung irgend eine Substitution $z f(x)$ ausgeführt und in der dadurch entstehenden Gleichung

$$\frac{d^2 z}{d x^2} + P_1 \frac{dz}{dx} + Q_1 z = 0$$

das zweite Glied derselben durch die Substitution

$$z = w e^{-\frac{1}{2}\int P_1 dx}$$

weggeschafft wird, I eine Function von P und Q von solcher Beschaffenheit ist, dass die letztere Gleichung wiederum die Form annimmt:

$$\frac{d^2 w}{d x^2} + I w = 0.$$

Es ist daher I genau dieselbe Function von P_1 und Q_1, wie von P und Q. Wir können somit I **eine Invariante** der Coefficienten der Differentialgleichung nennen *). Von der reducirten Gleichung können wir sagen, dass sie in ihrer **Normalform** sei; irgend zwei lineare Gleichungen von der Art, wie die Gleichungen in y und z, können in einander transformirt werden, wenn die Normalform einer jeden dieselbe ist.

Wenn es bekannt ist, dass zwei gegebene Gleichungen in dieser Weise in einander transformirbar sind, und die Substitutionsgleichung zwischen den abhängigen Veränderlichen gewünscht wird, so kann dieselbe leicht dadurch erhalten werden, dass man die Normalform als eine intermediäre transformirte Gleichung benutzt. So wird in dem allgemeinen Beispiel die Gleichung in y in die Gleichung für v transformirt, wenn wir setzen:

$$y\, e^{\frac{1}{2}\int P dx} = v,$$

und die Gleichung in v geht über in die für z, wenn wir setzen:

$$v = z\, e^{\frac{1}{2}\int P_1 dx}.$$

Somit ist die Beziehung, durch welche direct die Gleichung für y in die für z transformirt wird:

$$y\, e^{\frac{1}{2}\int P dx} = z\, e^{\frac{1}{2}\int P_1 dx}.$$

1. Aufgabe. Man zeige, dass die Gleichungen

$$(1 - x^2) \frac{d^2 z}{d x^2} + (1 - 3x) \frac{d z}{d x} + k z = 0$$

und

$$(1 - x^2) \frac{d^2 \zeta}{d x^2} - (1 + x) \frac{d \zeta}{d x} + (k + 1)\, \zeta = 0$$

in einander transformirt werden können, und suche die Beziehung zwischen z, ζ und x.

2. Aufgabe. Man bestimme den Werth von Q derart, dass die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + a \frac{d y}{d x} + Q y = 0$$

*) Vergl. Malet, Phil. Trans. (1882), Seite 751. Anm. d. Verf.

durch eine Substitution $y = z f(x)$ transformirt werden kann in

$$\frac{d^2 z}{d x^2} + \frac{1}{x} \frac{d z}{d x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) z = 0,$$

und suche den Werth von $f(x)$.

§. 61.

Sind y_1 und y_2 zwei particuläre Integrale der Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + P \frac{d y}{d x} + Q y = 0,$$

und v_1 und v_2 die entsprechenden particulären Integrale von:

$$\frac{d^2 v}{d x^2} + I v = 0,$$

so ist:

$$v_1 = y_1 e^{\frac{1}{2}\int P dx} \quad \text{und} \quad v_2 = y_2 e^{\frac{1}{2}\int P dx},$$

und daher:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{v_1}{v_2} = s,$$

so dass also s der Quotient von zwei verschiedenen Lösungen einer jeden Gleichung ist. Wir wollen nun die Gleichung aufstellen, welche durch s befriedigt wird. Da jede der Grössen y (oder v) aus zwei Gliedern bestehen kann, von denen jedes einen willkürlichen constanten Factor enthält, so kann der Quotient der beiden drei willkürliche Constanten enthalten (nicht vier, da man, ohne den Werth oder die Allgemeinheit eines solchen Quotienten zu ändern, irgend eine Constante gleich 1 setzen kann); es muss daher die Differentialgleichung, welche durch s, d. i. durch eine Function mit drei willkürlichen Constanten, befriedigt wird, von der dritten Ordnung sein.

Deuten wir eine Differentiation nach x durch Striche an, so können wir schreiben:

$$v_1'' + I v_1 = 0$$
$$v_2'' + I v_2 = 0.$$

Nehmen wir den Logarithmus von

$$s = \frac{v_1}{v_2}$$

und differentiiren wir dann, so erhalten wir:

$$\frac{s'}{s} = \frac{v_1'}{v_1} - \frac{v_2'}{v_2},$$

und dies giebt durch nochmalige Differentiation:

$$\frac{s''}{s} - \left(\frac{s'}{s}\right)^2 = \frac{v_1''}{v_1} - \left(\frac{v_1'}{v_1}\right)^2 - \frac{v_2''}{v_2} + \left(\frac{v_2'}{v_2}\right)^2.$$

Nun ist aber:

$$\frac{v_1''}{v_1} = -I = \frac{v_2''}{v_2},$$

daher wird die Gleichung:

$$\frac{s''}{s} - \left(\frac{s'}{s}\right)^2 = -\left(\frac{v_1'}{v_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2'}{v_2}\right)^2$$

$$= -\left(\frac{v_1'}{v_1} - \frac{v_2'}{v_2}\right)\left(\frac{v_1'}{v_1} + \frac{v_2'}{v_2}\right),$$

und daher:

$$\frac{s''}{s'} - \frac{s'}{s} = -\left(\frac{v_1'}{v_1} + \frac{v_2'}{v_2}\right),$$

oder:

$$\frac{s''}{s'} = -2\frac{v_2'}{v_2}.$$

Differentiiren wir dieses nochmals, so erhalten wir:

$$\frac{s'''}{s'} - \left(\frac{s''}{s'}\right)^2 = -2\frac{v_2''}{v_2} + 2\left(\frac{v_2'}{v_2}\right)^2$$

$$= 2I + \frac{1}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2,$$

und, wenn wir das letzte Glied auf die andere Seite schaffen:

$$\frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 = 2I.$$

Dies ist die Differentialgleichung, welcher s genügt; dieselbe ist, wie angegeben wurde, von der dritten Ordnung.

Die Function der Differentialquotienten von s nach x, welche auf der linken Seite der Gleichung vorkommt, ist von Cayley **die Schwarz'sche Abgeleitete** (Schwarzian Derivative) *) genannt und von ihm mit $\{s, x\}$ bezeichnet worden; sie wird so genannt, weil ihre Eigenschaften in einer Abhandlung von Schwarz in Crelle's Journal (Bd. LXXV) discutirt sind und sie in dieser von fundamentaler Wichtigkeit ist; jedoch ist diese Function nicht zuerst von ihm aufgestellt worden **).

---

*) Cayley, Cambr. Phil. Trans. (1880), Bd. XIII, S. 5. Anm. d. Verf.

**) Sie kommt implicit in Jacobi's Fundamenta nova und explicit zum ersten Male in Kummer's Abhandlung über die hypergeometrische Reihe in Crelle's Journ. Bd. XV vor. Auf letztere wird in Capitel 6 verwiesen. Siehe auch Cayley, l. c. Anm. d. Verf.

§. 62.

Wenn man nun irgend eine Lösung dieser Gleichung erhalten kann, so lässt sich auch eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung unmittelbar ableiten. Denn bezeichnen wir eine solche Lösung der neuen Gleichung mit s, so erhalten wir, da

$$\frac{v_2'}{v_2} = -\frac{1}{2}\frac{s''}{s'}$$

ist, wenn wir diese Gleichung integriren:

$$v_2 = C\,(s')^{-\frac{1}{2}},$$

worin C willkürlich ist. Dies ist eine Lösung; eine andere ist:

$$v_1 = v_2\,s = C\,s\,(s')^{-\frac{1}{2}},$$

und aus diesen leitet man die entsprechenden Lösungen der Gleichung in y her, indem man den Exponentialfactor hinzusetzt. Wenn aber irgend eine Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung bekannt ist, so kann man daraus die allgemeine Lösung finden; mithin wird irgend ein particulärer Werth von s, welcher der Differentialgleichung dieser Function genügt, zu der vollständigen Lösung der ersten von jenen beiden Differentialgleichungen führen.

Dieser Satz gilt für die allgemeine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung; seine Hauptanwendung wird er aber auf die Gleichung finden, welcher die hypergeometrische Reihe genügt. Dies wird im 6. Capitel auseinandergesetzt werden.

1. Aufgabe. Man beweise, dass, wenn

$$s\,(a\,x + b) = c\,x + d$$

ist, die Schwarz'sche Abgeleitete von s verschwindet.

2. Aufgabe. Man suche den allgemeinen Werth von s, wenn

$$x^2\,\{s, x\} + a = 0$$

und a eine Constante ist.

3. Aufgabe. Man beweise die Gleichungen:

$$(1)\quad \{s, x\} = -\left(\frac{d\,s}{d\,x}\right)^2 \{x, s\}.$$

$$(2)\quad \left\{\frac{a\,s + b}{c\,s + d}, x\right\} = \{s, x\}.$$

$$(3)\quad \{s, x\} = \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 [\{s, y\} - \{x, y\}].$$

$$(4)\quad \{s, x\} = \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 \{s, y\} - \left(\frac{d\,v}{d\,x}\right)^2 \{x, v\} + \left(\frac{d\,v}{d\,x}\right)^2 \{y, v\}.$$

(Cayley.)

§. 63.

Eine andere Methode, welche zuweilen von Erfolg ist, besteht in der **Aenderung der unabhängigen** Veränderlichen.

Nimmt man z als die neue unabhängige Veränderliche, so ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2},$$

und die ursprüngliche Gleichung geht über in:

$$\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dz}\left(\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx}\right) + Qy = 0.$$

Bis jetzt ist z noch willkürlich; man kann sie daher so wählen, dass sie irgend einer nach Belieben anzunehmenden Bedingung genügt. Wir können sie demnach so wählen, dass für sie der Coefficient von $\frac{dy}{dz}$ verschwindet, so dass also

$$\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx} = 0$$

ist und somit z als Function von x gegeben wird durch die Gleichung:

$$z = \int dx\, e^{-\int Pdx}.$$

Das Resultat der Elimination von x aus dieser Beziehung zwischen z und x und der transformirten Gleichung kann eine Gleichung sein, welche sich als integrabel erweist.

Ein integrabler Fall tritt ein, wenn der Werth von z so beschaffen ist, dass er der Gleichung genügt:

$$\mu\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = Qz^2,$$

worin μ eine Constante ist. Dann nimmt die Gleichung die Form an:

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + \mu y = 0,$$

deren Integral ist:

$$y = Az^\alpha + Bz^\beta,$$

worin α und β die Wurzeln sind von

$$m(m-1) + \mu = 0,$$

und es ist nicht schwer zu beweisen, dass die Relation, welche zwischen P und Q stattfinden muss, damit dies der Fall sein könne, die folgende ist:

$$\frac{Q}{\mu^{1/2}} + \frac{d}{dx}\left(Q^{1/2}\right) + P Q^{1/2} = 0.$$

Ein anderer integrabler Fall würde geliefert werden durch

$$\mu\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = Q,$$

und so in anderen Fällen. Dabei ist zu bemerken, dass die Gleichung in jedem Falle auf eine Gleichung reducirt wird, die man als eine bekannte Form bezeichnen kann, d. h. auf eine Gleichung, deren Stammgleichung man finden kann.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$(1 - x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = c^2 y.$$

Hierbei ist:

$$P(1 - x^2) = -x,$$

daher:

$$\frac{dz}{dx} = e^{-\int P dx} = e^{\int \frac{x\,dx}{1-x^2}} = (1 - x^2)^{-1/2}$$

und:

$$z = arc\ sin\ x.$$

Aendert man die unabhängige Veränderliche in z um, so geht die Gleichung über in:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = c^2 y,$$

und daher:

$$y = A e^{c\ arc\ sin\ x} + B e^{c\ arc\ cos\ x}.$$

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $(x^2 - 1)\frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = c^2 y,$

(2) $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\ tang\ x + y\ cos^2 x = 0,$

(3) $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{3x+1}{x^2-1}\frac{dy}{dx} + y\left\{\frac{6(x+1)}{(x-1)(3x+5)}\right\}^2 = 0,$

(4) $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{x^4} y = 0.$

§. 64.

Die Eigenschaft, die wir in §. 60 benutzt haben, um die Relationen zwischen den abhängigen Veränderlichen zweier Gleichungen, die gegenseitig in einander transformirbar sind — zweier Gleichungen nämlich, die dieselbe Normalform besitzen —, zu erhalten, kann auch benutzt werden, um die Beziehungen zwischen den abhängigen Veränderlichen in zwei Gleichungen, in denen die unabhängigen Veränderlichen verschieden sind, unter der Voraussetzung zu finden, dass die Gleichungen schliesslich dieselbe Function bestimmen. Das anzuwendende Verfahren wird dem erstgenannten ähnlich sein, da beide Gleichungen auf ihre Normalformen in derselben Veränderlichen reducirt werden, und diese, nachdem sie als identisch angenommen worden, die Bedingungen geben, welche für die Richtigkeit der Voraussetzung erforderlich sind.

Die beiden Gleichungen, welche in dieser Weise durch Veränderung der abhängigen wie der unabhängigen Veränderlichen in einander transformirbar sein sollen, mögen sein:

$$(1)\qquad \frac{d^2 y}{d x^2} + 2 P \frac{d y}{d x} + Q y = 0$$

$$(2)\qquad \frac{d^2 v}{d z^2} + 2 R \frac{d v}{d z} + S v = 0,$$

worin P und Q Functionen von x, R und S Functionen von z sind.

Setzt man in (1)

$$y e^{\int P dx} = y_1$$

und

$$I = Q - \frac{dP}{dx} - P^2,$$

so erhält man:

$$(3)\qquad \frac{d^2 y_1}{d x^2} + I y_1 = 0.$$

Setzt man ebenso in (2):

$$v e^{\int R dz} = v_1$$

und

$$J = S - \frac{dR}{dz} - R^2,$$

so erhält man:

$$(4)\qquad \frac{d^2 v_1}{d z^2} + J v_1 = 0.$$

Verwandeln wir in (3) die unabhängige Veränderliche x in z, so wird:

$$\frac{d^2 y_1}{d z^2}\left(\frac{d z}{d x}\right)^2 + \frac{d y_1}{d z}\frac{d^2 z}{d x^2} + I y_1 = 0,$$

oder:

$$\frac{d^2 y_1}{d z^2} + \frac{d y_1}{d z}\frac{z''}{z'^2} + \frac{I}{z'^2} y_1 = 0,$$

worin die Striche Differentiationen nach x andeuten. Um diese Gleichung auf ihre Normalform zu reduciren, setzen wir:

$$y_1 e^{\frac{1}{2}\int \frac{z''}{z'^2} dz} = y_2,$$

oder, indem wir das Integral im Exponenten berechnen:

$$y_1 z'^{\frac{1}{2}} = y_2.$$

Die Gleichung geht dann über in:

$$(5) \qquad \frac{d^2 y_2}{d z^2} + G y_2 = 0,$$

worin:

$$G = \frac{I}{z'^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{z''}{z'^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{z''}{z'^2}\right)$$

$$= \frac{I}{z'^2} - \frac{1}{4}\frac{z''^2}{z'^4} - \frac{1}{2}\left(\frac{z'''}{z'^2} - 2\frac{z''^2}{z'^3}\right)\frac{1}{z'}$$

$$= \frac{I}{z'^2} - \frac{1}{2}\frac{\{z, x\}}{z'^2}$$

und $\{z, x\}$ die Schwarz'sche Abgeleitete von z ist.

Wenn dann die Gleichungen gegenseitig in einander transformirbar sind, so werden die Normalformen, falls sie ausgedrückt sind durch dieselbe unabhängige Veränderliche, dieselben sein. Vergleichen wir daher (4) und (5), welches die Normalformen sind, so erhalten wir:

$$y_2 = v_1$$

und

$$G = J.$$

Substituiren wir für G seinen Werth in die letzte Gleichung, so wird:

$$I - \frac{1}{2}\{z, x\} = J z'^2,$$

oder:

$$\frac{1}{2}\{z, x\} + \left(\frac{d z}{d x}\right)^2\left(S - \frac{d R}{d z} - R^2\right) - \left(Q - \frac{d P}{d x} - P^2\right) = 0;$$

und substituiren wir für y_2 und v_1 ihre Werthe in die erste Gleichung, so erhalten wir:

$$y \left(\frac{dz}{dx}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\int P dx} = v e^{\int R dz}.$$

Diese beiden Gleichungen sind die Bedingungen dafür, dass die Differentialgleichungen (1) und (2) die vorausgesetzte Eigenschaft haben; die **erste** von ihnen giebt **die Beziehung**, welche **zwischen den unabhängigen Veränderlichen** bestehen muss, und ist die erste erfüllt, so giebt die **zweite die Beziehung**, welche **zwischen den abhängigen Veränderlichen** bestehen muss.

Die vorstehenden Gleichungen setzen uns in den Stand, die allgemeine Form aller Differentialgleichungen, in welche (1) transformirbar ist, zu finden und zugleich den Zusammenhang zwischen zwei gegebenen verwandten Gleichungen zu bestimmen. So würde z. B. die Gleichung, welche eine gegebene unabhängige Veränderliche z enthält und mit (1) äquivalent ist, zu ihrer Normalform die Gleichung haben:

$$\frac{d^2 v_1}{dz^2} + v_1 J = 0,$$

worin

$$v_1 = y \left(\frac{dz}{dx}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\int P dx},$$

und

$$J = \frac{I}{z'^2} - \frac{1}{2} \frac{\{z, x\}}{z'^2}$$

ist; und da z und I als Functionen von x bekannt sind, so ist J ebenfalls als Function von x bekannt und lässt sich daher darstellen als Function von z.

Jede Differentialgleichung, welche mit (1) äquivalent ist und z zu ihrer unabhängigen Veränderlichen hat, muss die vorstehende Gleichung in v_1 zur Normalform haben.

1. Aufgabe. Man beweise, dass die Gleichungen

$$(1 - x^2) \frac{d^2 z}{dx^2} - 2x \frac{dz}{dx} + n(n+1) z = 0$$

und

$$(1 - k^2) \frac{d^2 v}{dk^2} + \frac{1 - 3k^2}{k} \frac{dv}{dk} = \left\{1 + \frac{(2n+1)^2}{1 - k^2}\right\} v$$

in einander transformirbar sind mit Hülfe der Relation:

$$x(1 - k^2) = 1 + k^2,$$

und suche die Beziehung zwischen z und v. (G. H. Stuart.)

2. Aufgabe. Man beweise, dass die Gleichungen

$$\frac{d^2 v}{d z^2}(1-z)^2 + 2(B-1+z)\frac{d v}{d z} + k(1-k)v = 0$$

und

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{2k}{x}\frac{d y}{d x} - B^2 y = 0$$

mittelst der Relation

$$x - 1 = x z$$

in einander transformirbar sind, und bestimme die Relation zwischen y und v.

Methode der Variation der Parameter.

§. 65.

In §. 58 hatten wir bewiesen, dass, wenn man eine Lösung der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + P\frac{d y}{d x} + Q y = 0$$

finden könne, alsdann auch die Stammgleichung der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + P\frac{d y}{d x} + Q y = R$$

sich bestimmen lässt. Mittelst der folgenden Methode gelingt es aber, für diese Gleichung (und für andere lineare Gleichungen) die Function zu bestimmen, die wir im letzten Capitel das particuläre Integral genannt haben; sie kann angewendet werden in Fällen, wo die vorher angegebenen Methoden nicht mehr anwendbar sind.

Es sei y_1 eine Lösung der Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + P\frac{d y}{d x} + Q y = 0,$$

so dass

$$\frac{d^2 y_1}{d x^2} + P\frac{d y_1}{d x} + Q y_1 = 0$$

ist. Eliminiren wir Q, so erhalten wir:

$$y_1\frac{d^2 y}{d x^2} - y\frac{d^2 y_1}{d x^2} + P\left(y_1\frac{d y}{d x} - y\frac{d y_1}{d x}\right) = 0,$$

und daher:

$$y_1\frac{d y}{d x} - y\frac{d y_1}{d x} = A e^{-\int P dx}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$y = B y_1 + A y_1 \int \frac{d x}{y_1^2} e^{-\int P dx}.$$

Setzt man für die Grösse, deren Coefficient A ist, y_2, so ist die Stammgleichung:

$$y = B y_1 + A y_2,$$

und y_2 ist eine particuläre Lösung der Differentialgleichung. Dann zeigt die vorhergehende Analyse, dass irgend zwei particuläre Lösungen y_1 und y_2 durch die Gleichung zusammenhängen:

$$y_1 \frac{d y_2}{d x} - y_2 \frac{d y_1}{d x} = C e^{-\int P dx},$$

worin der Werth von C nicht mehr willkürlich ist, sondern abhängt von den Formen von y_1 und y_2, den beiden particulären Lösungen der Gleichung.

§. 66.

Wir wollen nun den obigen Werth des vollständigen Integrals einsetzen in die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + P \frac{d y}{d x} + Q y = R,$$

dabei aber annehmen, dass A und B nicht mehr Constanten, sondern Functionen von x seien, die so gewählt werden sollen, dass die Gleichung befriedigt wird. Demnach ist **die Form von** y für beide Gleichungen dieselbe, **die Constanten** aber, welche in dem ersten Falle auftreten, **sind** in dem letzten Falle **in Functionen der unabhängigen Veränderlichen verwandelt.** Dieses Verfahren wird die **Variation der Parameter** genannt.

Wir haben nun zwei unbekannte Grössen A und B, durch welche y, eine einzige unbekannte Grösse, ausgedrückt ist, und können daher nach Belieben zwischen ihnen irgend eine Relation, die uns für unseren Zweck am geeignetsten erscheint, festsetzen. Differentiiren wir y, so erhalten wir:

$$\frac{d y}{d x} = B \frac{d y_1}{d x} + A \frac{d y_2}{d x} + y_1 \frac{d B}{d x} + y_2 \frac{d A}{d x}$$

$$= B \frac{d y_1}{d x} + A \frac{d y_2}{d x},$$

vorausgesetzt, dass

$$y_1 \frac{dB}{dx} + y_2 \frac{dA}{dx} = 0$$

ist. Diese letztere Gleichung werden wir als die zwischen A und B bestehende Relation annehmen. Differentiiren wir $\frac{dy}{dx}$ nochmals, so dass

$$\frac{d^2y}{dx^2} = B\frac{d^2y_1}{dx^2} + A\frac{d^2y_2}{dx^2} + \frac{dB}{dx}\frac{dy_1}{dx} + \frac{dA}{dx}\frac{dy_2}{dx}$$

wird, und substituiren wir diese Werthe in die ursprüngliche Gleichung, so erhalten wir, da y_1 und y_2 particuläre Lösungen der Gleichung für den Fall $R = 0$ sind, als Resultat:

$$\frac{dB}{dx}\frac{dy_1}{dx} + \frac{dA}{dx}\frac{dy_2}{dx} = R,$$

so dass sich ergiebt:

$$\frac{\frac{dA}{dx}}{y_1} = \frac{\frac{dB}{dx}}{-y_2} = \frac{R}{y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx}} = \frac{R}{C}e^{\int Pdx},$$

und daher:

$$A = E + \frac{1}{C}\int R\, y_1\, e^{\int Pdx}\, dx$$

$$B = F - \frac{1}{C}\int R\, y_2\, e^{\int Pdx}\, dx,$$

worin E und F willkürliche Constanten und C eine absolute, von den Formen von y_1 und y_2 abhängende Constante ist.

Wenn wir nun in der Differentialgleichung $\varphi(x)$ für P und $\psi(x)$ für R, $f_1(x)$ für y_1 und $f_2(x)$ für y_2 schreiben, so wird das allgemeine Integral von

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \varphi(x)\frac{dy}{dx} + Qy = \psi(x)$$

folgendermaassen lauten:

$$y = Ef_2(x) + Ff_1(x) + \frac{1}{C}\int^x \psi(\xi)\, e^{\int^\xi \varphi(z)dz}\{f_2(x)f_1(\xi) - f_1(x)f_2(\xi)\}\, d\xi.$$

Hierin sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ particuläre Integrale von

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \varphi(x)\frac{dy}{dx} + Qy = 0,$$

und daher durch die Gleichung mit einander verbunden:

$$f_1 \frac{d f_2}{d x} - f_2 \frac{d f_1}{d x} = C e^{-\int^x \varphi(z) dz}.$$

Es ist zu beachten, dass wir, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, C gleich 1 setzen können; denn wäre es nicht gleich 1, so könnten wir für $f_2(x)$ die Grösse $\frac{1}{C} f_2(x)$ setzen, und diese würde, da sie stets eine particuläre Lösung ist, die Constante der Einheit gleich machen.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$x \frac{d y}{d x} - y = (x-1)\left(\frac{d^2 y}{d x^2} - x + 1\right).$$

In der gewöhnlichen Weise angeordnet, lautet dieselbe:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - \frac{x}{x-1} \frac{d y}{d x} + \frac{1}{x-1} y = x - 1.$$

Particuläre Lösungen der Gleichung, wenn auf der rechten Seite 0 statt $x - 1$ steht, sind x und e^x. Setzen wir daher:

$$f_1(x) = x, \; f_2(x) = e^x,$$

so können wir verfahren wie oben und erhalten die Stammgleichung:

$$y = A e^x + B x.$$

Wie in dem allgemeinen Falle sind A und B verbunden durch:

$$\frac{d A}{d x} e^x + \frac{d B}{d x} x = 0,$$

während

$$\frac{d A}{d x} e^x + \frac{d B}{d x} = x - 1$$

ist. Demnach ist:

$$\frac{d A}{d x} = x e^{-x} \text{ und } \frac{d B}{d x} = -1,$$

und somit:

$$A = E + \int^x \xi e^{-\xi} d\xi$$
$$= E - e^{-x}(x+1),$$

und

$$B = F - x.$$

Mithin ist das allgemeine Integral:

$$y = E e^x + F x - (x^2 + x + 1).$$

2. Aufgabe. Man integrire mittelst dieser Methode die Gleichung:

$$\frac{d y}{d x} + Q y = R,$$

worin Q und R Functionen von x allein sind.

3. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{d x^2} + n^2 y = sec\, n x.$$

$$(2) \quad (1 - x^2) \frac{d^2 y}{d x^2} - 4 x \frac{d y}{d x} - (1 + x^2) y = x.$$

§. 67.

Die Methode der Variation der Parameter kann man auch in einer Weise, die hinsichtlich der weggelassenen Glieder von der ersteren abweicht, anwenden, um ein Hülfsintegral zu bestimmen, dessen Constanten nachher wieder als variable Parameter genommen werden. Betrachten wir z. B. die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2 f(y) + F(y) = 0$$

und lassen wir, um ein Hülfsintegral zu erhalten, das Glied $F(y)$ weg, so wird das Hülfsintegral bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2 f(y) = 0,$$

und ist demnach:

$$\frac{d y}{d x} e^{\int f(y) dy} = C.$$

Nimmt man nun an, dass C, anstatt eine Constante zu sein, eine Function von x ist, und differentiirt man dann diese Gleichung, so folgt:

$$\left\{\frac{d^2 y}{d x^2} + f(y) \left(\frac{d y}{d x}\right)^2\right\} e^{\int f(y) dy} = \frac{d C}{d x},$$

oder:

$$- F(y) e^{\int f(y) dy} = \frac{d C}{d x}.$$

Daher:

$$C \frac{d C}{d x} = - F(y) e^{2 \int f(y) dy} \frac{d y}{d x},$$

und somit:

$$C^2 = A - 2 \int dy\, F(y)\, e^{2\int f(y)dy}.$$

Ein erstes Integral der ursprünglichen Gleichung ist daher:

$$\frac{dy}{dx}\, e^{\int f(y)dy} = \left\{A - 2 \int dy\, F(y)\, e^{2\int f(y)dy}\right\}^{1/2}.$$

Dasselbe lässt sich nochmals integriren, da die Veränderlichen separirt werden können.

1. Aufgabe. Man löse auf diese Art die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} f(x) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \varphi(x) = 0,$$

und zeige, dass das Integral dieser Gleichung auch nach der Methode des §. 54 erhalten werden kann.

Man vertausche in dieser Aufgabe die abhängige und unabhängige Veränderliche und bestimme dadurch das Integral der Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(y) \frac{dy}{dx} + \varphi(y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

2. Aufgabe. Man integrire die allgemeine Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x) \frac{dy}{dx} + F(y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

erstens, indem man, um eine Hülfsgleichung zu erhalten, das letzte Glied weglässt und dann die Parameter variirt;

zweitens, indem man dasselbe Verfahren auf das Integral anwendet, welches durch Weglassung des zweiten Gliedes erhalten wird;

drittens, indem man mit $\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$ multiplicirt und dann jedes Glied integrirt.

Aus diesen Beispielen geht also hervor, dass die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Q \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

integrirbar ist in den Fällen:

(α) wenn P und Q beides Functionen von x sind,
(β) wenn P und Q beides Functionen von y sind,
(γ) wenn P eine Function von x und Q eine Function von y ist.

Zwei specielle Methoden.

§. 68.

Wenn in der Gleichung $\frac{d^2 v}{dx^2} + Iv = 0$ die Grösse I eine gebrochene rationale algebraische Function von der Beschaffenheit ist,

dass der Nenner in Bezug auf die Veränderliche von höherem Grade ist als der Zähler, so ist zuweilen die folgende Methode von Nutzen.

Substituirt man für v die Grösse

$$z\, e^{\int P_1 dx},$$

so geht die Gleichung über in:

$$\frac{d^2 z}{d x^2} + 2\, P_1 \frac{d z}{d x} + P_2\, z = 0,$$

worin

$$P_2 = I + P_1{}^2 + \frac{d P_1}{d x}$$

ist. Integrirt man die Gleichung, als ob die linke Seite ein vollständiger Differentialquotient wäre, so erhält man:

$$\frac{d z}{d x} + 2\, P_1 z + \int z \left(P_2 - 2\, \frac{d P_1}{d x}\right) d x = A.$$

Da die Grössen P_1 und P_2 bisher nur durch eine einzige Gleichung mit einander verbunden sind, so können wir, um sie zu bestimmen, die fernere Bedingung ihnen auferlegen, dass

$$P_2 = 2\, \frac{d P_1}{d x}$$

sein solle, und diese giebt für P_1 die Gleichung:

$$\frac{d P_1}{d x} - P_1^2 = I.$$

Hat man irgend einen Werth von P_1, welcher dieser Gleichung genügt, gefunden, so erhält man ein Integral der ursprünglichen Gleichung in der Form:

$$\frac{d z}{d x} + 2\, P_1 z = A.$$

Es muss darauf aufmerksam gemacht werden, dass der Nutzen dieser Methode abhängt von der Form der Gleichung, welche P_1 giebt; derselbe würde illusorisch werden durch die Substitution

$$P_1 = - \frac{1}{w} \frac{d w}{d x},$$

denn dann würde die Gleichung, welche P_1 liefert, umgewandelt werden in die ursprüngliche Gleichung.

Bei der Annahme, die wir über die Form von I gemacht haben, können wir schreiben:

$$I = \frac{V}{T^2\, U} = \frac{V\, U}{T^2\, U^2} = \frac{U\, V}{\varphi^2},$$

worin T, U und V ganze rationale algebraische Functionen von x sind. Sodann können wir setzen:

$$P_1 = \frac{f(x)}{\varphi},$$

indem die Constanten in $f(x)$ als die aus der Gleichung zu bestimmenden Grössen übrig bleiben. Im Allgemeinen kommen aber in f nicht genug disponible Constanten vor, die man so bestimmen könnte, dass die Gleichung befriedigt würde. Daher ist diese Methode, gleichwie die anderen Methoden, die für die Lösung der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung angegeben worden sind, nicht von allgemeiner Anwendung, sondern nur in besonderen Fällen von Erfolg.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$x\,(1 - x)^2 \frac{d^2 v}{d x^2} = 2\, v.$$

Hierbei ist die Gleichung für P_1:

$$\frac{d P_1}{d x} - P_1{}^2 = - \frac{2}{x\,(1 - x)^2}.$$

Man setze:

$$P_1 = \frac{E}{x} + \frac{F}{1 - x}$$

und substituire dies; dann wird die Gleichung erfüllt werden durch: $E = F = -1$, und daher ist ein erstes Integral:

$$\frac{d z}{d x} - \frac{2}{x\,(1 - x)}\, z = A,$$

worin

$$log\, \frac{v}{z} = - \int \frac{d x}{x} - \int \frac{d x}{1 - x}$$

oder

$$v\, x = z\,(1 - x)$$

ist. Die Stammgleichung kann leicht abgeleitet werden, da die Gleichung in z linear von der ersten Ordnung ist.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$(1)\quad (1 - x^2)^2 \frac{d^2 v}{d x^2} + v = 0,$$

$$(2)\quad (2\, x + 1)^2\, (x^2 + x + 1) \frac{d^2 v}{d x^2} = 18\, v,$$

$$(3)\quad \frac{d^2 y}{d x^2} = 4\, y\, \frac{sin\ 3\, x}{sin^3\, x}.$$

Sollte ein Glied mit $\frac{dy}{dx}$ in der Gleichung vorkommen, so müsste dasselbe weggeschafft werden, bevor man die vorstehende Methode anwendet.

3. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$(1)\quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\gamma - (\alpha + 2)x}{x(1-x)}\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha y}{x(1-x)} = 0,$$

$$(2)\quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1-x)}\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha\beta y}{x(1-x)} = 0,$$

$$(3)\quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha + 1 - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1-x)}\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha\beta y}{x(1-x)} = 0.$$

4. Aufgabe. Man zeige, dass diese Methode auf die Gleichung

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{A' x^2 + 2B' x + C'}{(x^2 + 2Ax + B)^2}\, v$$

angewandt werden kann, sobald eine einzige Relation zwischen A', B', C' besteht, und bestimme diese Relation.

§. 69.

Eine gewisse Classe von linearen Differentialgleichungen kann gelöst werden durch Auflösung des Operationssymbols an y in das Product solcher Operationszeichen. Betrachten wir z. B. die Gleichung:

$$u\frac{d^2 y}{dx^2} + v\frac{dy}{dx} + wy = 0,$$

in welcher u, v, w Functionen von x sind, und ist das Operationssymbol

$$u\frac{d^2}{dx^2} + v\frac{d}{dx} + w$$

zerlegbar in das Product:

$$\left(p\frac{d}{dx} + q\right)\left(r\frac{d}{dx} + s\right),$$

wo p, q, r und s Functionen von x sind, so lässt sich die Gleichung integriren. Denn setzen wir:

$$\left(r\frac{d}{dx} + s\right) y = z,$$

so erhalten wir:

$$p\frac{dz}{dx} + qz = 0,$$

und daher:

$$z = A e^{-\int \frac{q}{p} dx},$$

und haben nun die Gleichung zu integriren:

$$r \frac{dy}{dx} + s y = A e^{-\int \frac{q}{p} dx},$$

welche linear von der ersten Ordnung ist. Damit diese Zerlegung möglich sei, müssen die drei Gleichungen bestehen:

$$p r = u$$

$$q r + p \left(\frac{dr}{dx} + s\right) = v$$

$$q s + p \frac{ds}{dx} = w,$$

und aus diesen sind die vier Grössen p, q, r und s zu bestimmen. Wir können jedoch p und r als gegebene Factoren von u ansehen und die beiden übrig bleibenden Gleichungen zur Bestimmung von q und s benutzen.

Diese können aber allgemein nicht gelöst werden, und daher lässt sich diese Methode nur in besonderen Fällen anwenden.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$(x^2 + x - 2) \frac{d^2 y}{dx^2} + (x^2 - x) \frac{dy}{dx} - (6 x^2 + 7 x) y = 0.$$

Hier können wir setzen:

$$p = x + 2, \qquad r = x - 1.$$

Ist dann:

$$q = E x + F, \qquad s = E' x + F',$$

so erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{r} E + E' = 1 \\ -E + F + 2 E' + F' = -2 \\ F - 2 F' = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} E E' = -6 \\ E' F + E F' + E' = -7 \\ F F' + 2 E' = 0 \end{array}\right\},$$

und diese Gleichungen werden befriedigt durch

$$E = 3, \; E' = -2, \; F = 4, \; F' = 1.$$

Somit lässt sich die Gleichung schreiben:

$$\left\{(x + 2) \frac{d}{dx} + 3 x + 4\right\} \left\{(x - 1) \frac{d}{dx} - (2 x - 1)\right\} y = 0.$$

Ein erstes Integral ist:

$$(x - 1)\frac{dy}{dx} - (2x - 1)\,y = A\,(x + 2)^2\,e^{-3x},$$

und die Stammgleichung ist:

$$y = (x - 1)\,e^{2x}\left\{B + A\int\left(\frac{x + 2}{x - 1}\right)^2 e^{-5x}\,dx\right\}.$$

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $ax\frac{d^2y}{dx^2} + (3a + bx)\frac{dy}{dx} + 3by = 0,$

(2) $(x - 1)(x - 2)\frac{d^2y}{dx^2} - (2x - 3)\frac{dy}{dx} + y = 0,$

(3) $(2x - 1)\frac{d^2y}{dx^2} - (3x - 4)\frac{dy}{dx} + (x - 3)\,y = 0,$

(4) $(x^2 + 3x + 2)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(5x^2 + \frac{21}{2}x + 4\right)\frac{dy}{dx}$
$+ \left(6x^2 + \frac{17}{2}x + 4\right)y = 0,$

(5) $(x^2 - 1)\frac{d^2y}{dx^2} - (3x + 1)\frac{dy}{dx} - (x^2 - x)\,y = 0,$

(6) $x^2(a - bx)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x(2a - bx)\frac{dy}{dx} + 2(3a - bx)y = 6a^2.$

§. 70.

Es giebt **noch eine besondere Form,** in die sich die gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung verwandeln lässt. Multipliciren wir die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$$

mit $e^{\int P dx}$, so können wir sie schreiben:

$$\frac{d}{dx}\left\{e^{\int P dx}\frac{dy}{dx}\right\} + Q\,e^{\int P dx}\,y = 0.$$

Nimmt man eine neue unabhängige Veränderliche z so an, dass

$$dz = Q\,e^{\int P dx}\,dx$$

ist, so geht die Gleichung über in:

$$\frac{d}{dz}\left\{Q\,e^{2\int P dx}\frac{dy}{dz}\right\} + y = 0.$$

Nun ist $Q\,e^{2\int P dx}$ eine bestimmte Function von x und somit

von z; dieselbe möge mit $\frac{1}{U}$ bezeichnet werden, wo U eine Function von z ist. Dann ist die Gleichung:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{U}\frac{dy}{dz}\right) + y = 0,$$

und dieses ist die erwähnte Form.

William Thomson hat eine Näherungsmethode für die Lösung dieser Gleichung durch mechanische Mittel angegeben *).

Aufgabe. Man drücke $P\frac{d^2u}{dx^2} + Q\frac{du}{dx} + Ru = 0$ in der Form $\frac{d^2v}{dx^2} + \mu v = 0$ aus und zeige, dass $v = S_0 - S_1 + S_2 - \cdots$, worin

$$S_0 = C + C'x, \quad S_{n+1} = \int_0^x dx \int_0^x \mu S_n dx$$

ist, die Lösung dieser Gleichung durch eine Reihe darstellt, die nothwendig convergent ist für alle Werthe von x, vorausgesetzt, dass μ endlich bleibt.

Man berechne den Fall, wo $\mu = x^n$ ist.

Die allgemeine lineare Differentialgleichung.

§. 71.

Die allgemeine lineare Differentialgleichung mit veränderlichen Coefficienten ist von der Form:

$$(1)\quad X_0\frac{d^n y}{dx^n} + X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + X_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + X_{n-1}\frac{dy}{dx} + X_n y = V,$$

in welcher $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ und V Functionen von x allein sind. Die Art von Gleichungen, in denen die Coefficienten der Differentialquotienten von y Constanten sind, ist bereits betrachtet worden. Die Coefficienten $X_0, X_1, \ldots, X_n$ können als ganze Functionen von x vorausgesetzt werden; wäre dies bei irgend einer Gleichung in Wirklichkeit nicht der Fall, so könnte man die Gleichung dadurch, dass man sie mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner der in der gegebenen Form vorkommenden Brüche multiplicirt, so transformiren, dass ihre Coefficienten ganze Functionen von x würden.

---

*) Siehe Proc. Roy. Soc. Bd. XXIV (1876), S. 269. Anm. d. Verf.

Die Lösung der Gleichung besteht, wie vorher, aus zwei Theilen:

Erstens, aus dem **particulären Integral,** welches irgend ein Werth von y (je einfacher, desto besser) ist, der der Gleichung genügt.

Zweitens, aus der **Complementär-Function,** welche das vollständige Integral der Gleichung ist, deren rechte Seite Null ist, d. h. der Gleichung:

$$(2)\quad X_0 \frac{d^n y}{d x^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \cdots\cdot + X_{n-1} \frac{d y}{d x} + X_n y = 0.$$

Die Gleichung (2) wird, da sie von der $n$ten Ordnung ist, in ihrem vollständigen Integral n willkürliche Constanten enthalten — die für die vollständige Lösung von (1) erforderliche Anzahl; und die Stammgleichung ist die Summe dieser beiden Theile.

§. 72.

Ist y_1 eine Lösung von (2), so ist auch $A_1 y_1$ eine Lösung, da die Gleichung linear ist; sind demnach $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n verschiedene particuläre Lösungen von (2), so ist auch

$$y = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots + A_n y_n,$$

worin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ willkürliche Constanten sind, eine Lösung. Wenn nun die Lösungen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ unabhängig von einander sind, so dass sich nicht eine von ihnen mittelst einer linearen Function aller anderen oder einiger derselben ausdrücken lässt, so ist der vorstehende Werth von y eine Lösung, welche n willkürliche Constanten enthält; sie ist demnach die Complementär-Function. Damit dies der Fall sein könne, darf keine Gleichung von der Form

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_n y_n = 0$$

für was immer für welche Werthe der Constanten $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ bestehen, es müsste denn jede von ihnen gleich Null sein. Sind sämmtliche Constanten λ von Null verschieden, so erhalten wir die abgeleiteten Gleichungen:

$$\lambda_1 \frac{d^{n-1} y_1}{d x^{n-1}} + \lambda_2 \frac{d^{n-1} y_2}{d x^{n-1}} + \cdots\cdot + \lambda_n \frac{d^{n-1} y_n}{d x^{n-1}} = 0$$

$$\lambda_1 \frac{d^{n-2} y_1}{d x^{n-2}} + \lambda_2 \frac{d^{n-2} y_2}{d x^{n-2}} + \cdots\cdot + \lambda_n \frac{d^{n-2} y_n}{d x^{n-2}} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_1 \frac{d y_1}{d x} + \lambda_2 \frac{d y_2}{d x} + \cdots\cdot + \lambda_n \frac{d y_n}{d x} = 0$$

und da die λ nicht sämmtlich verschwinden, so muss die durch Elimination der λ erhaltene Determinante verschwinden, d. h. es muss sein:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \frac{d^{n-1} y_1}{d x^{n-1}}, & \frac{d^{n-1} y_2}{d x^{n-1}}, & \ldots, & \frac{d^{n-1} y_n}{d x^{n-1}} \\ \frac{d^{n-2} y_1}{d x^{n-2}}, & \frac{d^{n-2} y_2}{d x^{n-2}}, & \ldots, & \frac{d^{n-2} y_n}{d x^{n-2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d y_1}{d x}, & \frac{d y_2}{d x}, & \ldots, & \frac{d y_n}{d x} \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_n \end{vmatrix} = 0.$$

Die Bedingung dafür also, dass die y unabhängig von einander, oder, mit anderen Worten, dass der obige Werth von y die Complementär-Function sein soll, ist die, dass $\varDelta$ nicht verschwindet.

§. 73.

Man kann leicht beweisen, dass, wenn $\varDelta$ gleich Null ist, alsdann eine Gleichung von der Form

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_n y_n = 0$$

bestehen muss. Denn im anderen Falle bezeichne man den Werth der linken Seite mit u. Multiplicirt man dann die Colonnen in $\varDelta$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ resp. und addirt sie dann zu einander, indem man irgend eine Colonne, z. B. die erste, durch die Summe aller ersetzt, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{n-1} u}{d x^{n-1}}, & \frac{d^{n-1} y_2}{d x^{n-1}}, & \ldots, & \frac{d^{n-1} y_n}{d x^{n-1}} \\ \frac{d^{n-2} u}{d x^{n-2}}, & \frac{d^{n-2} y_2}{d x^{n-2}}, & \ldots, & \frac{d^{n-2} y_n}{d x^{n-2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u, & y_2, & \ldots, & y_n \end{vmatrix} = 0,$$

und dies ist eine Gleichung $(n-1)$ter Ordnung, welche u bestimmt. Nun wird dieselbe befriedigt durch $u = y_1, y_2, \ldots, y_n$, d. h. sie besitzt n particuläre Lösungen, welche als unabhängig vorausgesetzt sind. Die Anzahl von unabhängigen particulären Lösungen, welche eine Gleichung haben kann, ist aber gleich ihrer Ordnung, eine Eigenschaft, mit welcher das eben angegebene Resultat im Widerspruch steht. Die obige Gleichung in u muss daher eine Identität

sein, so dass $u = 0$ ist, und demnach giebt es unter der Voraussetzung, dass Δ gleich Null sei, eine Beziehung zwischen den n Grössen y.

§. 74.

Der Werth von Δ kann, falls er verschieden von Null ist, folgendermaassen gefunden werden. Substituirt man in (2) die Werthe $y = y_1, y_2, \ldots, y_n$ und eliminirt man aus den n dadurch entstehenden Gleichungen die Coefficienten $X_2, X_3, \ldots, X_n$, so erhält man:

$$X_0 \begin{vmatrix} \frac{d^n y_1}{d x^n}, & \frac{d^n y_2}{d x^n}, & \ldots, & \frac{d^n y_n}{d x^n} \\ \frac{d^{n-2} y_1}{d x^{n-2}}, & \frac{d^{n-2} y_2}{d x^{n-2}}, & \ldots, & \frac{d^{n-2} y_n}{d x^{n-2}} \\ \frac{d^{n-3} y_1}{d x^{n-3}}, & \frac{d^{n-3} y_2}{d x^{n-3}}, & \ldots, & \frac{d^{n-3} y_n}{d x^{n-3}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_n \end{vmatrix} + X_1 \Delta = 0.$$

Die mit X_0 multiplicirte Determinante ist $\frac{d\Delta}{dx}$, und daher ist die Gleichung:

$$X_0 \frac{d\Delta}{dx} + X_1 \Delta = 0,$$

und diese giebt integrirt:

$$\Delta = Ce^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx}.$$

Da Δ und $\int \frac{X_1}{X_0} dx$ bestimmte Functionen von x sind, so muss die Constante C durch irgend welche andere Methode bestimmt werden; häufig ist die Vergleichung specieller Glieder von Erfolg. Offenbar wird sich der Werth von C ändern bei einer Aenderung der Reihe der ursprünglichen Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Aufgabe. Es sei y_1 ein particuläres Integral der Gleichung:

$$X_0 \frac{d^m y}{d x^m} + X_1 \frac{d^{m-1} y}{d x^{m-1}} + \cdots + X_{m-1} \frac{d y}{d x} + X_m y = 0.$$

Setzen wir $y_1 \int z\, dx$ für y, so wird die Gleichung, welche z bestimmt (siehe weiter unten §. 76), von der $(m-1)$ten Ordnung. Es sei z_1 ein particuläres Integral dieser Gleichung, so dass $y_1 \int z_1\, dx$ ein zweites particuläres Integral der Gleichung in y ist, und es werde $z_1 \int u\, dx$ für z

gesetzt; alsdann ist die Gleichung in u von der $(m-2)$ten Ordnung. Ist u_1 ein particuläres Integral dieser Gleichung, so ist $y_1 \int z_1\, dx \int u_1\, dx$ ein drittes particuläres Integral der ursprünglichen Gleichung. Macht man in dieser Weise weiter $m-1$ auf einander folgende Substitutionen, so gelangt man zu einer Gleichung von der Form:

$$\frac{dw}{dx} = tw,$$

von welcher ein Integral gefunden werden kann, und man wird im Ganzen m particuläre Integrale y erhalten.

Man zeige, dass diese particulären Integrale y unabhängig von einander sind und dass für diese Reihe von particulären Integralen

$$\Delta = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)}\, y_1^m\, z_1^{m-1}\, u_1^{m-2} \cdots w_1$$

ist. (Fuchs.)

§. 75.

Das particuläre Integral lässt sich nun mittelst der Methode der Variation der Parameter herleiten. Es ist dies die am meisten symmetrische Methode, jedoch werden wir im nächsten Abschnitt noch ein anderes Verfahren angeben. In der Gleichung

$$y = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots + A_n y_n$$

mögen die A anstatt als Constanten als Functionen von x angenommen werden. Dann wird der Werth von $\frac{dy}{dx}$ gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = A_1 \frac{dy_1}{dx} + A_2 \frac{dy_2}{dx} + \cdots + A_n \frac{dy_n}{dx}$$
$$+ y_1 \frac{dA_1}{dx} + y_2 \frac{dA_2}{dx} + \cdots + y_n \frac{dA_n}{dx}.$$

Da wir nun n Functionen A haben, während dieselben bisher nur der Bedingung unterworfen sind, dass für sie der vorstehende Werth von y der Gleichung (1) genügen soll, so können wir bewirken, dass sie noch $n-1$ beliebig angenommenen, nur mit einander verträglichen Bedingungen Genüge leisten. Als eine dieser Bedingungen wollen wir

$$y_1 \frac{dA_1}{dx} + y_2 \frac{dA_2}{dx} + \cdots + y_n \frac{dA_n}{dx} = 0$$

annehmen und haben dann:

$$\frac{dy}{dx} = A_1 \frac{dy_1}{dx} + A_2 \frac{dy_2}{dx} + \cdots + A_n \frac{dy_n}{dx}.$$

Differentiiren wir diese nochmals, so erhalten wir:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = A_1 \frac{d^2 y_1}{d x^2} + A_2 \frac{d^2 y_2}{d x^2} + \cdots + A_n \frac{d^2 y_n}{d x^2},$$

vorausgesetzt, dass wir als eine weitere Bedingung annehmen:

$$\frac{d y_1}{d x} \frac{d A_1}{d x} + \frac{d y_2}{d x} \frac{d A_2}{d x} + \cdots + \frac{d y_n}{d x} \frac{d A_n}{d x} = 0.$$

Gehen wir in dieser Weise weiter fort und nehmen wir die A derart an, dass sie den Gleichungen genügen:

$$\frac{d^2 y_1}{d x^2} \frac{d A_1}{d x} + \frac{d^2 y_2}{d x^2} \frac{d A_2}{d x} + \cdots + \frac{d^2 y_n}{d x^2} \frac{d A_n}{d x} = 0$$

$$\frac{d^3 y_1}{d x^3} \frac{d A_1}{d x} + \frac{d^3 y_2}{d x^3} \frac{d A_2}{d x} + \cdots + \frac{d^3 y_n}{d x^3} \frac{d A_n}{d x} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-2} y_1}{d x^{n-2}} \frac{d A_1}{d x} + \frac{d^{n-2} y_2}{d x^{n-2}} \frac{d A_2}{d x} + \cdots + \frac{d^{n-2} y_n}{d x^{n-2}} \frac{d A_n}{d x} = 0,$$

(welche mit den vorhergehenden beiden die $n-1$ mit einander nicht im Widerspruch stehenden Bedingungen, die wir festsetzen können, ausmachen), so erhalten wir:

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = A_1 \frac{d^3 y_1}{d x^3} + A_2 \frac{d^3 y_2}{d x^3} + \cdots + A_n \frac{d^3 y_n}{d x^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} = A_1 \frac{d^{n-1} y_1}{d x^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-1} y_2}{d x^{n-1}} + \cdots + A_n \frac{d^{n-1} y_n}{d x^{n-1}}.$$

Die letzte von diesen giebt, differentiirt:

$$\frac{d^n y}{d x^n} = A_1 \frac{d^n y_1}{d x^n} + A_2 \frac{d^n y_2}{d x^n} + \cdots + A_n \frac{d^n y_n}{d x^n}$$
$$+ \frac{d^{n-1} y_1}{d x^{n-1}} \frac{d A_1}{d x} + \frac{d^{n-1} y_2}{d x^{n-1}} \frac{d A_2}{d x} + \cdots + \frac{d^{n-1} y_n}{d x^{n-1}} \frac{d A_n}{d x}.$$

Da jedoch alle Bedingungen, die wir festsetzen können, angewendet worden sind, so darf der zweite Theil der rechten Seite nicht verschwinden. Multipliciren wir die so ausgedrückten Differentialquotienten von y mit den algebraischen Coefficienten, mit denen sie in der Gleichung (1) des §. 71 behaftet sind, und addiren wir die Resultate, so erhalten wir, da y eine Lösung von (1) und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ Lösungen der Gleichung (2) des §. 71 sind:

$$V = X_0 \left(\frac{d^{n-1} y_1}{d x^{n-1}} \frac{d A_1}{d x} + \frac{d^{n-1} y_2}{d x^{n-1}} \frac{d A_2}{d x} + \cdots + \frac{d^{n-1} y_n}{d x^{n-1}} \frac{d A_n}{d x} \right).$$

Ist Δ_r die zu $\frac{d^{n-1} y_r}{d x^{n-1}}$ gehörige Unterdeterminante in Δ für die Werthe $r = 1, 2, \ldots, n$, so ist die Lösung der n Gleichungen, welche die Werthe von $\frac{d A_1}{d x}, \frac{d A_2}{d x}, \cdots, \frac{d A_n}{d x}$ ergeben,

$$X_0 \Delta \frac{d A_r}{d x} = V \Delta_r$$

für alle Werthe von r. Hieraus ist:

$$\frac{d A_r}{d x} = \frac{V \Delta_r}{X_0 \Delta},$$

und daher:

$$A_r = C_r + \int \frac{V \Delta_r}{X_0 \Delta} \, d x,$$

worin C_r eine willkürliche Constante ist. Der Werth von y ist somit:

$$y = \sum_{r=1}^{r=n} y_r \left\{ C_r + \int \frac{V \Delta_r}{X_0 \Delta} d x \right\},$$

wobei das particuläre Integral ist:

$$y_1 \int \frac{V \Delta_1}{X_0 \Delta} \, d x + y_2 \int \frac{V \Delta_2}{X_0 \Delta} \, d x + \cdots + y_n \int \frac{V \Delta_n}{X_0 \Delta} \, d x.$$

1. Aufgabe. Man zeige, dass, wenn $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ drei particuläre Lösungen der Gleichung

$$\frac{d^3 y}{d x^3} + \varphi(x) \frac{d^2 y}{d x^2} + Q \frac{d y}{d x} + S y = 0$$

sind, wo Q und S Functionen von x allein vorstellen, alsdann das vollständige Integral von

$$\frac{d^3 y}{d x^3} + \varphi(x) \frac{d^2 y}{d x^2} + Q \frac{d y}{d x} + S y = \psi(x)$$

gegeben wird durch:

$$y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + C_3 f_3(x)$$
$$+ \int^x \psi(\xi) \, e^{\int_a^\xi \varphi(z) \, d z} \begin{vmatrix} \frac{d f_1(\xi)}{d \xi}, & \frac{d f_2(\xi)}{d \xi}, & \frac{d f_3(\xi)}{d \xi} \\ f_1(\xi), & f_2(\xi), & f_3(\xi) \\ f_1(x), & f_2(x), & f_3(x) \end{vmatrix} d \xi,$$

worin C_1, C_2, C_3 willkürliche Constanten und a eine bestimmte Constante ist.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} - 2 x (1 + x) \frac{d y}{d x} + 2 (1 + x) y = x.$

(2) $(x^2 + 2) \frac{d^3 y}{d x^3} - 2 x \frac{d^2 y}{d x^2} + (x^2 + 2) \frac{d y}{d x} - 2 x y = x^2 + 2.$

§. 76.

Wenn wir ein oder mehrere particuläre Integrale der Gleichung (2) des §. 71 kennen, so lässt sich die Ordnung der Gleichung um eine Zahl erniedrigen, die gleich der Anzahl der bekannten particulären Integrale ist. Nehmen wir z. B. an, dass wir wissen, es sei y_1 ein particuläres Integral der Gleichung, und verwandeln wir die Veränderliche aus y in $y_1 u$, so wird die Gleichung:

$$X_0 y_1 \frac{d^n u}{d x^n} + X_1' \frac{d^{n-1} u}{d x^{n-1}} + \cdots + X_{n-1}' \frac{d u}{d x}$$
$$+ u \left(X_0 \frac{d^n y_1}{d x^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_1}{d x^{n-1}} + \cdots + X_{n-1} \frac{d y_1}{d x} + X_n y_1 \right) = 0,$$

oder, was dasselbe ist:

$$X_0 y_1 \frac{d^n u}{d x^n} + X_1' \frac{d^{n-1} u}{d x^{n-1}} + \cdots + X_{n-1}' \frac{d u}{d x} = 0,$$

wobei X_1', X_2', ..., X_{n-1}' Functionen von X_0, X_1, ..., X_{n-1} und von Differentialquotienten von y_1 sind. Substituiren wir nun v für $\frac{d u}{d x}$, so ist die entstehende Gleichung von der $(n-1)$ten Ordnung, und die ursprüngliche Gleichung ist somit in ihrer Ordnung um eine Einheit erniedrigt.

Ist y_2 ein anderes particuläres Integral von (2), so ist $\frac{y_2}{y_1}$ ein Werth von u, und somit ist $\frac{d}{d x}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$ eine Lösung der Gleichung in v. Es kann daher diese in ihrer Ordnung um eine Einheit erniedrigt werden und die Ordnung der neuen Gleichung wird um zwei Einheiten kleiner sein, als die der Gleichung (2). Es wird ersichtlich sein, dass, wenn man in dieser Weise weiter geht, es möglich ist, die Ordnung einer Gleichung um m Einheiten zu vermindern, sobald m particuläre Integrale bekannt sind. Jede der erhaltenen Gleichungen bleibt linear.

§. 77.

Sind $n-1$ particuläre Integrale einer Gleichung $n$ter Ordnung bekannt, so lässt sich die Gleichung so weit erniedrigen, bis sie eine lineare Gleichung erster Ordnung ist, und da die letztere sich lösen lässt, so folgt, dass man die allgemeine Lösung einer Gleichung $n$ter Ordnung finden kann, sobald $n-1$ particuläre Integrale bekannt sind. Die folgende Methode, das allgemeine Integral zu erhalten, vermeidet den Process der allmäligen Erniedrigung der Ordnung der Differentialgleichung.

Es mögen die $n-1$ particulären Integrale der Gleichung (2) dargestellt werden durch $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, und es mögen $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ $n-1$ Functionen von x von solcher Beschaffenheit sein, dass

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_{n-1} y_{n-1}$$

eine Lösung von (2) ist. Da dies die einzige Bedingung zwischen den $n-1$ Functionen ist, so können wir nach Belieben noch $n-2$ andere Relationen annehmen, vorausgesetzt, dass sie mit einander nicht im Widerspruch stehen.

Sind dieselben:

$$y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \cdots + y_{n-1} \frac{dC_{n-1}}{dx} = 0$$

$$\frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx} + \cdots + \frac{dy_{n-1}}{dx}\frac{dC_{n-1}}{dx} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-3}y_1}{dx^{n-3}}\frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-3}y_2}{dx^{n-3}}\frac{dC_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-3}y_{n-1}}{dx^{n-3}}\frac{dC_{n-1}}{dx} = 0,$$

so sind die Werthe der auf einander folgenden Differentialquotienten von y gegeben durch:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \cdots + C_{n-1} \frac{dy_{n-1}}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + C_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + \cdots + C_{n-1} \frac{d^2y_{n-1}}{dx^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = C_1 \frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} + C_2 \frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}} + \cdots + C_{n-1} \frac{d^{n-2}y_{n-1}}{dx^{n-2}}$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = C_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + C_2 \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \cdots + C_{n-1} \frac{d^{n-1}y_{n-1}}{dx^{n-1}} + \sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{dC_r}{dx}\frac{d^{n-2}y_r}{dx^{n-2}}$$

$$\frac{d^n y}{d x^n} = C_1 \frac{d^n y_1}{d x^n} + C_2 \frac{d^n y_2}{d x^n} + \cdots + C_{n-1} \frac{d^n y_{n-1}}{d x^n}$$
$$+ 2 \sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{d C_r}{d x} \frac{d^{n-1} y_r}{d x^{n-1}} + \sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{d^2 C_r}{d x^2} \frac{d^{n-2} y_r}{d x^{n-2}}.$$

Die Substitution dieser Werthe in die Gleichung (2) giebt, da $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ particuläre Lösungen sind:

$$X_0 \left\{ \sum_{r=1}^{r=n-1} \left(\frac{d^2 C_r}{d x^2} \frac{d^{n-2} y_r}{d x^{n-2}} + 2 \frac{d C_r}{d x} \frac{d^{n-1} y_r}{d x^{n-1}} \right) \right\}$$
$$+ X_1 \sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{d C_r}{d x} \frac{d^{n-2} y_r}{d x^{n-2}} = 0.$$

Bezeichnet man mit Δ die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{n-2} y_1}{d x^{n-2}}, & \frac{d^{n-2} y_2}{d x^{n-2}}, & \ldots, & \frac{d^{n-2} y_{n-1}}{d x^{n-2}} \\ \frac{d^{n-3} y_1}{d x^{n-3}}, & \frac{d^{n-3} y_2}{d x^{n-3}}, & \ldots, & \frac{d^{n-3} y_{n-1}}{d x^{n-3}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_{n-1} \end{vmatrix}$$

und mit Δ_r die zu $\frac{d^{n-2} y_r}{d x^{n-2}}$ gehörige Unterdeterminante in derselben für die Werthe $r = 1, 2, \ldots, n-1$, so erhält man:

$$\frac{\frac{d C_1}{d x}}{\Delta_1} = \frac{\frac{d C_2}{d x}}{\Delta_2} = \cdots = \frac{\frac{d C_{n-1}}{d x}}{\Delta_{n-1}} = z,$$

und daher für jene Werthe von r:

$$\frac{d C_r}{d x} = z \Delta_r.$$

Hieraus folgt:

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{d C_r}{d x} \frac{d^{n-1} y_r}{d x^{n-1}} = z \sum_{r=1}^{r=n-1} \Delta_r \frac{d^{n-1} y_r}{d x^{n-1}} = z \frac{d \Delta}{d x}$$

und:

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{d C_r}{d x} \frac{d^{n-2} y_r}{d x^{n-2}} = z \sum_{r=1}^{r=n-1} \Delta_r \frac{d^{n-2} y_r}{d x^{n-2}} = z \Delta.$$

Ferner ist:

$$\frac{d^2 C_r}{d x^2} = \frac{d z}{d x} \Delta_r + z \frac{d \Delta_r}{d x}$$

und:

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{d\varDelta_r}{dx}\,\frac{d^{n-2}y_r}{dx^{n-2}} = 0,$$

so dass wird:

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{d^2 C_r}{dx^2}\,\frac{d^{n-2}y_r}{dx^{n-2}} = \frac{dz}{dx}\sum_{r=1}^{r=n-1} \varDelta_r\,\frac{d^{n-2}y_r}{dx^{n-2}} = \varDelta\,\frac{dz}{dx}.$$

Die transformirte Gleichung ist daher:

$$X_0\,\varDelta\,\frac{dz}{dx} + 2\,X_0\,\frac{d\varDelta}{dx}\,z + X_1\,\varDelta\,z = 0.$$

Dividiren wir durch $X_0\,\varDelta$, so erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{dz}{dx} + \left(\frac{2}{\varDelta}\,\frac{d\varDelta}{dx} + \frac{X_1}{X_0}\right) z = 0,$$

deren Integral ist:

$$z = A\,\varDelta^{-2}\,e^{-\int \frac{X_1}{X_0}\,dx}.$$

Der entsprechende Werth von C_r wird abgeleitet aus

$$\frac{dC_r}{dx} = z\,\varDelta_r = A\,\frac{\varDelta_r}{\varDelta^2}\,e^{-\int \frac{X_1}{X_0}\,dx}$$

und ist daher:

$$C_r = A_r + A\int \frac{\varDelta_r}{\varDelta^2}\,e^{-\int \frac{X_1}{X_0}\,dx}\,dx$$

für die Werthe $r = 1, 2, .., n-1$. Wir haben somit n willkürliche Constanten, nämlich $A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, und die Stammgleichung von (2) ist demnach:

$$y = \sum_{r=1}^{r=n-1} A_r\,y_r + A\sum_{r=1}^{r=n-1} y_r \int \frac{\varDelta_r}{\varDelta^2}\,e^{-\int \frac{X_1}{X_0}\,dx}\,dx.$$

Aufgabe. Man löse vollständig die Gleichung:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = P\left(x^2\,\frac{d^2y}{dx^2} - 2\,x\,\frac{dy}{dx} + 2y\right) + Q,$$

in welcher P und Q irgend welche Functionen von x sind.

Geometrische Anwendung: Trajectorien.

§. 78.

Es ist bereits bemerkt worden, dass eine Differentialgleichung der eigentliche analytische Ausdruck für irgend eine Eigenschaft

einer Curve ist, die mit ihrer Richtung und Krümmung zusammenhängt, und es folgt somit, dass die Beantwortung vieler geometrischer Fragen schliesslich von der Lösung einer Differentialgleichung abhängt. In den höheren Theilen der Mathematik kommen fast nur Differentialgleichungen vor; auf anderen Gebieten ist es aber weniger wie in der Geometrie möglich, Beispiele anzuführen, da es keine nothwendiger Weise allgemeine Methode, um zu der Differentialgleichung zu gelangen, giebt, während ihre Herleitung bei geometrischen Aufgaben fast unmittelbar durch den Gebrauch der Formeln der Differentialrechnung geschieht. Es soll hier nicht versucht werden, irgend welche vollständige Classification der Anwendungen auf Geometrie zu geben, vielmehr soll nur ein einziges allgemeines Problem besprochen werden, nämlich das der Trajectorien.

Eine Trajectorie ist definirt als eine Linie, welche in ihren Schnittpunkten mit den einzelnen Curven einer durch eine Gleichung dargestellten Curvenschaar dieselben nach irgend einem gegebenen Gesetze schneidet.

§. 79.

Als die allgemeinste Form, die möglich ist, möge

$$f(x, y, a) = 0$$

eine Schaar von Curven bezeichnen, deren Parameter a ist; durch jeden Punkt einer Curve wird eine Trajectorie hindurchgehen, und es wird somit ein zweites System von Curven geben, welches diese Trajectorien darstellt. Die laufenden Coordinaten dieses zweiten Systems mögen ξ und η sein, und es werde angenommen, dass der analytische Ausdruck des Gesetzes, welches in jedem Schnittpunkt stattfindet, der folgende sei:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}, \frac{d^2\eta}{d\xi^2}, \cdots\right) = 0.$$

In dieser Gleichung sind für jeden Schnittpunkt ξ und η respective dasselbe wie x und y, da es die Coordinaten dieses Punktes sind; dagegen sind $\frac{d\eta}{d\xi}, \cdots$ nicht dasselbe wie $\frac{dy}{dx}, \cdots$, da sie die Richtung und Krümmung von zwei sich schneidenden Curven angeben.

Wir verfahren nun folgendermaassen:

Aus der Gleichung

$$f(x, y, a) = 0$$

erhalten wir die Werthe aller Differentialquotienten von y, welche in der Gleichung $F = 0$ vorkommen, als Functionen von x, y und a, und in jedem dieser Ausdrücke substituiren wir den Werth von a als Function von x und y, wie er aus der Gleichung der Curve sich ergiebt. Es ist dies gleichbedeutend damit, dass wir a zwischen $f = 0$ und der Gleichung, die einen jeden Differentialquotienten giebt, eliminiren. Werden diese Werthe der Differentialquotienten von y in die Gleichung $F = 0$ substituirt, so geht sie über in eine Gleichung, welche x, y, ξ, η und Differentialquotienten von η nach ξ enthält. Wir haben aber gesehen, dass x und y dasselbe sind wie ξ und η, da beide Grössensysteme die Coordinaten desselben Punktes sind; mithin wird $F = 0$ eine Differentialgleichung in η und ξ allein.

§. 80.

Das am häufigsten vorkommende Beispiel von Trajectorien ist dasjenige, bei welchem ein System von Curven gefunden werden soll, welches ein gegebenes System unter einem constanten Winkel schneidet. Ist dieser Winkel ein rechter Winkel, so heisst die Trajectorie rechtwinkelig; ist der Winkel ein anderer als ein rechter Winkel, so heisst die Trajectorie schiefwinkelig.

Im Falle der rechtwinkeligen Trajectorien stehen die Tangenten in dem gemeinschaftlichen Punkte auf einander senkrecht, und es ist daher:

$$1 + \frac{dy}{dx}\frac{d\eta}{d\xi} = 0.$$

Dies ist für diesen Fall die Form der Gleichung $F = 0$. Für das gegebene System von Curven haben wir:

$$f(x, y, a) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Eliminiren wir hieraus a, so erhalten wir eine Gleichung zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$, welche in Wirklichkeit die Differentialgleichung dieses Systems von Curven ist. Diese Gleichung möge sein:

$$\psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Für die Trajectorie haben wir nun:

$$\xi = x,\ \eta = y$$

und:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{d\eta}{d\xi}};$$

mithin ist die Differentialgleichung der Trajectorie:

$$\psi\left(\xi,\ \eta,\ -\frac{1}{\frac{d\eta}{d\xi}}\right) = 0.$$

Die Elimination des Parameters ist unmittelbar ausgeführt, wenn die Gleichung der gegebenen Curvenschaar in der Form erscheint:

$$\varphi\,(x; y) = a.$$

Denn dann erhalten wir:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

aus welcher sich ohne Weiteres $\frac{dy}{dx}$ unabhängig von a ergiebt und die die Form der Gleichung $\psi = 0$ für diesen Fall darstellt.

§. 81.

Ist die Gleichung der Curve in Polarcoordinaten gegeben, so kann man dieselbe Methode anwenden. Denn dann ist

$$\chi\,(r,\ \vartheta,\ c) = 0$$

die Gleichung der Curvenschaar. Ist φ der Winkel zwischen dem Radiusvector und dem Theile der Tangente der Curve, welcher von dem Punkte aus nach der entgegengesetzten Richtung geht, wie die Linie, von welcher aus der Winkel ϑ gemessen ist, so haben wir:

$$tang\ \varphi = r\frac{d\vartheta}{dr},$$

während, wenn Φ die nämliche Grösse für die Trajectorie ist und R und Θ die Polarcoordinaten eines Punktes derselben sind,

$$tang\ \Phi = R\frac{d\Theta}{dR}$$

ist. Da die Tangenten rechtwinkelig zu einander sind, so ist:

$$\Phi - \varphi = \frac{\pi}{2}$$

und daher:

$$r \frac{d\vartheta}{dr} R \frac{d\Theta}{dR} + 1 = 0,$$

worin R und r, sowie Θ und ϑ (aber nicht ihre Ableitungen) dieselben Grössen sind.

Nun ist:

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{dr} = 0.$$

Eliminiren wir c zwischen dieser Gleichung und der Gleichung der Curve, so finden wir eine Relation von der Form:

$$\psi\left(r, \vartheta, \frac{d\vartheta}{dr}\right) = 0.$$

Für die Trajectorie ist:

$$R = r, \ \Theta = \vartheta \text{ und } \frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{1}{R^2 \frac{d\Theta}{dR}} = -\frac{1}{R^2}\frac{dR}{d\Theta},$$

und daher ist die Differentialgleichung der Trajectorie:

$$\psi\left(R, \Theta, -\frac{1}{R^2}\frac{dR}{d\Theta}\right) = 0.$$

Diese giebt integrirt die Gleichung des Systems von Curven, welches die verlangte Eigenschaft besitzt.

1. Aufgabe. Man bestimme die orthogonale Trajectorie der Schaar von geraden Linien:

$$y = mx.$$

Wir haben:

$$\frac{dy}{dx} = m,$$

und daher ist die Differentialgleichung dieser Linien:

$$x\frac{dy}{dx} = y.$$

Mithin ist nach unserer Regel die Differentialgleichung des Systems der orthogonalen Trajectorien:

$$\xi = -\eta \frac{d\eta}{d\xi},$$

und diese giebt durch Integration:

$$\xi^2 + \eta^2 = c^2,$$

also eine Schaar von concentrischen Kreisen, welche als gemeinsamen Mittelpunkt den gemeinschaftlichen Punkt der Linien haben.

2. Aufgabe. Man suche die orthogonale Trajectorie von

$$r^n = a^n \sin n \vartheta.$$

Nehmen wir den Logarithmus und differentiiren dann, so erhalten wir:

$$\frac{n}{r}\frac{dr}{d\vartheta} = n\frac{\cos n\vartheta}{\sin n\vartheta},$$

und dieses ist die Differentialgleichung der Curvenschaar. Für die Trajectorie ist:

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\vartheta} = -R\frac{d\Theta}{dR},$$

und daher ist die Differentialgleichung der Trajectorie:

$$R\frac{d\Theta}{dR} + \frac{\cos n\Theta}{\sin n\Theta} = 0.$$

Die Veränderlichen lassen sich separiren, und es ist:

$$n\frac{dR}{R} = -n\frac{\sin n\Theta}{\cos n\Theta}\, d\Theta,$$

so dass

$$R^n = A^n \cos n\Theta$$

die gesuchte Curvenschaar darstellt.

3. Aufgabe. Man beweise, dass, welches auch der Werth von n sein möge, die orthogonalen Trajectorien der in der Gleichung

$$y = cx^n$$

enthaltenen Curven eine Schaar von Kegelschnitten ist.

4. Aufgabe. Man zeige, dass die orthogonalen Trajectorien eines Systems confocaler Ellipsen ein mit den Ellipsen confocales System von Hyperbeln sind.

5. Aufgabe. Man suche die orthogonalen Trajectorien der Curvenschaaren:

$$(1) \quad r^n \sin n\vartheta = a^n,$$

$$(2) \quad r^2 = a^2 \log(c \tang. \vartheta),$$

wo c willkürlich ist.

6. Aufgabe. Man zeige, dass, wenn $f(x + iy)$ mit $u + iv$ bezeichnet wird, wo u und v reell sind, alsdann die Curvenschaaren

$$u = const, \quad v = const$$

die orthogonalen Trajectorien von einander sind.

Insbesondere zeige man, dass, wenn das so erhaltene u homogen von der $n$ten Ordnung ist, alsdann der Werth von u gegeben wird durch:

$$nu = x\frac{\partial v}{\partial y} - y\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Wie kann der Werth von u gefunden werden, wenn $n = 0$ ist?

7. Aufgabe. Man suche ein System von Curven, welche ein System von concentrischen Kreisen unter einem anderen als einem rechten Winkel schneiden.

§. 82.

Wenn eine der Veränderlichen als eine explicite Function der anderen und des Parameters gegeben ist, so wird die Gleichung von der Form sein:

$$y = \varphi\,(x,\, a).$$

Anstatt nun a zu eliminiren, können wir folgendermaassen verfahren. Die Gleichung der orthogonalen Trajectorien sei:

$$\eta = \varphi\,(\xi,\, a),$$

wobei in der letzten Gleichung a als eine unbekannte Function von ξ zu betrachten ist, die so bestimmt werden soll, dass die Curve die orthogonale Trajectorie sein kann. Wir haben nun:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x}$$

$$\frac{d\,\eta}{d\,\xi} = \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\xi} + \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,a}\,\frac{d\,a}{d\,\xi},$$

und daher:

$$\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x}\left(\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\xi} + \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,a}\,\frac{d\,a}{d\,\xi}\right) + 1 = 0.$$

Da nun keine weiteren Differentiationen auszuführen sind, so können wir $\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\xi}$ an Stelle von $\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x}$ setzen, weil x gleich ξ ist. Demnach erhalten wir:

$$1 + \left(\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\xi}\right)^2 + \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,a}\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\xi}\,\frac{d\,a}{d\,\xi} = 0.$$

Dies ist eine Gleichung zwischen den beiden Veränderlichen a und ξ. Ist dieselbe integrirt, so bestimmt sie den Werth von a, und wird dieser in die Gleichung

$$\eta = \varphi\,(\xi,\, a)$$

eingesetzt, so ergiebt sich die orthogonale Trajectorie.

Aufgabe. Man suche die orthogonalen Trajectorien der durch die Gleichung

$$y = a\,(1 - x^2)^{1/2}$$

dargestellten Ellipsen.

Hier ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = - a \xi (1 - \xi^2)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = (1 - \xi^2)^{1/2},$$

und die Gleichung, welche a bestimmt, ist:

$$1 + a^2 \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} - \xi a \frac{d a}{d \xi} = 0.$$

Dieselbe giebt:

$$\frac{d a^2}{d \xi} - \frac{2 \xi a^2}{1 - \xi^2} = \frac{2}{\xi}.$$

Diese führt durch Integration zu der Gleichung:

$$a^2 (1 - \xi^2) = A - \xi^2 + \log \xi^2.$$

Somit ist die gesuchte orthogonale Trajectorie:

$$\eta^2 = A - \xi^2 + \log \xi^2.$$

Vermischte Aufgaben.

1. Man löse die Gleichungen:

(1) $\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{2}{x} \frac{d y}{d x} + \left(n^2 - \frac{2}{x^2}\right) y = 0.$

(2) $2 y \frac{d^2 y}{d x^2} - 3 \left(\frac{d y}{d x}\right)^2 - 4 y^2 = 0.$

(3) $y^3 + \left\{y^2 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2\right\} \frac{d^2 y}{d x^2} = 0.$

(4) $x \frac{d^2 y}{d x^2} + [2 - x \varphi(x)] \frac{d y}{d x} = y \varphi(x).$

(5) $\left(y - x \frac{d y}{d x}\right) \frac{d^2 y}{d x^2} = 4 \left(\frac{d y}{d x}\right)^2.$

(6) $\frac{d^2 y}{d x^2} + 2 n \cot n x \frac{d y}{d x} + (m^2 - n^2) y = 0.$

(7) $x (x + y) \frac{d^2 y}{d x^2} + (x - y) \frac{d y}{d x} + x \left(\frac{d y}{d x}\right)^2 - y = 0.$

(8) $\left(\frac{d y}{d x}\right)^2 - y \frac{d^2 y}{d x^2} = n \left\{\left(\frac{d y}{d x}\right)^2 + a^2 \left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)^2\right\}^{1/2}.$

(9) $\sin^2 x \frac{d^2 y}{d x^2} = 2 y.$

(10) $\frac{d^2 y}{d x^2} + \left(\frac{d y}{d x}\right)^n f(x) + \frac{d y}{d x} \varphi(x) = 0.$

2. Unter der Voraussetzung, dass das Integral von

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) y = 0$$

die Form $y = u + \frac{v}{x}$ besitzt, beweise man, dass das allgemeine Integral dargestellt wird durch:

$$u = A \sin (x + \alpha), \qquad v = A \cos (x + \alpha),$$

und bestimme die vollständige Stammgleichung von

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) y = x^2.$$

3. Durch die Methode der Variation der Parameter leite man das Integral ab von

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - 2 \left(n - \frac{1}{x}\right) \frac{d y}{d x} + \left(n^2 - \frac{2 n}{x}\right) y = 0.$$

4. Man beweise, dass die Gleichung

$$(a_2 + b_2 x) \frac{d^2 y}{d x^2} + (a_1 + b_1 x) \frac{d y}{d x} + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

ein particuläres Integral von der Form $e^{\lambda x}$ besitzt, vorausgesetzt, dass

$$(a_0 b_1 - b_0 a_1)(a_1 b_2 - b_1 a_2) = (a_0 b_2 - b_0 a_2)^2$$

ist, und löse hiernach die Gleichung. (Schlömilch.)

5. Man integrire die Gleichung:

$$\sin^2 x \frac{d^2 u}{d x^2} + \sin x \cos x \frac{d u}{d x} = u.$$

Ist $u = 0$ für $x = 0$ und $u = 1$ für $x = \frac{\pi}{2}$, so ist $u = \sqrt{2} - 1$ für $x = \frac{\pi}{4}$.

Ebenso löse man die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + y = 2 y \left(1 - \frac{n+1}{2} \frac{y^{2n}}{a^{2n}}\right),$$

indem man die willkürlichen Constanten durch die Bedingungen bestimmt, dass $y = a$ und $\frac{d y}{d x} = 0$ sein solle für $x = 0$.

6. Die Gleichungen

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + P \frac{d y}{d x} + Q y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + P' \frac{d y}{d x} + Q' y = 0$$

haben eine Lösung gemeinschaftlich; man bestimme die vollständige Lösung einer jeden und die nothwendige Bedingung zwischen den als Functionen von x vorausgesetzten Grössen P, P', Q, Q'.

7. Man zeige, dass sich die Gleichung

$$\frac{1}{v}\frac{d^2 v}{d x^2} = \left(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \frac{1}{2}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}), \frac{1}{2}(\mathfrak{b}-\mathfrak{c}-\mathfrak{a}), \frac{1}{2}(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\right)\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{x-b}, \frac{1}{x-c}\right)^2$$

nach der Methode des §. 68 integriren lässt, vorausgesetzt, dass die Gleichung

$$\left(\mathfrak{a} + \frac{1}{4}\right)^{1/2} + \left(\mathfrak{b} + \frac{1}{4}\right)^{1/2} + \left(\mathfrak{c} + \frac{1}{4}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}$$

erfüllt ist für irgend ein System von Vorzeichen, die man den Wurzelgrössen giebt.

Man bestimme das Integral, wenn diese Bedingung erfüllt ist.

8. Man löse die Gleichung

$$(x + a)^2 (x + b)^2 \frac{d^2 y}{d x^2} = k^2 y,$$

worin a, b, k Constanten sind, durch die Annahme:

$$y = (x + a)^m (x + b)^n$$

und bestimme das allgemeine Integral.

Man löse ebenso die Gleichung:

$$(a + x)(b + x)\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{1}{2}(a + 2b + 3x)\frac{d y}{d x} + \frac{1}{4}\frac{a - b}{a + x} y = 0,$$

und ebenso die 1. Aufgabe in §. 68.

9. Man beweise, dass, wenn $\varphi(x)$ ein particuläres Integral der Gleichung

$$\frac{d^2 z}{d x^2} = a x^{n-2} z$$

ist, alsdann $x \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ ein particuläres Integral der Gleichung

$$\frac{d^2 z}{d x^2} = a x^{-n-2} z$$

ist, und löse hiernach die Gleichung:

$$x^4 \frac{d^2 z}{d x^2} = A z.$$

10. Man zeige, dass, wenn $z = \varphi(x)$ eine Lösung ist von

$$\frac{d^2 z}{d x^2} = z \psi(x),$$

alsdann $\zeta = (c x + d)\varphi\left(\frac{a x + b}{c x + d}\right)$ eine Lösung ist von

$$(c x + d)^4 \frac{d^2 \zeta}{d x^2} = \zeta \psi\left(\frac{a x + b}{c x + d}\right),$$

wobei die Constanten a, b, c, d durch die Relation

$$a d - b c = 1$$

verbunden sind, und löse hiernach die erste Aufgabe in 8.

11. Man zeige, wie man die Gleichung

$$\frac{d^n y}{d x^n} + \frac{A_1}{a + b x} \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \frac{A_2}{(a + b x)^2} \frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}} + \cdots + \frac{A_n}{(a + b x)^n} y = X,$$

worin X eine Function von x allein und $A_1, \ldots, A_n$ Constanten sind, auflöst.

12. Man integrire die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + (2 X + a) \frac{d y}{d x} + \left(\frac{d X}{d x} + X^2 + a X + b\right) y = 0,$$

wo X irgend eine Function von x ist.

13. Man zeige, dass, wenn eine particuläre Lösung der Gleichung

$$\frac{d y}{d x} + X_1 y^2 + X_2 = 0,$$

wo X_1 und X_2 Functionen von x sind, bekannt ist, die Lösung vervollständigt werden kann. Hiernach löse man die Gleichung:

$$\frac{d y}{d x} + y^2 \sin x = 2 \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

14. Wenn die Stammgleichung von

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = p \frac{d y}{d x} + q y = 0$$

lautet:

$$y = A y_1 + B y_2,$$

so zeige man, dass die Differentialgleichung, welche

$$z = A' y_1{}^m + B' y_2{}^m$$

zur Stammgleichung hat, die folgende ist:

$$F(x) \frac{d^2 z}{d x^2} + \left\{p F(x) - (m-1) \frac{d F}{d x}\right\} \frac{d z}{d x}$$

$$+ m \left\{\frac{1}{2} (m-1) \frac{d^2 F}{d x^2} + \frac{1}{2} (m-1) p \frac{d F}{d x} + m q F(x)\right\} z = 0,$$

wobei

$$F(x) = y_1 y_2$$

gesetzt ist. (Spitzer.)

15. Man beweise, dass, wenn y_1 und y_2 zwei particuläre Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + P \frac{d y}{d x} + Q y = 0$$

sind, die Wurzeln von $y_1 = 0$ und $y_2 = 0$ einander trennen, so lange als diese beiden Integrale stetig bleiben. (Sturm.)

16. Man löse die Gleichungen:

(1) $$\sin^2 \vartheta \frac{d^2 y}{d \vartheta^2} + \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{d y}{d \vartheta} - y = \vartheta - \sin \vartheta.$$

(2) $$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{1}{x^2 \log x} y = e^x \left(\frac{2}{x} + \log x\right).$$

(3) $$(1 + a x^2) \frac{d^2 y}{d x^2} + a x \cdot \frac{d y}{d x} = n^2 y,$$

(4) $$x^2 (x^2 + a) \frac{d^2 y}{d x^2} + x (2 x^2 + a) \frac{d y}{d x} = n^2 y,$$

(5) $$\frac{d^2 y}{d x^2} - 2 \left(n - \frac{a}{x}\right) \frac{d y}{d x} + \left(n^2 - \frac{2 n a}{x}\right) y = e^{n x},$$

(6) $$(a^2 - x^2) \frac{d^2 y}{d x^2} - 8 x \frac{d y}{d x} - 12 y = 0,$$

(7) $$(3 - x) \frac{d^2 y}{d x^2} - (9 - 4 x) \frac{d y}{d x} + (6 - 3 x) y = 0.$$

17. Man löse die Gleichung:

$$P \frac{d^2 y}{d x^2} + Q \frac{d y}{d x} - R y = 0,$$

in welcher Q und R der Relation

$$R \left(\frac{d Q}{d x} - R\right) = Q \frac{d R}{d x}$$

genügen. Wird diese Relation nicht erfüllt, lässt sich dann vielleicht die Gleichung lösen durch Einführung eines Factors μ, welcher so gewählt wird, dass die neuen Coefficienten diese Relation befriedigen?

18. Man löse die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = a - \frac{b y}{(2 c x - x^2)^2}. \qquad \text{(Stokes.)}$$

19. Man suche die Form von φ von solcher Beschaffenheit, dass, wenn $x = \varphi(z)$ in die Gleichung

$$x^4 \frac{d^2 y}{d x^2} + 2 x^3 \frac{d y}{d x} + n^2 y = 0$$

eingesetzt wird, dieselbe übergeht in

$$\frac{d^2 y}{d z^2} + n^2 y = 0,$$

und löse hiernach die erste Gleichung.

20. Man zeige, dass die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + P \frac{d y}{d x} + Q y = 0$$

transformirt werden kann in

$$\frac{d^2 y}{d z^2} + F(z) \frac{d y}{d z} + y \Phi(z) = 0,$$

wenn die Beziehung zwischen z und x gegeben ist durch:

$$\int d z\, e^{-\int F(z) d z} = \int d x\, e^{-\int P d x}$$

und $\Phi(z)$ sich bestimmt aus:

$$Q e^{2 \int P d x} = \Phi(z) e^{2 \int F(z) d z}.$$

Hiernach bringe man die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - \frac{1}{x} \frac{d y}{d x} = x^2 y \, (n^2 - e^{x^2})$$

auf die Form:

$$\frac{d^2 y}{d z^2} + \frac{1}{z} \frac{d y}{d z} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) y = 0.$$

21. Man löse die Gleichung:

$$\frac{d^2 v}{d z^2} + 2 \left(\frac{1}{z} + \frac{B}{z^2}\right) \frac{d v}{d z} + \frac{A}{z^4} \, v = 0,$$

worin A und B Constanten sind.

Man zeige, dass die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + 2 \left(\frac{B'}{x^3} + \frac{3}{2 x}\right) \frac{d y}{d x} + \frac{\mu \, y}{x^6} = 0$$

in die vorstehende Gleichung transformirbar ist durch die Substitution:

$$x = \sin\,(\operatorname{arc} \operatorname{tang} z^{1/2}),$$

vorausgesetzt, dass

$$B'^2 = 4 B^2 - 4 A + \mu$$

ist, und suche die Relation zwischen y und v. Hiernach löse man die zweite Gleichung.

22. Indem man die abhängige Veränderliche y in e^z verwandelt, löse man die Gleichung:

$$P \frac{d^2 y}{d x^2} - \frac{d P}{d x} \frac{d y}{d x} = a^2 P^3 y,$$

und hiernach die Gleichung:

$$\frac{d^2 v}{d x^2} + 2 \frac{d v}{d x} X = \frac{1}{2} v \left\{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{P} \frac{d P}{d x}\right)^2 - \frac{d}{d x} \left(\frac{1}{P} \frac{d P}{d x}\right) + 2 \, (a^2 P^2 - X^2) - 2 \frac{d X}{d x}\right\}.$$

(Sparre.)

23. Man zeige, dass das vollständige Integral der Gleichung

$$\frac{d^2 \sigma}{d x^2} - \frac{5}{4 \sigma} \left(\frac{d \sigma}{d x}\right)^2 + \frac{2}{3} \sigma^2 = 0,$$

worin σ die Schwarz'sche Abgeleitete von y nach x ist, lautet:

$$y \, (A' + B' x + C' x^2) = A + B x + C x^2.$$

24. Der Bogen einer ebenen Curve, gemessen von einem festen Punkte A bis zu einem Punkte P, dessen rechtwinkelige Coordinaten x und y sind, werde mit s bezeichnet. Man bestimme die allgemeinen Gleichungen in Cartesischen Coordinaten von denjenigen Curven, für welche die folgenden Gleichungen respective bestehen:

(1) $s = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

(2) $s = c \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$.

(3) $\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = a \frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2}$.

(4) $s = a \frac{dy}{dx}$.

(5) $\frac{ds}{dy} + 3y \frac{d^2s}{dy^2} = 0$.

(6) $s = (x^2 + 2cx)^{1/2}$.

(7) $s = (y^2 + mx^2)^{1/2}$.

25. Man suche die allgemeine Differentialgleichung aller Parabeln, welche die Achsen berühren und eine Berührungssehne von constanter Länge haben. Man löse die erhaltene Gleichung.

Man suche ebenso die Differentialgleichung aller Parabeln, welche die Achsen berühren.

26. Man integrire vollständig die Differentialgleichung der Curve, in welcher der Krümmungsradius dem von einem festen Punkte aus gemessenen Bogen proportional ist.

27. Man suche die Curve, bei welcher das Product der von zwei festen Punkten auf die Tangente gefällten Lothe constant ist.

28. Man suche die Curve, welche eine Evolute von derselben Art, wie sie selbst ist, besitzt.

29. Man suche eine Differentialgleichung erster Ordnung für die Curve, deren Krümmungsradius n-mal so gross ist als die Normale, und zeige, dass sie für ein ganzzahliges n immer in endlicher Form integrirbar ist.

Insbesondere zeige man, dass die Curve für $n = -2$ eine Cykloide, für $n = -1$ ein Kreis und für $n = +1$ eine Kettenlinie ist.

30. Man bestimme ein System von Curven, welche eine Schaar confocaler Ellipsen unter einem anderen als einem rechten Winkel schneiden. (Mainardi.)

31. Man bestimme die orthogonalen Trajectorien der Curven:

(1) $x^2 + y^2 = cx$,

(2) $x^2 + y^2 + c^2 = 1 + 2cxy$,

(3) $x^3 + y^3 = 3axy$,

(4) $rr' = c^2$,

wo in der letzten r und r' die Entfernungen von zwei festen Punkten sind.

32. Die Curve, für welche die Ordinate und Abscisse des Schwerpunktes der zwischen den Ordinaten $x = a$ und $x = x$ eingeschlossenen

Fläche dasselbe Verhältniss haben, wie die begrenzende Ordinate y und die Abscisse x, wird gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{a^3}{x^3} - \frac{b^3}{y^3} = 1.$$

33. Die Curve, deren Polargleichung $r^m \cos m\vartheta = a^m$ ist, rollt auf einer festen geraden Linie. Indem man diese Gerade als x-Achse nimmt, zeige man, dass die von dem auf der rollenden Curve gelegenen Pole beschriebene Curve zur Gleichung hat:

$$dx = \left\{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2m}{1-m}} - 1\right\}^{-\frac{1}{2}} dy.$$

Im Besonderen zeige man, dass für $2m = 1$ die beschriebene Curve eine Kettenlinie, für $m = 2$ eine elastische Curve ist. (Frenet.)

34. Man zeige, dass, wenn ein erstes Integral der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y)$ in der Form $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, c)$ gegeben ist, die Stammgleichung lautet:

$$\int \frac{d\varphi}{dc}(dy - \varphi\, dx) = C.$$

(Jacobi.)

Ein erstes Integral von $\frac{d^2y}{dx^2} = y\,(1 + 2\,tang^2 x)$ ist von der Form $\frac{dy}{dx} = y\,\varphi(x) + c\,\psi(x)$; man bestimme die Stammgleichung.

Fünftes Capitel.

Integration durch Reihen.

§. 83.

Es kann vorkommen, dass eine Differentialgleichung, deren Lösung gesucht wird, zu keiner der vorher angeführten Classen, welche sämmtlich von einer gewissen besonderen Form sind, gehört, dass daher die auf jene anwendbaren Methoden versagen; man hilft sich dann damit, den Werth der abhängigen Veränderlichen durch Annäherung zu ermitteln. Die Form der näherungsweisen Bestimmung, welche am häufigsten angewendet wird, ist die mittelst **convergirender Reihen**; indem man eine sehr grosse Zahl von Gliedern beibehält, kann man den Fehler beliebig klein machen und die Reihe als den Werth der Veränderlichen betrachten. Dass diese Methode von vornherein sich rechtfertigen lässt, kann man folgendermaassen zeigen.

Die gegebene Gleichung ist eine Relation zwischen den auf einander folgenden Differentialquotienten von y; sie lässt sich als eine Gleichung betrachten, welche denjenigen von der höchsten Ordnung als Function derer von niederer Ordnung ergiebt. So würde sie z. B., wenn sie von der zweiten Ordnung wäre, $\frac{d^2y}{dx^2}$ als Function von $\frac{dy}{dx}$ und y ergeben. Differentiirte man sie einmal, so würde sie $\frac{d^3y}{dx^3}$ als Function von $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ und y, d. h., da $\frac{d^2y}{dx^2}$ durch $\frac{dy}{dx}$ und y ausdrückbar ist, als Function von diesen beiden ergeben, u. s. w. für jeden der Differentialquotienten von höherer Ordnung, die sich auf diese Weise darstellen lassen als Functionen von $\frac{dy}{dx}$ und y.

Indessen giebt die Differentialgleichung keine Beziehung zwischen $\frac{dy}{dx}$ und y, die somit unabhängig von einander sind. Man nehme nun an, dass man dem x einen Werth a beilege, und dass für diesen Werth von x gesetzt werde $y = A$ und $\frac{dy}{dx} = B$, welches im Allgemeinen willkürliche Constanten sind. Alsdann liefern die Gleichungen, welche durch successive Differentiation entstanden sind, die Werthe der Differentialquotienten von y der auf einander folgenden Ordnungen für $x = a$. Diese mögen mit $C, D, E \ldots$ bezeichnet sein. Wenn nun der Werth von y $\varphi(x)$ ist, welches, wie wir annehmen, eine Function ist, die sich nach dem Taylor'schen Satze in eine nach aufsteigenden Potenzen von $x - a$ fortschreitende convergente Reihe entwickeln lässt, so erhalten wir:

$$\varphi(x) = \varphi\{a + (x - a)\}$$
$$= \varphi(a) + (x - a)\frac{d\varphi(a)}{da} + \frac{(x-a)^2}{2!}\frac{d^2\varphi(a)}{da^2} + \frac{(x-a)^3}{3!}\frac{d^3\varphi(a)}{da^3} + \cdots,$$

worin $\frac{d^r\varphi(a)}{da^r}$ den Werth bedeutet, welchen $\frac{d^r\varphi(x)}{dx^r}$ annimmt, wenn man nach der Differentiation a für x schreibt. Setzt man nun für die verschiedenen Differentialquotienten ihre Werthe ein, so erhält man:

$$y = \varphi(x) = A + B(x - a) + C\frac{(x-a)^2}{2!} + D\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots,$$

und diese Reihe ist, wenn sie convergirt, eine Lösung der gegebenen Gleichung.

Es muss bemerkt werden, dass für irgend einen besonderen Werth von x die Differentialgleichung nicht den Differentialquotienten der höchsten Ordnung, sondern einen von niedrigerer Ordnung bestimmen könnte. So würde zwar die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} - m^2y = 0$$

für jeden anderen Werth für x als Null den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ bestimmen, für $x = 0$ aber würde sie $\frac{dy}{dx} = 0$ ergeben, wenn wir unendlich grosse Werthe für irgend einen Differentialquotienten als ausgeschlossen betrachten.

Die vorstehend angegebene Methode, und eine andere, welche in der Praxis für sie eintritt und die im nächsten Paragraphen auseinander gesetzt werden wird, ist beinahe unbrauchbar in dem Falle von Gleichungen, welche weder linear sind, noch sich so transformiren lassen, dass sie linear werden. Für solche Gleichungen würde die Bestimmung von mehr als einigen wenigen der ersten Glieder der Entwickelung ausserordentlich beschwerlich werden.

1. **Aufgabe.** Wir wollen die vorstehende Methode auf die Gleichung anwenden:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + x y = 0.$$

Differentiiren wir die Gleichung n mal, so giebt dieselbe:

$$\frac{d^{n+2} y}{d x^{n+2}} + x \frac{d^n y}{d x^n} + n \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} = 0,$$

und daher für $x = 0$:

$$\left(\frac{d^{n+2} y}{d x^{n+2}}\right)_0 = - n \left(\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}\right)_0.$$

Nun lässt die gegebene Gleichung y und $\frac{d y}{d x}$ willkürlich; es sei etwa $y = A$ und $\frac{d y}{d x} = B$ für $x = 0$. Ferner ist $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$ für $x = 0$. Daher erhalten wir:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^{3p+2} y}{d x^{3p+2}}\right)_0 &= - 3p \left(\frac{d^{3p-1} y}{d x^{3p-1}}\right)_0 \\ &= 3p(3p-3) \left(\frac{d^{3p-4} y}{d x^{3p-4}}\right)_0 \\ &= (-1)^p 3p(3p-3) \ldots 6 \, . \, 3 \left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)_0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Analog:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^{3p+1} y}{d x^{3p+1}}\right)_0 &= (-1)^p (3p-1)(3p-4) \ldots 5 \, . \, 2 \left(\frac{d y}{d x}\right)_0 \\ &= (-1)^p (3p-1)(3p-4) \ldots 5 \, . \, 2 \, . \, B\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^{3p} y}{d x^{3p}}\right)_0 &= (-1)^p (3p-2)(3p-5) \ldots 4 \, . \, 1 \, . \, (y)_0 \\ &= (-1)^p (3p-2)(3p-5) \ldots 4 \, . \, 1 \, . \, A.\end{aligned}$$

Die Entwickelung von y ist nach dem Maclaurin'schen Satze:

$$y = (y)_0 + x\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \frac{x^3}{3!}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 + \frac{x^4}{4!}\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_0 + \cdots$$

$$= A\left[1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1.4}{6!}x^6 - \frac{1.4.7}{9!}x^9 + \cdots\right]$$

$$+ Bx\left[1 - \frac{2}{4!}x^3 + \frac{2.5}{7!}x^6 - \frac{2.5.8}{10!}x^9 + \cdots\right].$$

Dies ist die Summe zweier convergenten Reihen und enthält zwei willkürliche Constanten; es ist demnach die Stammgleichung der gegebenen Gleichung.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$(1) \qquad x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + c^3x^2y = 0.$$

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + ax^2y = 0.$$

3. Aufgabe. Man bestimme ein Integral der Gleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + my = 0$$

in der Form:

$$y = A\left[1 - \frac{mx}{1^2} + \frac{m^2x^2}{1^2.2^2} - \frac{m^3x^3}{1^2.2^2.3^2} + \frac{m^4x^4}{1^2.2^2.3^2.4}{}^2 - \cdots\right].$$

§. 84.

Die vorstehende Untersuchung zeigt, dass man mittelst der Differentialgleichung und der Entwickelung einer Function der unabhängigen Veränderlichen nach dem Taylor'schen oder Maclaurin'schen Satze einen Ausdruck in Form einer Reihe für die abhängige Veränderliche erhalten kann. Anstatt aber diesen Weg, der zuweilen sehr beschwerlich ist, zu verfolgen, ist es besser, das Princip festzuhalten, dass man eine Reihe finden kann, und demnach für y irgend eine nach Potenzen von x mit unbestimmten Coefficienten und Exponenten geordnete Reihe anzunehmen. Diese Reihe hat man sodann für die abhängige Veränderliche in die Differentialgleichung zu substituiren, und da sie eine Lösung von dieser Gleichung sein soll, so muss sie die Gleichung zu einer Identität machen. Die Vergleichung der Exponenten der unabhängigen Veränderlichen wird das Fortschreitungsgesetz derselben angeben, und die Vergleichung der Coefficienten der verschiedenen

Glieder, welche dieselbe Potenz der Veränderlichen enthalten, wird die gesuchten Relationen zwischen den Coefficienten in dem angenommenen Ausdruck liefern. Dieser letztere wird dann für solche Werthe der Veränderlichen, für welche die Reihe convergent bleibt, eine Lösung darstellen.

§. 85.

Da die eben angeführte Methode der früheren in Wirklichkeit äquivalent ist, so ist sie für die Lösung von nicht linearen Gleichungen ebenso wenig geeignet; viele Mühe aber spart man sich durch sie, wenn die zu lösende Differentialgleichung linear ist. Eine der wichtigsten Formen, auf welche sie besonders anwendbar ist, ist diejenige, welche folgendermaassen geschrieben werden kann:

$$\left\{\varphi\left(x\frac{d}{dx}\right)+\frac{1}{x}\,\psi\left(x\frac{d}{dx}\right)\right\}y=0,$$

worin φ und ψ algebraische rationale ganze Functionen sind. Um diese zu lösen, setze man:

$$y=A_1\,x^{m_1}+A_2\,x^{m_2}+A_3\,x^{m_3}+\cdots,$$

wobei die Exponenten m_1, m_2, $m_3\ldots$ der Grösse nach in aufsteigender Reihe geordnet sind. Da

$$\varphi\left(x\frac{d}{dx}\right)x^n=\varphi(n)\,x^n$$

ist, so giebt die Gleichung, wenn man darin den Werth von y substituirt:

$$\begin{aligned}&A_1\,\varphi(m_1)\,x^{m_1}+A_2\,\varphi(m_2)\,x^{m_2}+\cdots\\&+A_1\,\psi(m_1)\,x^{m_1-1}+A_2\,\psi(m_2)\,x^{m_2-1}+\cdots=0.\end{aligned}$$

Hierin ist m_1-1 der niedrigste Exponent und zwar tritt er nur in einem einzigen Gliede auf. Da die linke Seite der eben hingeschriebenen Gleichung identisch verschwinden muss, so muss dieses Glied verschwinden, und demnach ist:

$$A_1\,\psi(m_1)=0,$$

oder, da A_1 ein Coefficient eines wirklich vorkommenden Gliedes ist und daher nicht verschwinden kann, es muss sein:

$$\psi(m_1)=0.$$

Eine Vergleichung der Exponenten der übrig bleibenden Glieder zeigt, dass

$$m_1 = m_2 - 1, \quad \text{und daher} \quad m_2 = m_1 + 1$$
$$m_2 = m_3 - 1, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad m_3 = m_1 + 2$$

u. s. w.

ist, während eine Vergleichung der Coefficienten derjenigen Glieder, welche den nämlichen Exponenten enthalten, giebt:

$$A_1\,\varphi(m_1) + A_2\,\psi(m_2) = 0$$
$$A_2\,\varphi(m_2) + A_3\,\psi(m_3) = 0$$

u. s. w.

Es werde nun irgend ein Werth von m_1 genommen, der gegeben ist durch die Gleichung $\psi(m_1) = 0$, etwa $m_1 = a$, und es werde A_1, da es vollständig willkürlich ist, mit A bezeichnet; dann bestimmen sich die übrigen Coefficienten durch die Gleichungen:

$$A_2 = -\frac{\varphi(a)}{\psi(a+1)}\,A,$$

$$A_3 = -\frac{\varphi(a+1)}{\psi(a+2)}\,A_2 = +\frac{\varphi(a)\,\varphi(a+1)}{\psi(a+1)\,\psi(a+2)}\,A,$$

und so fort für die höheren Coefficienten. Der zugehörige Werth von y ist demnach:

$$A x^a\left[1 - \frac{\varphi(a)}{\psi(a+1)}\,x + \frac{\varphi(a)\,\varphi(a+1)}{\psi(a+1)\,\psi(a+2)}\,x^2 \right.$$
$$\left. - \frac{\varphi(a)\,\varphi(a+1)\,\varphi(a+2)}{\psi(a+1)\,\psi(a+2)\,\psi(a+3)}\,x^3 + \cdots\right].$$

Die Ausdrücke, welche von den anderen Wurzeln abhängen, können in analoger Weise erhalten werden; und da die Gleichung linear ist, so ist die Summe aller dieser Werthe von y eine Lösung.

Das wichtigste Beispiel dieser allgemeinen Form ist diejenige Gleichung, welche als Lösung die unter dem Namen der hypergeometrischen Reihe bekannte Reihe hat; dieselbe wird im nächsten Capitel in aller Ausführlichkeit behandelt werden.

1. Aufgabe. Man zeige, dass das vollständige Integral der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\,\frac{dy}{dx} + my = 0$$

gegeben ist durch

$$y = A\left[1 - \frac{m x^2}{2(2n+1)} + \frac{m^2 x^4}{2.4.(2n+1)(2n+3)} - \cdots\right]$$
$$+ B x^{1-2n}\left[1 - \frac{m x^2}{2(3-2n)} + \frac{m^2 x^4}{2.4.(3-2n)(5-2n)} - \cdots\right].$$

2. Aufgabe. Im Falle $2n = 1$ werden die einzelnen, die willkürlichen Constanten enthaltenden Theile in der 1. Aufgabe einander gleich, indem jeder übergeht in:

$$1 - \frac{m x^2}{2^2} + \frac{m^2 x^4}{2^2 . 4^2} - \cdots.$$

Wird dieses mit v bezeichnet und $y - uv = w$ gesetzt, wo u und w zu bestimmen sind, so haben wir, wenn wir substituiren, da v eine Lösung der ursprünglichen Gleichung ist:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dw}{dx} + mw + v\left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dx}\right) + 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} = 0.$$

Da wir zwei willkürliche Grössen u und w haben, so können wir ihnen nach Belieben irgend eine Bedingung auferlegen. Ist diese:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dx} = 0,$$

so ist der hieraus sich ergebende Werth von u gleich $A + B \log x$ und demnach:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dw}{dx} + mw + \frac{2B}{x}\frac{dv}{dx} = 0,$$

oder:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dw}{dx} + mw = 2Bm\left\{\frac{1}{2} - \frac{m x^2}{2^2 . 4} + \frac{m^2 x^4}{2^2 . 4^2 . 6} - \frac{m^3 x^6}{2^2 . 4^2 . 6^2 . 8} + \cdots\right\}.$$

Der Werth von y ist nunmehr:

$$v(A + B \log x) + w$$

und enthält daher zwei willkürliche Constanten, die für das vollständige Integral nothwendige Anzahl; wir suchen daher nur ein particuläres Integral der Gleichung in w. Um dieses zu erhalten, setzen wir:

$$w = B' + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + B_4 x^4 + \cdots$$

Dann ist:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dw}{dx} = \frac{B_1}{x} + 2^2 B_2 + 3^2 B_3 x + \cdots + n^2 B_n x^{n-2} + \cdots$$

Substituiren wir dies und setzen die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x einander gleich, so erhalten wir

aus dem Coefficienten von x^{-1}: $B_1 = 0$,

„ „ „ „ x^0: $mB' + 2^2 B_2 = Bm$,

„ „ „ „ x^1: $3^2 B_3 + mB_1 = 0$,

aus dem Coefficienten von $x^{2n-1}: (2n+1)^2 B_{2n+1} + m B_{2n-1} = 0,$

„ „ „ „ $x^2: \quad 4^2 B_4 + m B_2 = -\frac{B m^2}{2 \cdot 4},$

„ „ „ „ $x^{2n-2}: (2n)^2 B_{2n} + m B_{2n-2}$

$$= (-1)^{n-1} \frac{B m^n}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \ldots (2n-2)^2 \cdot 2n}.$$

Diese Gleichungen geben:

$$B_1 = 0 = B_3 = \cdots = B_{2n-1} = \cdots,$$

so dass also keine Glieder mit ungeraden Potenzen von x in w vorkommen. Für die Coefficienten von geraden Potenzen erhalten wir:

$$B_2 = B \frac{m}{4} - B' \frac{m}{4}$$

$$B_4 = -B \frac{m^2}{2 \cdot 4^3} - B_2 \frac{m}{4^2}$$

$$= -B \frac{m^2}{2^2 \cdot 4^2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) + B' \frac{m^2}{2^2 \cdot 4^2}$$

$$B_6 = +B \frac{m^3}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^3} - B_4 \frac{m}{6^2}$$

$$= +B \frac{m^3}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) - B' \frac{m^3}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2},$$

und allgemein:

$$B_{2n} = (-1)^{n-1} B \frac{m^n}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \ldots (2n)^2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right)$$
$$+ (-1)^n B' \frac{m^n}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \ldots (2n)^2}.$$

Demnach ist der Werth von y:

$$(A + B \log x) \left\{1 - \frac{m x^2}{2^2} + \frac{m^2 x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{m^3 x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots\right\}$$
$$+ B' \left\{1 - \frac{m x^2}{2^2} + \frac{m^2 x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{m^3 x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots\right\}$$
$$+ B \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{\frac{(-1)^n m^n x^{2n}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \ldots (2n)^2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right)\right\}.$$

Da B' unbestimmt ist, so kommen scheinbar drei willkürliche Constanten vor. Wie man sieht, ist aber der mit B' multiplicirte Ausdruck derselbe, wie der mit A multiplicirte; daher vereinigen sich diese beiden Constanten zu einer neuen willkürlichen Constanten A', welche für $A + B'$ gesetzt werden kann.

3. Aufgabe. Man bestimme das vollständige Integral der Gleichung

$$x \frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{d y}{d x} + y = 0$$

in der Form:

$$y = 2 B \left(x - \frac{3 x^2}{2^3} + \frac{11 x^3}{2^3 . 3^3} - \frac{50 x^4}{2^3 . 3^3 . 4^3} + \cdots\right)$$

$$+ \left(1 - \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{1^2 . 2^2} - \frac{x^3}{1^2 . 2^2 . 3^2} + \frac{x^4}{1^2 . 2^2 . 3^2 . 4^2} - \cdots\right) (A + B \log x).$$

(Fourier.)

4. Aufgabe. Man integrire die folgenden Gleichungen

$$(1) \quad (1 - x^2) \frac{d^2 y}{d x^2} - x \frac{d y}{d x} + a^2 y = 0,$$

$$(2) \quad (x - x^3) \frac{d^2 y}{d x^2} + (1 - 3 x^2) \frac{d y}{d x} - x y = 0$$

durch Reihen und drücke die Integrale derselben in endlicher Form aus.

§. 86.

Es sind noch zwei specielle Punkte hervorzuheben, die bei der Integration einiger Differentialgleichungen zur Erscheinung kommen; obwohl dieselben einer und derselben Ursache ihre Entstehung verdanken, so erfordern sie doch eine gesonderte Behandlung.

Um ein Beispiel von dem einen zu haben, wollen wir zu der als Lösung der Gleichung

$$\left\{\varphi \left(x \frac{d}{dx}\right) + \frac{1}{x} \psi \left(x \frac{d}{dx}\right)\right\} y = 0$$

gefundenen Reihe zurückkehren, welche war:

$$A x^a \left[1 - \frac{\varphi (a)}{\psi (a + 1)} x + \frac{\varphi (a) \varphi (a + 1)}{\psi (a + 1) \psi (a + 2)} x^2 - \cdots\right],$$

wobei die Constante a irgend eine Wurzel der Gleichung

$$\psi (m) = 0$$

war. Diese Gleichung wird gewöhnlich mehr als eine Wurzel haben; irgend eine andere Wurzel möge mit b bezeichnet werden. In dem Falle nun, wo b um irgend eine ganze Zahl k grösser als a ist, hört die Lösung in der oben angewendeten Form auf gültig zu sein; denn in dem Nenner des Coefficienten von x^k in dem Klammerausdruck tritt der Factor $\psi (a + k)$ oder $\psi (b)$ auf, welcher gleich Null ist, so dass, wenn nicht auch ein verschwindender Factor im Zähler vorkommt, der Coefficient augenscheinlich unendlich gross wird.

In einem solchen Falle, wo in dem Zähler kein verschwindender Factor vorkommt, müssen wir zu den ursprünglichen Gleichungen zurückkehren, aus denen die Reihe abgeleitet war, und diese waren:

$$A_1 \varphi(a) + A_2 \psi(a+1) = 0$$
$$A_2 \varphi(a+1) + A_3 \psi(a+2) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_k \varphi(a+k-1) + A_{k+1} \psi(a+k) = 0.$$

Da nun $\psi(a+k)$ verschwindet und A_{k+1} als Coefficient in einer als convergent vorausgesetzten Reihe nicht unendlich gross ist, so folgt, dass entweder A_k oder $\varphi(a+k-1)$ verschwindet. Lässt man den letzteren Fall in Berücksichtigung der Voraussetzung, dass in dem Zähler kein verschwindender Factor vorkommen soll, ausser Acht, so haben wir $A_k = 0$ und finden daher aus den vorhergehenden Gleichungen, dass die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ sämmtlich gleich Null sind. Daher verschwindet der Theil der Reihe, welcher dem Gliede x^k innerhalb der Klammern vorangeht, wegen der Coefficienten, und die Reihe muss in Wirklichkeit mit dem Gliede Cx^{a+k}, d. h. mit Cx^b, anfangen. Und diese Reihe ist diejenige, welche aus der Wurzel b der Gleichung $\psi(m) = 0$ entspringt. Eins der particulären Integrale ist auf diese Weise verschwunden, um aber an seiner Stelle ein anderes zu erhalten, können wir ebenso verfahren, wie in der 2. Aufgabe in §. 85. Bezeichnen wir mit v das eine, welches bleibt und das andere in sich aufgenommen hat, so können wir setzen:

$$y = uv + w,$$

und können, nachdem wir eingesetzt haben, irgend eine Relation festsetzen, welche zur Bestimmung von u und w dienen und die Lösung der Differentialgleichung erleichtern soll. Diese Relation wird in der Regel durch die besondere Form der Gleichung bestimmt sein.

1. Aufgabe. Man betrachte die Differentialgleichung:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - (x^2 + 4x)\frac{dy}{dx} + 4y = 0.$$

Substituirt man hierin:

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + \cdots$$

(dies ist, wie leicht ersichtlich, die nothwendige Form), so findet man als die Gleichung, welche m bestimmt:

$$m(m-1) - 4m + 4 = 0,$$

d. i.
$$(m-1)(m-4) = 0.$$

Hiernach ist $a = 1$ und $b = 4$, so dass die beiden Wurzeln sich um eine ganze Zahl unterscheiden. Man wird finden, dass, wenn man die Wurzel $m = 1$ nimmt, die Gleichung von der besprochenen Form ist, und dass die Glieder bis zu x^4, dieses ausgeschlossen, verschwinden, während die aus der Wurzel $m = 4$ abgeleitete Reihe $A x^4 e^x$ ist.

Man vervollständige die Lösung.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} + x (1 + x) \frac{d y}{d x} + (3x - 1) y = 0.$$

§. 87.

Wir gehen nun zu der Betrachtung des anderen speciellen Punktes über. Bisher war vorausgesetzt worden, dass in dem Zähler kein verschwindender Factor vorkommen solle, und wie in diesem Falle das Resultat zu ändern ist, ist angegeben worden. Es kann jedoch ein verschwindender Factor in dem Zähler irgend eines der Coefficienten der in den Klammern eingeschlossenen Glieder auftreten, und zwar entweder in dem Gliede, in welchem auch ein verschwindender Factor in dem Nenner vorkam, oder in einem früheren Gliede. Im letzteren Falle verschwinden alle die Glieder, welche in den Nennern der bezüglichen Coefficienten keinen verschwindenden Factor haben; und wenn ein solcher Factor niemals in einem späteren Gliede vorkommt, so wird die Reihe mit demjenigen Gliede endigen, welches dem den verschwindenden Factor im Zähler enthaltenden Gliede unmittelbar vorhergeht; es wird demnach die Lösung in endlicher Form dargestellt sein. Es kann aber auch irgend ein verschwindender Factor in dem Nenner eines späteren Gliedes vorkommen; alsdann wird der Coefficient dieses Gliedes die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen, während die dazwischen liegenden Glieder verschwinden, und alle darauf folgenden Glieder werden eben diesen unbestimmten Coefficienten enthalten. Die Reihe wird dann von der Form sein:

$$A x^a + B x^{a+1} + \cdots + F x^{a+f} + \frac{0}{0} (K x^{a+k} + L x^{a+k+1} + \cdots),$$

worin $k - 1$ nicht kleiner als f ist. Dies können wir schreiben:

$$A \left(x^a + \frac{B}{A} x^{a+1} + \cdots + \frac{F}{A} x^{a+f} \right) + M \left(x^{a+k} + \frac{L}{K} x^{a+k+1} + \cdots \right),$$

wobei A willkürlich und $\frac{B}{A}, \cdots, \frac{F}{A}$ bestimmte Constanten sind;

ebenso ist M, welches gleich $K \times \frac{0}{0}$ ist, willkürlich $\left(\text{wegen der Unbestimmtheit von } \frac{0}{0}\right)$, dagegen sind $\frac{L}{K}, \cdots$ bestimmt. Diese Reihe ist eine Lösung der entsprechenden Differentialgleichung, sie wird daher auch eine Lösung sein, wenn man für die willkürliche Constante einen speciellen Werth setzt. Daher ist

$$A\left(x^a + \frac{B}{A}\, x^{a+1} + \cdots + \frac{F}{A}\, x^{a+f}\right),$$

welches man erhält, wenn man $M = 0$ setzt, eine Lösung. In einem solchen Falle giebt es also immer eine Lösung der Gleichung, die in endlicher Form darstellbar ist.

1. Aufgabe. Als Beispiel betrachten wir die Gleichung:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (x + x^2) \frac{dy}{dx} + (x - 9)\, y = 0.$$

Setzen wir:

$$y = A x^m + B x^{m+1} + \cdots,$$

so ist die Gleichung, durch welche m zu bestimmen ist:

$$m^2 - 9 = 0,$$

und daher:

$$m = -3 \quad \text{oder} \quad +3.$$

Für die Wurzel -3 erhält man ohne Schwierigkeit die Reihe:

$$Ax^{-3}\left[1 - \frac{2}{5}\, x + \frac{2.1}{5.8}\, x^2 + \text{Gliedern mit } x^3, x^4, x^5, \text{welche verschwinden}\right]$$

$$+ A x^{-3}\left[\frac{(-2)\,(-1)\, 0 . 1 . 2 . 3}{(-5)\,(-8)\,(-9)\,(-8)\,(-5) . 0}\, x^6 \right.$$

$$\left. - \frac{(-2)\,(-1) . 0 . 1 . 2 . 3 . 4}{(-5)\,(-8)\,(-9)\,(-8)\,(-5)\, 0 . 7}\, x^7 + \cdots\right].$$

Schreibt man M an Stelle von

$$\frac{(-2)\,(-1)\; 0 . 1 . 2 . 3}{(-5)(-8)(-9)(-8)(-5) . 0}\, A,$$

so wird die Reihe:

$$A x^{-3}\left[1 - \frac{2}{5}\, x + \frac{2 . 1}{5 . 8}\, x^2\right]$$

$$+ M x^3\left[1 - \frac{4}{7}\, x + \frac{4 . 5}{(4^2 - 3^2)\,(5^2 - 3^2)}\, x^2 - \frac{4 . 5 . 6}{(4^2 - 3^2)(5^2 - 3^2)\,(6^2 - 3^2)}\, x^3 + \cdots\right]$$

und bestätigt somit den Satz, dass eine Lösung der Gleichung in endlicher Form ausdrückbar ist.

2. Aufgabe. Man bestätige den allgemeinen Satz in dem Falle der Gleichung:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x(1+2x)\frac{dy}{dx} = 4y.$$

3. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (q - 2m)\frac{dy}{dx} + \left(m^2 - qm - \frac{2}{x^2}\right) y = 0.$$

§. 88.

Fernere Beispiele für diese speciellen Fälle werden später vorkommen; es ist daher gegenwärtig nicht nöthig, sie in grösserer Ausführlichkeit zu betrachten. Noch manche andere Punkte kommen vor, die im Zusammenhange mit speciellen Gleichungen zur Erörterung gelangen werden. So ist z. B. nicht gezeigt worden, dass eine Reihe stets nach steigenden oder fallenden Potenzen der unabhängigen Veränderlichen fortschreiten muss, vielmehr wird die Vergleichung der Glieder in der Differentialgleichung, nachdem der Ausdruck für die abhängige Veränderliche darin substituirt ist, die Natur der Reihe anzeigen. In dem Falle, wo eine der Lösungen verschwindet, ist eine Methode angeführt worden, welche von Vortheil sein wird, um die dadurch verursachte Lücke auszufüllen; eine andere wird nachher angegeben werden. In der That hängen die Schwierigkeiten, die hierbei entstehen, in der Regel mit speciellen Gleichungen, nicht aber mit der allgemeinen Gleichung zusammen; deshalb sollen auch einige specielle Gleichungen betrachtet werden. Unter den Gleichungen von specieller Form giebt es vier, welche wichtiger als die übrigen der durch Reihen auflösbaren Gleichungen sind; dieselben sind:

Erstens die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe, welche im nächsten Capitel für sich discutirt werden wird.

Zweitens die Legendre'sche Gleichung.

Drittens die Bessel'sche Gleichung.

Viertens die Riccati'sche Gleichung.

Die letzten drei sollen nun der Reihe nach behandelt werden. Dabei muss man natürlich im Auge behalten, dass das, was hier gegeben werden wird, nur die vollständige Lösung der Differential-

gleichungen ist, dass es aber nicht auf eine erschöpfende Erforschung der Eigenschaften der betreffenden durch die abhängigen Veränderlichen bestimmten Functionen abgesehen ist.

Die Legendre'sche Differentialgleichung.

§. 89.

Diese Differentialgleichung lautet:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right\} + n(n+1)y = 0,$$

worin die Grösse n eine Constante ist. Diese Gleichung kommt häufig vor bei Untersuchungen, die mit Fragen aus fast allen Gebieten der angewandten Mathematik zusammenhängen; in solchen Fällen ist n gewöhnlich, aber nicht immer, eine positive ganze Zahl. Die Gleichung ist von der zweiten Ordnung und hat daher zwei von einander unabhängige particuläre Integrale, und jedes andere particuläre Integral lässt sich durch diese beiden ausdrücken; man wird jedoch finden, dass die Form dieser beiden fundamentalen particulären Integrale eine verschiedene ist, je nachdem n eine positive ganze Zahl ist oder nicht.

Wir wollen nun diese Integrale suchen. Der allgemeinen Methode der Integration durch Reihen gemäss setzen wir:

$$y = A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_2} + A_3 x^{m_3} + \cdots$$

und substituiren dies; dadurch erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&n(n+1)(A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_2} + A_3 x^{m_3} + \cdots)\\
&= \frac{d}{dx}\left\{(x^2-1)(m_1 A_1 x^{m_1-1} + m_2 A_2 x^{m_2-1} + m_3 A_3 x^{m_3-1} + \cdots)\right\}\\
&= m_1(m_1+1)A_1 x^{m_1} - m_1(m_1-1)A_1 x^{m_1-2}\\
&+ m_2(m_2+1)A_2 x^{m_2} - m_2(m_2-1)A_2 x^{m_2-2} + \cdots,
\end{aligned}$$

und dieses muss eine Identität sein. Ein Anblick der Gleichung zeigt, dass, soweit Potenzen von x in Betracht kommen,

$$\begin{aligned}
m_2 &= m_1 - 2\\
m_3 &= m_2 - 2\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{aligned}$$

ist, oder dass die Reihe nach fallenden Potenzen von x fortschreiten muss; wir nehmen daher jetzt an, dass $m_1, m_2, m_3 \ldots$ der Grösse

nach in absteigender Reihe geordnet sind, wobei ihre gemeinschaftliche Differenz gleich 2 ist. Die Vergleichung der Coefficienten derselben Potenzen von x giebt für den von x^{m_1}:

$$\{m_1(m_1+1) - n(n+1)\} A_1 = 0,$$

oder:

$$(m_1 - n)(m_1 + n + 1) A_1 = 0.$$

Nun kann A_1 als Coefficient des höchsten Gliedes in y nicht verschwinden; daher ist entweder

$$m_1 = n$$

oder

$$m_1 = -(n+1).$$

Die Relation zwischen den Coefficienten auf einander folgender Glieder ergiebt sich durch die Gleichsetzung der Coefficienten von x^{m_1-2r+2} auf beiden Seiten; dieselbe ist für Werthe von r, die grösser als 1 sind:

$$n(n+1)A_r = (m_1 - 2r + 2)(m_1 - 2r + 3) A_r$$
$$- (m_1 - 2r + 4)(m_1 - 2r + 3) A_{r-1},$$

und diese giebt:

$$(n - m_1 + 2r - 2)(n + m_1 - 2r + 3) A_r$$
$$= -(m_1 - 2r + 4)(m_1 - 2r + 3) A_{r-1}.$$

§. 90.

Wir betrachten zuerst die Lösung, welche dem Werthe

$$m_1 = n$$

entspricht. Das höchste Glied ist alsdann $A_1 x^n$, und die Beziehung zwischen den auf einander folgenden A ist:

$$(2r-2)(2n-2r+3)A_r = -(n-2r+4)(n-2r+3)A_{r-1},$$

so dass

$$A_r = -\frac{(n-2r+4)(n-2r+3)}{2(r-1)(2n-2r+3)} A_{r-1}$$
$$= (-1)^{r-1} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2r+4)(n-2r+3)}{2^{r-1}.1.2.3\ldots(r-1)(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2r+3)} A_1$$

ist, und daher wird die Reihe:

$$A_1 \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \ldots \right\}.$$

Die in Klammern eingeschlossene Reihe möge mit y_1 bezeichnet werden, welches somit eine particuläre Lösung ist. Ist n eine positive ganze Zahl, so ist die Reihe endlich; ihr letztes Glied ist, wenn n gerade ist:

$$(-1)^{\frac{1}{2}n} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{2.4\ldots(n-2)n(2n-1)(2n-3)\ldots(n+1)}$$

oder, was dasselbe ist:

$$(-1)^{\frac{1}{2}n} \frac{n!\,n!\,n!}{(\frac{1}{2}n)!\,(\frac{1}{2}n)!\,(\frac{1}{2}n)!},$$

während, wenn n ungerade ist, das letzte Glied lautet:

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.3.2}{2.4\ldots(n-3)(n-1)(2n-1)(2n-3)\ldots(n+4)(n+2)}\,x,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{n!\,n!\,(n-1)!}{[\frac{1}{2}(n-1)]!\,[\frac{1}{2}(n-1)]!\,(2n-1)!}\,x.$$

Die Anzahl der Glieder ist in den beiden Fällen respective gleich $\frac{1}{2}n+1$ und $\frac{1}{2}(n+1)$.

Ist n eine ganze Zahl, so ist $2n$ eine gerade ganze Zahl; es kann daher in diesem Falle ein verschwindender Factor im Nenner niemals vorkommen. Es wird somit die betrachtete Reihe niemals zu der Classe gehören, welche in §. 87 behandelt wurde und gleichzeitig zwei Integrale liefert.

Die Reihe y_1, multiplicirt noch mit

$$\frac{(2n)!}{2^n.n!\,n!},$$

wird, wenn n eine positive ganze Zahl ist, in der Regel mit P_n bezeichnet; diese Function ist **von höchster Wichtigkeit bei physikalischen Anwendungen.**

1. Aufgabe. Man zeige, dass

$$2^n n!\,P_n = \frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\}$$

ist und dass P_n den Coefficienten von z^n in der nach steigenden Potenzen von z fortschreitenden Entwickelung von $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ darstellt.

Hiernach zeige man, dass $v=(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ eine Lösung der Gleichung ist:

$$z\frac{\partial^2(vz)}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{(1-x^2)\frac{\partial v}{\partial x}\right\}=0.$$

2. Aufgabe. Man beweise, dass die Wurzeln der Gleichung $y_1=0$ sämmtlich reell und numerisch kleiner als 1 sind.

3. Aufgabe. Man beweise, dass die Summe der Coefficienten in P_n, mit den ihnen zukommenden Vorzeichen versehen, gleich 1 ist.

4. Aufgabe. Man leite die Gleichungen her:

$$(1) \quad n P_n = (2n-1) x P_{n-1} - (n-1) P_{n-2}$$

$$(2) \quad (x^2-1) \frac{d P_n}{d x} = n x P_n - n P_{n-1}.$$

In dem Falle, wo n keine positive ganze Zahl ist, geht die Reihe y_1 ins Unendliche, und für die Convergenz derselben ist erforderlich, dass x grösser als 1 ist. In dem besonderen Falle aber, wo $2n$ gleich irgend einer positiven ungeraden ganzen Zahl, etwa gleich $2r-1$, ist, besitzt der Coefficient von x^{n-2r} im Nenner einen verschwindenden Factor und es tritt im Zähler weder dieses Gliedes noch eines folgenden Gliedes ein verschwindender Factor auf; daher (wegen §. 86) können diejenigen Glieder, deren Exponenten grösser als $n-2r$ sind, in dieser Lösung der Differentialgleichung nicht vorkommen; dieselbe wird demnach anfangen mit x^{n-2r} und multiplicirt sein mit einer neuen willkürlichen Constanten. Da aber $2n = 2r - 1$, somit $n - 2r = -(n+1)$ ist, so ist das Integral eine nach fallenden Potenzen von x fortschreitende unendliche Reihe, welche mit $x^{-(n+1)}$ beginnt. Zur Betrachtung dieses Integrals werden wir jetzt übergehen.

§. 91.

Wir nehmen nun die zweite Lösung der Gleichung, welche den Werth von m_1 bestimmt; dieselbe ist $m_1 = -(n+1)$, so dass das Glied mit dem höchsten Exponenten gleich $A_1 x^{-(n+1)}$ gesetzt werden kann. Die Beziehung zwischen den auf einander folgenden Coefficienten ist:

$$(2n+2r-1)(2r-2) A_r = (n+2r-3)(n+2r-2) A_{r-1}$$

für Werthe von r, die grösser als 1 sind, und somit:

$$A_r = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+2r-2)}{2^{r-1}.1.2.3\dots(r-1)(2n+3)(2n+5)\dots(2n+2r-1)} A_1.$$

Die Reihe ist daher:

$$A_1 \left\{ x^{-(n+1)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2.(2n+3)} x^{-(n+3)} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4.(2n+3)(2n+5)} x^{-(n+5)} + \dots \right\}.$$

Die in Klammern eingeschlossene Reihe werde mit y_2 bezeichnet, welches eine particuläre Lösung ist; die Reihe y_2, multiplicirt noch mit

$$\frac{2^n . n! \, n!}{(2n+1)!}$$

(wo n eine positive ganze Zahl ist), wird in der Regel mit Q_n bezeichnet. Damit dieselbe convergire, ist erforderlich, dass x grösser als 1 ist. Diese Reihe y_2 oder die äquivalente Function Q_n ist ebenfalls von grosser Wichtigkeit bei physikalischen Untersuchungen.

Ist n eine positive ganze Zahl, so geht die Reihe ins Unendliche.

Ist n eine negative ganze Zahl, so ist y_2 eine endliche Reihe; wenn $n = -2p$, so beginnt die Reihe mit x^{2p-1} und enthält p Glieder; wenn $n = -(2p+1)$, so beginnt die Reihe mit x^{2p} und enthält $p+1$ Glieder.

Ist $2n$ eine ungerade negative ganze Zahl, ausser -1, etwa gleich $-(2r+1)$, so hat der Coefficient von $x^{-(n+2r+1)}$ einen verschwindenden Factor im Nenner, wogegen kein verschwindender Factor in dem Zähler irgend eines Gliedes vorkommt. Es können daher wie vorher die vorhergehenden Glieder nicht existiren und die Reihe beginnt mit $x^{-(n+2r+1)}$ und ist multiplicirt mit irgend einer neuen willkürlichen Constanten. Da aber $2n = -(2r+1)$ ist, so wird $-(n+2r+1) = n$, oder es wird das Integral eine unendliche Reihe von fallenden Potenzen von x, welche mit x^n beginnt, d. h. y_2 geht über in y_1.

§. 92.

Wir erhalten daher die folgenden **Resultate.**

I. Ist n eine **positive ganze** Zahl, so giebt es **zwei** von einander unabhängige Lösungen der Differentialgleichung: 1) y_1, eine endliche Reihe, 2) y_2, eine unendliche Reihe, und die Stammgleichung ist:

$$y = Ay_1 + By_2.$$

II. Ist n eine **negative ganze** Zahl, so giebt es **zwei** von einander unabhängige Lösungen: 1) y_1, eine unendliche Reihe, 2) y_2, eine endliche Reihe, und die Stammgleichung ist:

$$y = Ay_1 + By_2.$$

III. Ist n **keine ganze** Zahl und $2n$ **nicht gleich irgend einer ungeraden** positiven oder negativen ganzen Zahl, so giebt es **zwei** von einander unabhängige Lösungen: 1) y_1, eine unendliche Reihe, 2) y_2, eine unendliche Reihe, und die Stammgleichung ist:

$$y = Ay_1 + By_2.$$

IV. Ist $2n$ gleich einer **positiven ungeraden ganzen** Zahl, so giebt es nur **eine** Lösung der Differentialgleichung, da y_1 in y_2 übergeht, und zwar ist diese Lösung eine unendliche Reihe. Die Stammgleichung ist daher nicht ausdrückbar durch y_1 und y_2 allein.

V. Ist $2n$ gleich einer **negativen ungeraden ganzen** Zahl, so giebt es nur **eine** Lösung der Differentialgleichung, da y_2 in y_1 übergeht, und zwar ist diese Lösung eine unendliche Reihe. Die Stammgleichung ist ebenfalls nicht ausdrückbar durch y_1 und y_2 allein.

§. 93.

Es bleibt daher nur noch das vollständige Integral in den letzten beiden Fällen zu suchen übrig.

Betrachten wir zunächst den Fall, wo $2n$ gleich einer positiven ungeraden ganzen Zahl ist, so haben wir in

$$y_2 = x^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-n-3} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4.(2n+3)(2n+5)} x^{-n-5} + \cdots$$

eine ganz bestimmte Lösung und müssen nun eine zweite und hiervon verschiedene particuläre Lösung suchen. Man nehme für den Augenblick

$$2n = 2p + 1 + \vartheta$$

an, wo ϑ eine unendlich kleine Grösse ist, die schliesslich gleich Null gesetzt werden soll. Dann stellt, so lange ϑ nicht gleich Null ist, der Ausdruck

$$y_1 = x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \cdots$$

ebenfalls eine bestimmte Lösung dar; dies ist aber nicht mehr der Fall, wenn ϑ verschwindet, da ϑ als Factor im Nenner des

Coefficienten von x^{n-2p-2} und aller niedrigeren Potenzen auftritt. Nun haben wir:

$$
\begin{aligned}
Ay_1 = A\Big\{ & x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \cdots \\
& + (-1)^p \frac{n(n-1)\dots(n-2p+1)}{2.4\dots 2p(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2p+1)} x^{n-2p} \\
& + (-1)^{p+1} \frac{n(n-1)\dots(n-2p-1)}{2.4\dots(2p+2)(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2p-1)} x^{n-2p-2} \\
& + (-1)^{p+2} \frac{n(n-1)\dots(n-2p-3)}{2.4\dots(2p+4)(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2p-3)} x^{n-2p-4} \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= A\Big\{ & x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \cdots \\
& + (-1)^p \frac{n(n-1)\dots(n-2p+1)}{2.4\dots 2p(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2p+1)} x^{n-2p} \Big\}
\end{aligned}
$$

$$
+ C \frac{x^{n-2p-2}}{2n-2p-1} \left\{ 1 - \frac{(n-2p-2)(n-2p-3)}{(2p+4)(2n-2p-3)} x^{-2} + \dots \right\},
$$

worin

$$
C = (-1)^{p+1} A \frac{n(n-1)\dots(n-2p-1)}{2.4\dots(2p+2)(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2p+1)}
$$

und daher bestimmt und endlich ist. Es ist aber:

$$
n - 2p - 2 = -(n+1) + \vartheta,
$$

und somit:

$$
x^{n-2p-2} = x^{-(n+1)} . x^{\vartheta} = x^{-n-1}(1 + \vartheta \log x).
$$

Ferner ist der Coefficient von x^{-2r} innerhalb der zweiten Parenthese:

$$
\frac{(-1)^r (n-2p-2)(n-2p-3)\dots(n-2p-2r-1)}{(2p+4)(2p+6)\dots(2p+2r+2)(2n-2p-3)(2n-2p-5)\dots(2n-2p-2r-1)}
$$

$$
= \frac{(-1)^r (n+1-\vartheta)(n+2-\vartheta)\dots(n+2r-\vartheta)}{(2n+3-\vartheta)(2n+5-\vartheta)\dots(2n+2r+1-\vartheta)(\vartheta-2)(\vartheta-4)\dots(\vartheta-2r)}
$$

$$
= \frac{(n+1-\vartheta)(n+2-\vartheta)\dots(n+2r-\vartheta)}{(2n+3-\vartheta)(2n+5-\vartheta)\dots(2n+2r+1-\vartheta)(2-\vartheta)(4-\vartheta)\dots(2r-\vartheta)}
$$

$$
= \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+2r)}{(2n+3)(2n+5)\dots(2n+2r+1).2.4.6\dots 2r}(1 + C_r \vartheta),
$$

worin

$$
C_r = \sum_{s=1}^{s=r} \frac{1}{2s} + \sum_{s=1}^{s=r} \frac{1}{2n+2s+1} - \sum_{s=1}^{s=2r} \frac{1}{n+s}
$$

ist. Hiernach erhalten wir:

$$A y_1 = A \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \cdots \right.$$

$$\left. + (-1)^p \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{2.4\ldots 2p(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2p+1)} x^{n-2p} \right\}$$

$$+ C x^{-(n+1)} \frac{1+\vartheta \log x}{\vartheta} \times$$

$$\left[1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} \left\{ \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+2r)}{2.4\ldots 2r(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2r+1)} (1+C_r\vartheta) x^{-2r} \right\} \right].$$

Wird der zweite Theil der rechten Seite entwickelt, so ist das Aggregat der Glieder, welche $\frac{1}{\vartheta}$ enthalten:

$$\frac{C}{\vartheta} y_2;$$

ferner das Aggregat der mit $\log x$ behafteten Glieder:

$$C y_2 \log x;$$

und es bleibt das Aggregat der von ϑ (und augenscheinlich auch von $\log x$) unabhängigen Glieder sowie ein weiteres Aggregat von Gliedern mit positiven Potenzen von ϑ, von denen die meisten bereits vernachlässigt sind und die sämmtlich verschwinden, wenn ϑ gleich Null gesetzt wird. Aus dem ersten Theile der rechten Seite kommt noch ein Aggregat von Gliedern, die von ϑ unabhängig sind, sowie ein Aggregat von Gliedern hinzu, die mit ϑ zugleich verschwinden. Daher ist das vollständige Integral der Gleichung:

$$y = B y_2 + A y_1$$

$$= \left(B + \frac{C}{\vartheta}\right) y_2 + C(y_2 \log x + T_n + R_n),$$

oder nach Veränderung der willkürlichen Constanten:

$$y = D y_2 + C(y_2 \log x + T_n + R_n).$$

Hierin steht T_n für

$$\frac{A}{C} \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \cdots \right.$$

$$\left. + (-1)^p \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{2.4\ldots 2p(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2p+1)} x^{n-2p} \right\}$$

und R_n für

$$x^{-n-1} \sum_{r=1}^{r=\infty} \left\{ \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+2r)}{2.4\ldots 2r(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2r+1)} C_r x^{-2r} \right\},$$

und der Werth von C_r ist:

$$\sum_{s=1}^{s=r}\left\{\frac{1}{2s}+\frac{1}{2n+2s+1}-\frac{1}{n+2s-1}-\frac{1}{n+2s}\right\}.$$

Der Werth des Coefficienten $\frac{A}{C}$, welcher in T_n vorkommt, ist:

$$\left\{\frac{4.8.12\ldots(4n-2)}{1.3.5\ldots 2n}\right\}^2(8n+4),$$

so dass wir T_n in der Form schreiben können:

$$T_n=\left\{\frac{4.8.12\ldots(4n-2)}{1.3.5\ldots 2n}\right\}^2(8n+4)\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\cdots\right.$$
$$\left.-\,n(n-1)\left\{\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots(n-2)}{2.4\ldots(2n-1)}\right\}^2x^{-n+1}\right].$$

Die zweite particuläre Lösung der Gleichung ist daher:

$$y_2\log x+T_n+R_n,$$

wobei zu bemerken ist, dass derjenige Theil derselben, welcher nach absteigenden Potenzen von x sich entwickeln lässt, mit einem Gliede beginnt, welches x^{+n} enthält, aber kein Glied in sich schliesst, welches mit x^{-n-1} multiplicirt ist.

§. 94.

Betrachten wir nun den Fall, wo $2n$ gleich einer negativen ungeraden ganzen Zahl ist, so ist das Integral y_1 bestimmt; dagegen wird alsdann

$$y_2=x^{-n-1}+\frac{(n+1)(n+2)}{2.(2n+3)}x^{-n-3}+\cdots,$$

einen einzigen Werth von n, nämlich $n=-\frac{1}{2}$, ausgenommen, keine bestimmte Lösung sein. Ist aber $n=-\frac{1}{2}$, so hört zwar y_2 nicht auf, bestimmt zu sein, es wird jedoch mit y_1 identisch, so dass wir auch in diesem Falle vor der Hand nur ein particuläres Integral besitzen. Lassen wir diesen Fall vorläufig ausser Acht, so kann jetzt $-2n$ gleich 3 oder gleich irgend einer ungeraden ganzen Zahl grösser als 3 sein.

Bevor wir n gleich der Hälfte einer ungeraden ganzen Zahl annehmen, setzen wir:

$$-n = m + 1$$

(so dass also $2m$ eine positive ungerade ganze Zahl wird, wenn wir jene besondere Voraussetzung über den Werth von n machen). Dann ist:

$$y_1 = x^{-m-1} + \frac{(m+1)(m+2)}{2.(2m+3)} x^{-m-3} + \cdots = Y_2$$

$$y_2 = x^m - \frac{m(m-1)}{2.(2m-1)} x^{m-2} + \cdots = Y_1,$$

wo Y_1 und Y_2 die particulären Lösungen der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right\} + m(m+1)y = 0$$

im Falle eines positiven m sind. Ist nun $2m$ eine positive ungerade ganze Zahl, so wissen wir aus der vorhergehenden Untersuchung, dass das allgemeine Integral dieser Gleichung ist:

$$y = BY_2 + A(Y_2 \log x + T_m + R_m),$$

worin

$$T_m = \left\{\frac{4.8.12\ldots(4m-2)}{1.3.5\ldots 2m}\right\}^2 (8m+4)\left[x^m - \frac{m(m-1)}{2(2m-1)} x^{m-2} + \cdots \right.$$
$$\left. - m(m-1)\left\{\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\cdots(m-2)}{2.4\ldots(2m-1)}\right\}^2 x^{-m+1}\right],$$

$$R_m = x^{-m-1}\sum_{r=1}^{r=\infty}\left\{\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+2r)}{2.4\ldots 2r(2m+3)(2m+5)\ldots(2m+2r+1)} A_r x^{-2r}\right\}$$

und

$$A_r = \sum_{s=1}^{s=r}\left(\frac{1}{2s} + \frac{1}{2m+2s+1} - \frac{1}{m+2s-1} - \frac{1}{m+2s}\right)$$

ist.

Mithin ist das allgemeine Integral der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right\} + n(n+1)y = 0$$

in dem Falle, wo $2n$ eine negative ungerade ganze Zahl ausser -1 ist:

$$y = By_1 + A(y_1 \log x + V_n + U_n),$$

worin

$$y_1 = x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \cdots,$$

$$V_n = \left\{\frac{4.8.12\ldots(-4n-6)}{1.3.5\ldots(-2n-2)}\right\}^2 (-8n-4) \left[x^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-n-3} \right.$$

$$\left. + \cdots - (n+1)(n+2) \left\{\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\cdots(-n-3)}{2.4\ldots(-2n-3)}\right\}^2 x^{n+2} \right],$$

$$U_n = x^n \sum_{r=1}^{r=\infty} \left\{ \frac{n(n-1)\ldots(n-2r+1)}{2.4\ldots 2r(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2r+1)} (-1)^r E_r x^{-2r} \right\}$$

ist, während der Werth von E_r in U_n lautet:

$$E_r = \sum_{s=1}^{s=r} \left(\frac{1}{2s} + \frac{1}{2s-2n-1} - \frac{1}{2s-n-2} - \frac{1}{2s-n-1} \right).$$

Das zweite particuläre Integral der Gleichung ist daher in diesem Falle:

$$y_1 \log x + V_n + U_n,$$

wobei zu bemerken ist, dass derjenige Theil desselben, welcher sich nach absteigenden Potenzen von x entwickeln lässt, mit einem Gliede beginnt, welches x^{-n-1} enthält, aber kein Glied in sich schliesst, welches x^n enthält.

Es bleibt nur noch übrig, das vollständige Integral der Gleichung für den Fall zu suchen, wo $2n = -1$ ist. Setzen wir zunächst $n = -\frac{1}{2} + h$, wo h eine beliebige kleine Grösse bedeutet, die nachher gleich Null gesetzt werden soll, so sind

$$y_1 = x^h \left\{ x^{-1/2} + \frac{\left(\frac{1}{2}-h\right)\left(\frac{3}{2}-h\right)}{2.2(1-h)} x^{-5/2} \right.$$

$$\left. + \frac{\left(\frac{1}{2}-h\right)\left(\frac{3}{2}-h\right)\left(\frac{5}{2}-h\right)\left(\frac{7}{2}-h\right)}{2.4.2^2(1-h)(2-h)} x^{-9/2} + \cdots \right\}$$

$$= x^h \varphi(-h)$$

$$y_2 = x^{-h}\left\{x^{-1/2} + \frac{\left(\frac{1}{2}+h\right)\left(\frac{3}{2}+h\right)}{2\,.\,2\,(1+h)}\,x^{-5/2}\right.$$
$$\left. + \frac{\left(\frac{1}{2}+h\right)\left(\frac{3}{2}+h\right)\left(\frac{5}{2}+h\right)\left(\frac{7}{2}+h\right)}{2\,.\,4\,.\,2^2\,(1+h)\,(2+h)}\,x^{-9/2} + \cdots\right\}$$
$$= x^{-h}\,\varphi\,(h)$$

die beiden von einander unabhängigen particulären Integrale der Gleichung. Somit genügt auch der Ausdruck

$$\frac{y_2 - y_1}{h} = \frac{x^{-h}\,\varphi\,(h) - x^h\,\varphi\,(-h)}{h}$$

als particuläres Integral der gegebenen Gleichung. Nun ist, wenn man die höheren Potenzen von h vernachlässigt:

$$x^h = 1 + h\,log\,x, \quad x^{-h} = 1 - h\,log\,x,$$

ferner:

$$\varphi\,(h) = x^{-1/2} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\frac{1}{2}\,.\,\frac{3}{2}\cdots\frac{4r-1}{2}}{(2\,.\,4\ldots 2\,r)^2}\,(1 + h\,F_r)\,x^{-\frac{4r+1}{2}},$$

und

$$\varphi\,(-h) = x^{-1/2} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\frac{1}{2}\,.\,\frac{3}{2}\cdots\frac{4r-1}{2}}{(2\,.\,4\ldots 2\,r)^2}\,(1 - h\,F_r)\,x^{-\frac{4r+1}{2}},$$

wobei
$$F_r = \sum_{s=1}^{s=r}\left(\frac{2}{2\,r + 2\,s - 1} + \frac{2}{2\,s-1} - \frac{1}{s}\right)$$

gesetzt ist. Setzt man nun diese Werthe in den obigen Ausdruck ein und macht sodann $h = 0$, so erhält man:

$$\left(\frac{y_2 - y_1}{h}\right)_{h=0} = 2\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\frac{1}{2}\,.\,\frac{3}{2}\cdots\frac{4r-1}{2}}{(2\,.\,4\ldots 2\,r)^2}\,F_r\,x^{-\frac{4r+1}{2}}$$
$$- 2\,log\,x\left[x^{-1/2} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\frac{1}{2}\,.\,\frac{3}{2}\cdots\frac{4r-1}{2}}{(2\,.\,4\ldots 2\,r)^2}\,x^{-\frac{4r+1}{2}}\right].$$

Dieser Ausdruck stellt somit im Falle $2\,n = -1$ das zweite particuläre Integral der Legendre'schen Gleichung dar. Das erste erhält man unmittelbar aus y_1 oder y_2, wenn man darin $h = 0$ setzt. Bezeichnet man den dadurch entstehenden Ausdruck jetzt geradezu mit y_1, so bemerkt man, dass die Summe, welche mit $2\,log\,x$ multiplicirt ist, gleich y_1 ist, und wir erhalten daher als allgemeines Integral der Gleichung für den Fall $2\,n = -1$:

$$y = A y_1 + B\left(y_1 \log x - \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{4r-1}{2}}{(2.4\ldots 2r)^2} F_r\, x^{-\frac{4r+1}{2}}\right).$$

Da $2n$ in den letzten beiden Paragraphen eine ungerade ganze Zahl ist, so lässt sich die Gleichung schreiben:

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right\} + \left(p^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0,$$

wo p irgend eine ganze Zahl ist.

Der Fall eines positiven p ist der in §. 93 betrachtete; der Fall, wo p negativ oder Null ist, ist in §. 94 betrachtet worden. Die Eigenschaften der Functionen, welche durch die Differentialgleichung in ihrer gegenwärtigen Gestalt definirt werden, sind von W. M. Hicks in seiner Abhandlung über „Ringfunctionen" in den Phil. Trans. Roy. Soc. (1881), p. 609 bis 652 untersucht worden.

1. Aufgabe. Unter Voraussetzung des Resultats der 1. Aufgabe in §. 64 zeige man, wie man die Lösung von

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right\} = \frac{1}{4} y$$

ableiten kann aus der Lösung von

$$(1-k^2)\frac{d^2 v}{dk^2} + \frac{1-3k^2}{k}\frac{dv}{dk} = v,$$

welches die Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln der elliptischen Functionen ist.

2. Aufgabe. Man beweise, dass das particuläre Integral der Gleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2 w}{dx^2} + n(n+1) w = \frac{dP_n}{dx}$$

lautet: λP_{n-1}, wo λ eine Constante ist, und ebenso dass das particuläre Integral von

$$(1-x^2)\frac{d^2 w}{dx^2} + n(n+1) w = \frac{dQ_n}{dx}$$

ist: $\lambda' Q_{n+1}$, worin λ' eine Constante bedeutet.

§. 95.

In den allgemeinen Fällen I, II, III des §. 92 kann man die zweite particuläre Lösung mittelst der bereits erhaltenen und ähnlicher Functionen ausdrücken. Es bezeichne v die bereits erhaltene particuläre Lösung, so dass z. B. im Falle I v gleich P_n sein würde, und es sei:

$$y = uv - w,$$

wo u und w noch unbestimmt sind. Wird dies in die Differentialgleichung substituirt, so erhält man:

$$-\left[\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dw}{dx}\right\}+n(n+1)w\right]+v\left\{(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2}-2x\frac{du}{dx}\right\}$$

$$+2\frac{du}{dx}(1-x^2)\frac{dv}{dx}+u\left[\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dv}{dx}\right\}+n(n+1)v\right]=0.$$

Da v eine Lösung ist, so verschwindet das letzte Glied, und da u und w nur der einzigen Bedingung unterworfen sind, dass sie dieser Gleichung genügen müssen, so können wir nach Belieben noch eine andere zwischen ihnen festsetzen. Wählen wir diese so, dass der Coefficient von v verschwindet, so haben wir:

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2}-2x\frac{du}{dx}=0,$$

und daher:

$$(x^2-1)\frac{du}{dx}=const.$$

Da wir nur eine particuläre Lösung suchen, empfiehlt es sich, wenn diese so einfach als möglich ist; wir können daher, indem wir der Constanten einen speciellen Werth beilegen, setzen:

$$(x^2-1)\frac{du}{dx}=-1,$$

so dass ein Werth von u gegeben ist durch

$$u=\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}.$$

Die Gleichung zur Bestimmung von w wird nun:

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dw}{dx}\right\}+n(n+1)w=2\frac{dv}{dx}.$$

Ist das particuläre Integral dieser Gleichung, welches w_1 sein möge, gefunden, so ist die zweite Lösung der ursprünglichen Gleichung:

$$y=\frac{1}{2}v\log\frac{x+1}{x-1}-w_1.$$

Der Werth von w_1 in Form einer nach absteigenden Potenzen von x geordneten Reihe kann leicht gefunden werden. In dem Falle eines positiven ganzen n z. B. nehmen wir:

$$v=x^n-\frac{n(n-1)}{2.(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\dots$$

und erhalten sogleich die Gleichung zur Bestimmung von w_1 in der Form:

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dw_1}{dx}\right\} + n(n+1)w_1$$
$$= 2n\left[x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{2.(2n-1)}x^{n-3} + \cdots\right].$$

Setzt man:

$$w_1 = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-3} + C_3 x^{n-5} + \cdots,$$

substituirt dies und macht die Coefficienten des höchsten Gliedes einander gleich, so folgt:

$$C_1\{n(n+1) - n(n-1)\} = 2n$$

oder:

$$C_1 = 1,$$

und setzt man die Coefficienten der mit x^{n-2r+1} behafteten Glieder einander gleich, so hat man:

$$C_r\{n(n+1) - (n-2r+1)(n-2r+2)\}$$
$$+ (n-2r+3)(n-2r+2)\,C_{r-1}$$
$$= (-1)^{r-1}.2\,\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2r+2)}{2.4\ldots(2r-2)(2n-1)\ldots(2n-2r+3)}.$$

Der allgemeine hieraus ableitbare Werth von C_r ist complicirt; die Werthe der ersten Coefficienten sind:

$$C_2 = -\frac{(n-1)(n-2)(3n-1)}{3(2n-1)(2n-2)},$$

$$C_3 = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(30n^2-50n+12)}{3.4.5(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)},$$

u. s. w.; es ist jedoch überflüssig, noch mehr von den Coefficienten niederzuschreiben, da der Ausdruck für w_1 sogleich in eine andere Form gesetzt werden wird.

Beziehung zwischen den particulären Lösungen.

§. 96.

Wir haben nunmehr das vollständige Integral der Legendre'schen Gleichung in allen Fällen, in denen n eine reelle Constante ist, erhalten, indem wir zwei Integrale, welche linear unabhängig (§. 72) von einander sind, ableiteten. Wir wissen jedoch (§. 65),

dass, wenn ein Integral einer Differentialgleichung zweiter Ordnung gefunden ist, die Stammgleichung mittelst desselben und, wenn nöthig, anderer Functionen sich ausdrücken lässt, und daher auch jedes andere Integral in dieser Weise darstellbar ist. Wir gehen dazu über, diese Relation für die Fälle, in denen sie noch nicht gefunden war, d. h. für die obigen Fälle I, II und III, aufzustellen. Die erste Form, in welcher dieselbe dargestellt werden kann, ergiebt sich mit Hülfe von §. 65. Wir definiren P_n und Q_n durch die verallgemeinerten Gleichungen:

$$P_n = \frac{\Pi(2n)}{2^n \Pi(n) \Pi(n)} \left\{x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \cdots\right\}$$

und:

$$Q_n = \frac{2^n \Pi(n) \Pi(n)}{\Pi(2n+1)} \left\{x^{-(n+1)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-(n+3)} + \cdots\right\},$$

mag nun n eine ganze Zahl sein oder nicht. Dabei ist $\Pi(n)$ die Gauss'sche Π-Function und gleich $\Gamma(n+1)$, also im Falle eines ganzzahligen n gleich $n!$ (siehe das nächste Capitel §. 125), ferner sind P_n und Q_n stets Integrale der Legendre'schen Gleichung, da sie constante Vielfache respective von y_1 und y_2 sind. Wir haben somit:

$$(1-x^2)\frac{d^2 P_n}{dx^2} - 2x\frac{dP_n}{dx} + n(n+1) P_n = 0$$

$$(1-x^2)\frac{d^2 Q_n}{dx^2} - 2x\frac{dQ_n}{dx} + n(n+1) Q_n = 0.$$

Multipliciren wir die erste mit Q_n, die zweite mit P_n und subtrahiren dann die letztere von der ersteren, so wird:

$$(x^2-1)\left(Q_n\frac{d^2 P_n}{dx^2} - P_n\frac{d^2 Q_n}{dx^2}\right) + 2x\left(Q_n\frac{dP_n}{dx} - P_n\frac{dQ_n}{dx}\right) = 0,$$

oder:

$$(x^2-1)\left(Q_n\frac{dP_n}{dx} - P_n\frac{dQ_n}{dx}\right) = A,$$

worin A eine Constante ist, die aber nicht willkürlich, sondern bestimmt ist, weil Q_n und P_n bestimmte Functionen sind. Um A zu finden, betrachten wir die Glieder, welche die höchsten Potenzen von x enthalten; dieselben sind:

$$\text{in } Q_n\colon \quad \frac{2^n \Pi(n) \Pi(n)}{\Pi(2n+1)} x^{-(n+1)}$$

$$\text{und in } P_n\colon \quad \frac{\Pi(2n)}{2^n \Pi(n) \Pi(n)} x^n,$$

und daher, wegen $\Pi(2n+1) = (2n+1)\,\Pi(2n)$:

$$A = \frac{\Pi(2n)}{\Pi(2n+1)}\{n + (n+1)\} = 1.$$

Somit ist:

$$Q_n \frac{dP_n}{dx} - P_n \frac{dQ_n}{dx} = \frac{1}{x^2-1}.$$

Dies giebt:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{P_n}{Q_n}\right) = \frac{1}{(x^2-1)\,Q_n^{\,2}},$$

oder, äquivalent hiermit:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{Q_n}{P_n}\right) = \frac{1}{(1-x^2)\,P_n^{\,2}},$$

folglich:

$$\frac{Q_n}{P_n} = -\int_\infty^x \frac{dx}{(x^2-1)\,P_n^{\,2}} = \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)\,P_n^{\,2}},$$

wo keine Constante hinzuzufügen ist, wie man sieht, wenn man beide Seiten nach absteigenden Potenzen von x entwickelt und die Coefficienten der höchsten Potenzen von x vergleicht.

§. 97.

Dieses Resultat lässt sich noch in einer anderen Form schreiben; dazu müssen wir jedoch erst **zwei Relationen** zwischen den Functionen beweisen, welche durch die Legendre'sche Gleichung für verschiedene Werthe von n gegeben werden.

Aus den im vorigen Paragraphen gegebenen Ausdrücken finden wir, dass der Coefficient von x^{n+1-2r} in $P_{n+1} - P_{n-1}$ lautet:

$$(-1)^r \frac{\Pi(2n-2)}{2^{n-1}\Pi(n-1)\Pi(n-1)} \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-2r+2)}{2.4\ldots 2r(2n+1)(2n-1)\ldots(2n-2r+1)} \times$$
$$\left\{\frac{(2n+2)(2n+1)2n(2n-1)}{4(n+1)n(n+1)n}(n+1)n(2n-2r+1) + 2r(2n+1)(2n-1)\right\}.$$

Der letzte Factor vereinfacht sich leicht zu

$$(2n+1)^2\,(2n-1),$$

und daher ist der Coefficient:

$$(-1)^r \frac{\Pi(2n)}{2^n\,\Pi(n)\,\Pi(n)} \times$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2r+2)}{2.4\ldots 2r(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2r+3)(2n-2r+1)}(2n+1).$$

Hiernach ist der Coefficient von x^{n-2r} in

$$\frac{dP_{n+1}}{dx} - \frac{dP_{n-1}}{dx}$$

der folgende:

$$(-1)^r (2n+1) \frac{\Pi(2n)}{2^n \Pi(n)\Pi(n)} \times$$
$$\frac{n(n-1)\dots(n-2r+2)(n-2r+1)}{2.4\dots 2r\ (2n-1)(2n-3)\dots(2n-2r+1)},$$

d. h. er ist gleich dem Coefficienten derselben Potenz in $(2n+1)P_n$. Es sind somit diese beiden Ausdrücke Glied für Glied einander gleich, und daher ist:

$$\frac{dP_{n+1}}{dx} - \frac{dP_{n-1}}{dx} = (2n+1)P_n,$$

oder:

$$\frac{dP_n}{dx} - \frac{dP_{n-2}}{dx} = (2n-1)\ P_{n-1}.$$

In dem Falle, wo n eine positive ganze Zahl ist, führt diese Gleichung zu einer endlichen Reihe für $\frac{dP_n}{dx}$, nämlich zu:

$$\frac{dP_n}{dx} = (2n-1)P_{n-1} + (2n-5)P_{n-3} + (2n-9)P_{n-5} + \cdots,$$

wobei das letzte Glied der Reihe entweder $3P_1$ oder P_0 (d. i. 1) ist, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Ist n keine positive ganze Zahl, so wird die Reihe ins Unendliche gehen, aber stets der Werth von $\frac{dP_n}{dx}$ sein, vorausgesetzt, dass x grösser als 1 ist.

§. 98.

Wir sehen daher jetzt aus §. 95, dass

$$\frac{1}{2} P_n \log \frac{x+1}{x-1} - w$$

eine Lösung der Differentialgleichung ist, wenn w als das particuläre Integral der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dw}{dx}\right\} + n(n+1)w = 2\frac{dP_n}{dx}$$
$$= 2\left\{(2n-1)P_{n-1} + (2n-5)P_{n-3} + \cdots\right\}$$

(wegen der eben gefundenen Gleichung) bestimmt wird. Um dieses particuläre Integral zu erhalten, setzen wir:

$$w = a_1 P_{n-1} + a_3 P_{n-3} + \cdots + a_{2r-1} P_{n-2r+1} + \cdots$$

und substituiren dies. Wegen

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right\} = -m(m+1)P_m$$

ist der Coefficient von $a_{2r-1}\, P_{n-2r+1}$ auf der linken Seite:

$$n(n+1) - (n-2r+1)(n-2r+2)$$
$$= 2(2r-1)(n-r+1),$$

und daher:

$$a_{2r-1}(2r-1)(n-r+1) = 2n - 4r + 3.$$

Der Werth von w ist daher nunmehr bestimmt und die entsprechende Lösung der Legendre'schen Gleichung ist:

$$\frac{1}{2} P_n \log\frac{x+1}{x-1} - \left\{\frac{2n-1}{1.n} P_{n-1} + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3} + \frac{2n-9}{5(n-2)} P_{n-5} + \cdots\right\},$$

wobei das letzte Glied, falls n gerade ist,

$$\frac{3}{(n-1)\left(\frac{1}{2}n+1\right)} P_1,$$

und, falls n ungerade ist,

$$\frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)} P_0, \text{ d. i. } \frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

lautet.

§. 99.

Wir haben nun diese Lösung mit Q_n zu vergleichen. Nimmt man an, dass dieselbe nach absteigenden Potenzen von x entwickelt werde, so muss sie von der Form sein:

$$AP_n + BQ_n,$$

worin A und B Constanten sind. Nun kommt aber in der Reihe das Glied, welches x^n enthält, nicht vor, da

$$\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \cdots$$

ist. Somit muss $A = 0$ sein. Mithin verschwinden die Coefficienten der zwischen x^n und $x^{-(n+1)}$ liegenden Potenzen; man bestätigt dies leicht an den ersten paar Gliedern. Die obige Lösung ist deshalb ein constantes Vielfaches von Q_n, also:

$$B\,Q_n = \frac{1}{2} P_n \log \frac{x+1}{x-1}$$
$$- \left\{ \frac{2n-1}{1 \,.\, n} P_{n-1} + \frac{2n-5}{3.(n-1)} P_{n-3} + \frac{2n-9}{5(n-2)} P_{n-5} + \cdots \right\}$$
$$= \frac{1}{2} P_n \log \frac{x+1}{x-1} - Z_n,$$

wobei Z_n für die Reihe, welche im Falle eines ganzzahligen n eine Function $(n-1)$ten Grades ist, gesetzt ist. Hieraus folgt:

$$B\,\frac{Q_n}{P_n} = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} - \frac{Z_n}{P_n},$$

und somit:

$$B\,\frac{d}{dx}\left(\frac{Q_n}{P_n}\right) = -\frac{1}{x^2-1} - \frac{U}{{P_n}^2},$$

wobei U eine ganze Function von x von nicht höherem als dem $(2n-2)$ten Grade ist.

Substituiren wir dies in die linke Seite der Gleichung in §. 96, so geht dieselbe über in:

$$\frac{B}{(x^2-1)\,{P_n}^2} = \frac{1}{x^2-1} + \frac{U}{{P_n}^2},$$

oder:

$$B = {P_n}^2 + (x^2-1)\,U,$$

wo die rechte Seite eine endliche ganze Function von x ist. Diese Gleichung ist richtig für alle Werthe von x. Setzt man $x = 1$, so erhält man B gleich dem Werthe, welchen ${P_n}^2$ für $x = 1$ annimmt. Nun war in Aufgabe 1 von §. 90 angegeben worden, dass P_n der Coefficient von z^n in der Entwickelung von $(1 - 2xz + z^2)^{-1/2}$ nach steigenden Potenzen von z sei; mithin ist der Werth von P_n für $x = 1$ der Coefficient von z^n in der Entwickelung von $(1 - 2z + z^2)^{-1/2}$, d. h. von $(1-z)^{-1}$. Dieser Coefficient ist aber gleich 1, so dass auch $P_n = 1$ ist für $x = 1$. Mithin wird $B = 1$, und die Gleichung geht über in:

$$Q_n = \frac{1}{2} P_n \log \frac{x+1}{x-1} - Z_n.$$

1. Aufgabe. Die folgenden Eigenschaften, welche denen von P_n analog sind, gelten für Q_n:

$$(1)\quad \frac{d^{n+1}Q_n}{d\,x^{n+1}} = \frac{(-2)^n\,\Pi(n)}{(x^2-1)^{n+1}}.$$

$$(2)\quad \frac{d\,Q_{n+1}}{d\,x} - \frac{d\,Q_{n-1}}{d\,x} = (2\,n+1)\,Q_n.$$

$$(3)\quad n\,\frac{d\,Q_{n+1}}{d\,x} + (n+1)\,\frac{d\,Q_{n-1}}{d\,x} = (2\,n+1\,x)\,\frac{d\,Q_n}{d\,x}.$$

2. Aufgabe. Man bestimme die Eigenschaften der Integrale Q, welche den in der 4. Aufgabe des §. 90 gegebenen Eigenschaften der Integrale P entsprechen.

Die fernere Entwickelung der Eigenschaften der Functionen, welche die particulären Lösungen der Legendre'schen Gleichung sind, hängt nicht bloss von der Differentialgleichung ab; der Leser findet eine eingehendere Untersuchung ihrer analytischen Eigenschaften und ihrer Anwendungen auf mathematische Physik in dem ausgezeichneten Lehrbuch von Heine: *Handbuch der Kugelfunctionen.* Auch die Lehrbücher von Todhunter, *The functions of Laplace*, und von Ferrers, *Spherical Harmonics*, werden sich als nützlich erweisen.

Die Bessel'sche Differentialgleichung.

§. 100.

Diese Differentialgleichung lautet:

$$x^2\,\frac{d^2 y}{d\,x^2} + x\,\frac{d\,y}{d\,x} + (x^2 - n^2)\,y = 0;$$

oder, was dasselbe ist:

$$x\,\frac{d}{d\,x}\left(x\,\frac{d\,y}{d\,x}\right) + (x^2 - n^2)\,y = 0,$$

worin n eine Constante ist, und zwar wird vorausgesetzt, dass n reell ist.

Diese Gleichung tritt ebenso wie die Legendre'sche Gleichung bei Untersuchungen in der angewandten Mathematik auf, und ist dabei n in der Regel eine ganze Zahl; wie bei der vorhergehenden Gleichung aber legen wir dem Werthe von n diese Beschränkung nicht auf.

Um die Gleichung zu lösen, setzen wir:

$$y = A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_2} + A_3 x^{m_3} + \cdots$$

und substituiren dies; dann erhalten wir:

$$(m_1^2 - n^2) A_1 x^{m_1} + (m_2^2 - n^2) A_2 x^{m_2} + (m_3^2 - n^2) A_3 x^{m_3} + \cdots$$
$$+ A_1 x^{m_1+2} + A_2 x^{m_2+2} + \cdots = 0.$$

Diese Gleichung muss identisch erfüllt sein. Wir bekommen daher durch Vergleichung der Exponenten:

$$m_2 = m_1 + 2$$
$$m_3 = m_2 + 2,$$

oder die Reihe schreitet nach aufsteigenden Potenzen von x fort, bei denen die gemeinsame Differenz der Exponenten gleich 2 ist. Mithin ist:

$$m_r = m_1 + 2(r - 1).$$

Nimmt man das Glied in x mit dem niedrigsten Exponenten, so ist:

$$m_1^2 = n^2,$$

da A_1 nicht verschwindet. Somit ist:

$$m_1 = + n \text{ oder } m_1 = - n.$$

Der Coefficient von x^{m_1+2r} auf der linken Seite muss gleich Null sein, daher:

$$\{(m_1 + 2r)^2 - n^2\} A_{r+1} + A_r = 0,$$

oder da $m_1^2 = n^2$:

$$A_{r+1} = - \frac{A_r}{2^2 . r} \frac{1}{m_1 + r}.$$

§. 101.

Wir betrachten zuerst die Lösung, welche dem Werthe

$$m_1 = + n$$

entspricht.

Alsdann werden die Coefficienten A bestimmt durch die Gleichung:

$$A_{r+1} = - \frac{A_r}{2^2 . r . (n + r)},$$

so dass

$$A_r = (-1)^{r-1} \frac{A_1}{(r-1)!\, 2^{2(r-1)} (n+1)(n+2) \ldots (n+r-1)}$$

ist für Werthe von r, die grösser als 1 sind, und die Reihe, welche eine Lösung der Differentialgleichung ist, wird:

$$A_1 x^n \left[1 - \frac{x^2}{2^2(n+1)} + \frac{x^4}{2!\,2^4(n+1)(n+2)} - \frac{x^6}{3!\,2^6(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right],$$

worin A_1 eine willkürliche Constante ist. Giebt man dem A_1 den besonderen Werth $\frac{1}{2^n \Pi(n)}$, worin $\Pi(n)$ die Gauss'sche Π-Function und dasselbe ist wie $\Gamma(n+1)$, so wird der Ausdruck mit I_n bezeichnet, so dass ist:

$$I_n = \frac{x^n}{2^n \Pi(n)}\left[1 - \frac{x^2}{2^2(n+1)} + \frac{x^4}{2!\,2^4(n+1)(n+2)} - \frac{x^6}{3!\,2^6(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right]$$

$$= \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^r}{\Pi(n+r)\,\Pi(r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

Diese Function wird gewöhnlich die Bessel'sche Function $n$ter Ordnung genannt. Ist n positiv, gleichviel ob eine ganze Zahl oder nicht, so geht die Reihe ins Unendliche und ist, für endliche Werthe der Veränderlichen, augenscheinlich convergent. Mithin ist $A I_n$, worin A eine willkürliche Constante ist, eine Lösung der Differentialgleichung. Bevor wir die Form von I_n betrachten, wenn n eine negative ganze Zahl ist, ist es zweckmässig, die Lösung zu suchen, welche dem Falle

$$m_1 = -n$$

entspricht.

Die Ausführung bleibt die nämliche wie vorher, nur dass das Zeichen von n geändert wird, und die Lösung ist:

$$B_1 x^{-n} \left[1 - \frac{x^2}{2^2(-n+1)} + \frac{x^4}{2!\,2^4(-n+1)(-n+2)} - \frac{x^6}{3!\,2^6(-n+1)(-n+2)(-n+3)} + \cdots\right],$$

worin B_1 eine willkürliche Constante ist. Dem B_1 lege man den Werth $\frac{1}{2^{-n}\Pi(-n)}$ bei; alsdann ist der resultirende Ausdruck

genau dieselbe Function von $-n$, wie I_n von $+n$, derselbe kann daher mit I_{-n} bezeichnet werden, so dass

$$I_{-n} = \frac{x^{-n}}{2^{-n}\,\Pi(-n)}\left\{1 - \frac{x^2}{2^2(-n+1)} + \frac{x^4}{2!\,2^4(-n+1)(-n+2)} - \cdots\right\}$$

$$= \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{(-1)^r}{\Pi(-n+r)\,\Pi(r)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}$$

ist.

Ist nun n negativ, gleichviel ob ganz oder nicht, oder ist es positiv, aber nicht ganz, so geht diese Reihe ins Unendliche und convergirt für endliche Werthe der Veränderlichen. In diesem Falle ist $B\,I_{-n}$ eine andere Lösung der Differentialgleichung.

Ist n **keine ganze** Zahl, mag sie nun eine positive oder negative Grösse sein, so sind I_n und I_{-n} zwei von einander unabhängige und bestimmte particuläre Lösungen der Differentialgleichung und das vollständige Integral ist:

$$y = A\,I_n + B\,I_{-n}.$$

§. 102.

Wenn n **eine ganze Zahl**, ausser Null, ist, so sind **zwei Fälle** zu unterscheiden. Ist erstens n eine **negative** ganze Zahl und gleich $-p$, so kommt in dem Coefficienten sämmtlicher Glieder, welche innerhalb der Klammern auf x^{2p} folgen, und auch in diesem selbst ein verschwindender Factor vor, und es verschwinden somit nach §. 86 die Glieder, welche diesem vorangehen. Dann geht I_n über in:

$$\sum_{r=p}^{r=\infty} \frac{(-1)^r}{\Pi(n+r)\,\Pi(r)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r},$$

oder, was dasselbe ist, in:

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s+p}}{\Pi(s)\,\Pi(s+p)}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2s},$$

da $n + p = 0$ ist. Dieser letztere Ausdruck ist nun $(-1)^p I_p$, d. h. er ist $(-1)^{-n} I_{-n}$, so dass in dem Falle, wo n eine negative ganze Zahl ist, eine der particulären Lösungen, nämlich I_n, in ihrer veränderten Form nur ein constantes Vielfaches der anderen Lösung I_{-n} ist.

In analoger Weise kann bewiesen werden — oder es kann dies auch unmittelbar aus dem Vorigen abgeleitet werden —, dass,

wenn n eine **positive** ganze Zahl ist, die eine der particulären Lösungen, nämlich I_{-n}, nur ein constantes Vielfaches der anderen I_n ist.

Ist $n = 0$, so fallen die beiden Lösungen zusammen. Daher können wir in jedem Falle, wo n eine ganze Zahl, gleichviel ob positiv, Null oder negativ, ist, setzen:

$$I_n = (-1)^n I_{-n}.$$

Damit jedoch diese Gleichung gelte, muss man sich daran erinnern, dass sie sich auf die betreffenden Grenz-Formen der particulären Lösung der Differentialgleichung bezieht, welche man erhält, wenn man aus dem im allgemeinen Falle geltenden Ausdrucke der letzteren die für den besonderen Werth von n überflüssigen Glieder weglässt, und die obige Relation gilt nur für diese Grenz-Formen. Sie zeigt jedoch, dass, wenn n eine ganze Zahl ist, man nur die positive Quadratwurzel von n^2 zu nehmen und die Function, welche zu dieser Quadratwurzel gehört, als die entsprechende particuläre Lösung zu betrachten braucht.

Es bleibt daher noch, um das vollständige Integral zu erhalten, in zwei Fällen eine zweite Lösung zu ermitteln übrig, und diese zwei Fälle sind:

Erstens, wenn $n = 0$ ist.

Zweitens, wenn n eine ganze Zahl ist, die (nach der obigen Auseinandersetzung) als positiv betrachtet werden kann.

§. 103.

Um diese particulären Lösungen zu erhalten, ist es zweckmässig, erst einige **fundamentale Eigenschaften** zu beweisen.

Man bestätigt ohne Weiteres, dass die folgenden Relationen stattfinden:

$$(1) \quad \frac{dI_0}{dx} = -I_1,$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx}(x^n I_n) = x^n I_{n-1},$$

$$(3) \quad \frac{d}{dx}(x^{-n} I_n) = -x^{-n} I_{n+1}.$$

Aus den letzten beiden erhalten wir:

$$x^n \frac{d I_n}{d x} + n x^{n-1} I_n = x^n I_{n-1}$$

$$x^{-n} \frac{d I_n}{d x} - n x^{-n-1} I_n = - x^{-n} I_{n+1}.$$

Dividirt man die erste von diesen durch x^{n-1}, die zweite durch x^{-n-1} und subtrahirt dann die letzte von der ersten, so kommt:

$$2 n I_n = x (I_{n-1} + I_{n+1}),$$

oder:

$$I_{n-1} + I_{n+1} = \frac{2}{x} n I_n.$$

Analog ist:

$$- I_{n+1} - I_{n+3} = - \frac{2}{x} (n + 2) I_{n+2},$$

$$I_{n+3} + I_{n+5} = \frac{2}{x} (n + 4) I_{n+4}$$

. . . .

Aus dem allgemeinen Werthe von I ist nun ersichtlich, dass $I_\infty = 0$ ist; daher geben die vorstehenden Gleichungen:

$$I_{n-1} = \frac{2}{x} \{n I_n - (n + 2) I_{n+2} + (n + 4) I_{n+4} - \cdots \textit{in inf.}\}.$$

Diese Reihe ist convergent.

Aufgabe. Man beweise die Gleichung:

$$\frac{d I_n}{d x} = \frac{2}{x} \left\{\frac{1}{2} n I_n - (n + 2) I_{n+2} + (n + 4) I_{n+4} - \cdots \textit{in inf.}\right\}.$$

§. 104.

Um die gesuchte particuläre Lösung in dem Falle zu erhalten, wo $n = 0$ ist, substituiren wir

$$y = u I_0 + w$$

in die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{1}{x} \frac{d y}{d x} + y = 0.$$

Das Resultat ist:

$$\frac{d^2 w}{d x^2} + \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} + w = - I_0 \left(\frac{d^2 u}{d x^2} + \frac{1}{x} \frac{d u}{d x}\right) - 2 \frac{d u}{d x} \frac{d I_0}{d x}.$$

Lassen wir den Coefficienten von I_0 verschwinden, so ist:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dx} = 0,$$

und diese Gleichung wird befriedigt durch

$$u = log\, x.$$

Die Gleichung, welche w bestimmt, ist nunmehr:

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dw}{dx} + w &= -\frac{2}{x}\frac{dI_0}{dx} \\ &= \frac{2}{x} I_1 \\ &= \frac{4}{x^2}(2I_2 - 4I_4 + 6I_6 - 8I_8 + \cdots). \end{aligned}$$

Nun folgt aus der Gleichung

$$\frac{d^2 I_n}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dI_n}{dx} + I_n = \frac{n^2}{x^2} I_n,$$

dass

$$y = \lambda I_n$$

das particuläre Integral von

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = \frac{\lambda n^2}{x^2} I_n$$

ist. Das allgemeine Glied auf der rechten Seite der Gleichung, welche w bestimmt, ist:

$$\frac{4}{x^2}(-1)^{\frac{1}{2}n-1} n I_n,$$

wir erhalten daher für dieses Glied:

$$\lambda = (-1)^{\frac{1}{2}n-1}\frac{4}{n}.$$

Somit:

$$w = 2\left(I_2 - \frac{1}{2}I_4 + \frac{1}{3}I_6 - \frac{1}{4}I_8 + \frac{1}{5}I_{10} - \cdots\right),$$

und daher ist eine Lösung der ursprünglichen Gleichung:

$$I_0\, log\, x + 2\left(I_2 - \frac{1}{2}I_4 + \frac{1}{3}I_6 - \frac{1}{4}I_8 + \frac{1}{5}I_{10} - \cdots\right).$$

Wird dieselbe mit Y_0 bezeichnet, so ist das vollständige Integral der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$$

gegeben durch

$$y = A I_0 + B Y_0,$$

wo A und B willkürliche Constanten sind.

§. 105.

Um die zweite particuläre Lösung in dem Falle, wenn n eine ganze Zahl ist, zu erhalten, setzen wir:

$$y = I_n \log x - w,$$

so dass

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dw}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) w = \frac{2}{x}\frac{d I_n}{dx}$$

$$= \frac{2n}{x^2} I_n - \frac{4}{x^2}\Big((n+2) I_{n+2} - (n+4) I_{n+4} + (n+6) I_{n+6} - \cdots\Big)$$

ist. Nun ist:

$$\frac{d^2(\lambda I_m)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d(\lambda I_m)}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)\lambda I_m = \frac{m^2 - n^2}{x^2}\lambda I_m,$$

wo λ eine Constante bedeutet, und daher ist ein Werth von w, welcher der Gleichung

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dw}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) w = \frac{(-1)^r}{x^2} 4(n + 2r) I_{n+2r}$$

genügt, der folgende:

$$w = (-1)^r \frac{n + 2r}{r(n+r)} I_{n+2r}.$$

Ist w_1 eine Grösse, welche die Gleichung

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dw_1}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) w_1 = \frac{2n}{x^2} I_n$$

befriedigt, so ist ein geeigneter Werth von w:

$$w = w_1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \frac{n+2r}{r(n+r)} I_{n+2r}.$$

Die rechte Seite der Gleichung, welche w_1 giebt, muss transformirt werden. Nach der allgemeinen Relation zwischen drei auf einander folgenden Bessel'schen Functionen erhalten wir:

$$\frac{2}{x} I_1 - I_0 = I_2.$$

Somit:

$$2\left(\frac{2}{x}\right)^2 I_1 - 2\left(\frac{2}{x}\right) I_0 - I_1 = 2\left(\frac{2}{x}\right) I_2 - I_1 = I_3;$$

hieraus ferner:

$$2.3\left(\frac{2}{x}\right)^3 I_1 - 2.3\left(\frac{2}{x}\right)^2 I_0 - 3\left(\frac{2}{x}\right) I_1 - I_2 = 2\,\frac{3}{x}\,I_3 - I_2 = I_4,$$

ebenso:

$$2.3.4\left(\frac{2}{x}\right)^4 I_1 - 2.3.4\left(\frac{2}{x}\right)^3 I_0 - 3.4\left(\frac{2}{x}\right)^2 I_1 - 4\left(\frac{2}{x}\right) I_2 - I_3$$

$$= 2\,\frac{4}{x}\,I_4 - I_3 = I_5$$

u. s. w., und die allgemeine Gleichung ist:

$$\Pi(n-1)\left(\frac{2}{x}\right)^{n-1} I_1 - \Pi(n-1)\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2} I_0 - \frac{\Pi(n-1)}{\Pi(2)}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-3} I_1$$

$$- \frac{\Pi(n-1)}{\Pi(3)}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-4} I_2 - \cdots - \frac{\Pi(n-1)}{\Pi(n-2)}\frac{2}{x} I_{n-3} - I_{n-2} = I_n,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{2n}{x^2} I_n = \frac{1}{2}\Pi(n)\left\{\left(\frac{2}{x}\right)^{n+1} I_1 - \sum_{p=0}^{p=n-2}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-p}\frac{I_p}{\Pi(p+1)}\right\}.$$

Durch wirkliche Substitution erhalten wir ferner:

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} + 1 - \frac{n^2}{x^2}\right\}\frac{I_p}{x^m}$$

$$= \frac{1}{x^m}\left\{\frac{d^2 I_p}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dI_p}{dx} + \left(1 + \frac{m^2-n^2}{x^2}\right) I_p - \frac{2m}{x}\frac{dI_p}{dx}\right\}$$

$$= \frac{1}{x^m}\left\{-\frac{2m}{x}\frac{dI_p}{dx} + \frac{p^2+m^2-n^2}{x^2} I_p\right\},$$

folglich, wenn wir $m = n - p$ setzen:

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} + 1 - \frac{n^2}{x^2}\right\}\lambda_p \frac{I_p}{x^m} = -\frac{2(n-p)}{x^{n-p}}\lambda_p\left(\frac{1}{x}\frac{dI_p}{dx} + \frac{p}{x^2} I_p\right),$$

wo λ_p eine Constante ist. Ist p nicht gleich Null, so ist die rechte Seite:

$$-\frac{2(n-p)}{x^{n-p+1}}\lambda_p I_{p-1},$$

während, wenn p gleich Null ist, die rechte Seite ist:

$$+\frac{2n}{x^{n+1}}\lambda_0 I_1.$$

Substituiren wir nun in die Gleichung für w_1 den Werth:

$$w_1 = \sum_{p=0}^{p=n-1} \lambda_p \frac{I_p}{x^{n-p}},$$

so giebt eine Vergleichung der beiden Seiten der Gleichung:

$$-2(n-p)\lambda_p = -\frac{1}{2}\Pi(n)\frac{2^{n-p+1}}{\Pi(p)}$$

für den Fall, dass p nicht Null ist, und

$$2n\lambda_o = \frac{1}{2}\Pi(n)\, 2^{n+1}$$

für den Fall, dass p Null ist. Daher, was auch p sein möge:

$$\lambda_p = \frac{2^{n-p}}{n-p}\,\frac{1}{\Pi(p)}\,\frac{\Pi(n)}{2}.$$

Hiernach ist der Werth von w_1:

$$w_1 = \frac{1}{2}\Pi(n)\sum_{p=0}^{p=n-1}\frac{1}{n-p}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-p}\frac{I(p)}{\Pi(p)},$$

und daher lautet die zweite particuläre Lösung der Bessel'schen Gleichung in dem Falle, wo n eine positive ganze Zahl ausser Null ist:

$$y = I_n \log x - \sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^r\frac{n+2r}{r(n+r)} I_{n+2r}$$
$$-\frac{1}{2}\Pi(n)\sum_{p=0}^{p=n-1}\frac{1}{n-p}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-p}\frac{I_p}{\Pi(p)}.$$

Wird die rechte Seite mit Y_n bezeichnet, so ist das vollständige Integral:

$$y = AI_n + BY_n.$$

1. Aufgabe. Eine andere Methode, um eine zweite particuläre Lösung zu erhalten, ist von Hankel angewandt worden. Jede lineare Function der particulären Lösungen ist ebenfalls eine particuläre Lösung; daher wird in dem allgemeinen Falle eine solche Lösung gegeben durch

$$2\pi e^{n\pi i}\frac{I_n \cos n\pi - I_{-n}}{\sin 2n\pi},$$

welche alsdann vollständig bestimmt ist, während sie in dem besonderen Falle eines ganzzahligen n die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, da $(-1)^n I_n = I_{-n}$ ist. Man zeige, dass, wenn dieses ausgewerthet wird, es die Form annimmt:

$$-\left(\frac{2}{x}\right)^n \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{\Pi(n-p-1)}{\Pi(p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$$

$$+\left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p}{\Pi(n+p)\,\Pi(p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \left\{ \log\frac{x^2}{4} - \Psi(n+p) - \Psi(p) \right\},$$

worin

$$\Psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Pi(z)$$

ist, und weise die Identität desselben mit der bereits erhaltenen Lösung nach. (Math. Ann. I, S. 469.)

2. Aufgabe. Die Reihe für I_n ist stets convergent; wenn jedoch z sehr gross ist, convergirt sie nur langsam, und es ist wünschenswerth, eine Reihe zu besitzen, die nach absteigenden Potenzen von z fortschreitet. Man zeige, dass

$$I_n = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left\{ 1 - \frac{(1^2-4n^2)(3^2-4n^2)}{2!\,(8z)^2} + \cdots \right\} \cos\left(z - \frac{\pi}{4} - n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left\{ \frac{1^2-4n^2}{8z} - \frac{(1^2-4n^2)(3^2-4n^2)(5^2-4n^2)}{3!\,(8z)^3} + \cdots \right\} \sin\left(z - \frac{\pi}{4} - n\frac{\pi}{2}\right)$$

ist, so dass also die Reihen abbrechen, wenn $2n$ gleich einer ungeraden ganzen Zahl ist. (Lommel.)

§. 106.

Die **Beziehung** zwischen den beiden von einander linear unabhängigen Integralen I_n und I_{-n} kann wie in §. 96 gefunden werden. Wir haben:

$$\frac{d^2 I_n}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dI_n}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) I_n = 0$$

und

$$\frac{d^2 I_{-n}}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dI_{-n}}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) I_{-n} = 0,$$

und daher:

$$\left(\frac{d^2 I_n}{dx^2} I_{-n} - \frac{d^2 I_{-n}}{dx^2} I_n\right) + \frac{1}{x}\left(\frac{dI_n}{dx} I_{-n} - \frac{dI_{-n}}{dx} I_n\right) = 0.$$

Dies giebt:

$$\frac{dI_n}{dx} I_{-n} - \frac{dI_{-n}}{dx} I_n = \frac{A}{x},$$

worin A eine Constante ist, die jedoch nicht willkürlich ist, da I_n und I_{-n} bestimmte Functionen sind. Um den Werth von A zu erhalten, braucht man nur die höchsten Glieder auf der linken Seite zu betrachten; werden dieselben substituirt, so finden wir:

$$A = \frac{1}{2^n \Pi(n)} \frac{1}{2^{-n} \Pi(-n)} (n + n)$$
$$= \frac{2n}{\Pi(n)\Pi(-n)}$$
$$= \frac{2}{\Pi(n-1)\Pi(-n)}$$
$$= \frac{2 \sin n\pi}{\pi},$$

und somit:

$$\frac{dI_n}{dx} I_{-n} - \frac{dI_{-n}}{dx} I_n = \frac{2}{\pi x} \sin n\pi$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{I_{-n}}{I_n}\right) = -\frac{2 \sin n\pi}{\pi x I_n^2}.$$

Aufgabe. Man suche die entsprechende Gleichung für ein ganzzahliges n.

Beziehung zwischen den Gleichungen von Legendre und Bessel.

§. 107.

Man kann die Bessel'sche Gleichung aus der Legendre'schen ableiten. Denn differentiirt man die Gleichung

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

m-mal und setzt man:

$$z = \frac{d^m y}{dx^m},$$

so erhält man:

$$(1 - x^2)\frac{d^2z}{dx^2} - (2m+2)x\frac{dz}{dx} + \{n(n+1) - m(m+1)\}z = 0.$$

Verwandelt man die abhängige Veränderliche in ξ, worin

$$\xi = (1 - x^2)^{1/2 m} z$$

ist, so wird die Gleichung:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 \xi}{d x^2} - 2x \frac{d \xi}{d x} + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right\} \xi = 0.$$

Verwandelt man die unabhängige Veränderliche in φ, wobei

$$\varphi^2 = n^2 (1 - x^2),$$

so geht die Gleichung nach leichten Reductionen über in:

$$\left(1 - \frac{\varphi^2}{n^2}\right) \frac{d^2 \xi}{d \varphi^2} + \left(1 - \frac{2 \varphi^2}{n^2}\right) \frac{1}{\varphi} \frac{d \xi}{d \varphi} + \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{m^2}{\varphi^2}\right) \xi = 0.$$

Lässt man nun n unendlich gross werden, so erhält man:

$$\frac{d^2 \xi}{d \varphi^2} + \frac{1}{\varphi} \frac{d \xi}{d \varphi} + \left(1 - \frac{m^2}{\varphi^2}\right) \xi = 0,$$

welches die Bessel'sche Differentialgleichung ist.

Verbindet man alle diese Operationen mit einander, so erhält man als Resultat, dass die Grenze von

$$(-\varphi)^m \left\{ \frac{(n^2 - \varphi^2)^{1/2}}{\varphi} \frac{d}{d \varphi} \right\}^m P_n \left\{ \left(1 - \frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{1/2} \right\}$$

für $n = \infty$ die Bessel'sche Function m ter Ordnung ist, deren unabhängige Veränderliche φ ist.

Aus dem vorstehenden Verfahren würde sich anscheinend ergeben, dass φ unendlich gross ist; dies wird indessen dadurch verhindert, dass man x sich unbeschränkt der Einheit nähern lässt. Das geometrische Analogon zu dieser Relation zwischen φ und x wäre es, wenn man irgend einen sehr kleinen Theil einer sphärischen (oder anderen) Oberfläche in der Nähe eines Punktes untersucht, indem man annimmt, dass dasselbe schliesslich mit der Tangentialebene der Fläche in diesem Punkte zusammenfällt und in dieser Ebene vergrössert wird.

Aufgabe. Man bestätige, dass der vorstehende Ausdruck für $n = \infty$ ein Vielfaches von I_m wird.

Im Zusammenhang hiermit möge der Studirende Heine, Theorie der Kugelfunctionen, 2. Aufl. Bd. I, S. 184 und Lord Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc. Bd. IX, S. 61 nachlesen.

Das vollständige Integral der Bessel'schen Gleichung haben wir für jeden Fall gefunden; die weitere Entwickelung der Eigenschaften der Functionen, welche in diesem Integrale auftreten, kann

hier nicht gegeben werden. Der Studirende wird die Functionen vollständig behandelt finden von Lommel in dessen „Studien über die Bessel'schen Functionen“ und in einigen Abhandlungen desselben Verfassers in den „Mathematische Annalen“ Bd. II, III, IV, IX, XIV, XVI; im Besonderen giebt die Abhandlung im XIV. Bande Differentialgleichungen an, die durch Bessel'sche integrirbar sind. Ebenso kann auf Neumann's „Theorie der Bessel'schen Functionen“ und auf Heine's „Theorie der Kugelfunctionen“ 2. Aufl. verwiesen werden, in welcher letzteren (Bd. I, S. 189) ein Verzeichniss der auf diese Functionen bezüglichen Abhandlungen gegeben ist. Todhunter's „Functions of Laplace, Lamé and Bessel“ enthält ebenfalls viele der Eigenschaften.

In Bezug auf eine allgemeine Eigenschaft aller linearen Differentialgleichungen, die denjenigen analog sind, die soeben discutirt worden sind und die zu Functionen Veranlassung geben, welche von einem constanten Parameter abhängen, kann der Studirende neben den vorstehend angegebenen Werken auch Sturm, Liouville's Journal Bd. I, und Routh, Proc. Lond. Math. Soc. Bd. X, nachlesen.

Die Riccati'sche Differentialgleichung.

§. 108.

Die Riccati'sche Differentialgleichung lautet:

$$\frac{dy}{dx} + by^2 = cx^m.$$

Es ist indessen zweckmässig, erst die allgemeinere Form zu betrachten:

$$x\frac{dy}{dx} - ay + by^2 = cx^n.$$

Wird in der letzteren die unabhängige Veränderliche in z, wo $z = x^a$ ist, und die abhängige Veränderliche in u, wo $y = uz$ ist, verwandelt, so geht die Gleichung über in

$$\frac{du}{dz} + \frac{b}{a}u^2 = \frac{c}{a}z^{\frac{n}{a}-2},$$

welches die Riccati'sche Form ist.

§. 109.

Wir betrachten nun die allgemeinere Form.

Erstens: Dieselbe lässt sich **in endlicher Form integriren,** wenn $n = 2a$ ist.

Denn setzt man $y = u x^a$, so findet man durch Substitution:

$$x^{a+1} \frac{du}{dx} + b x^{2a} u^2 = c x^n,$$

oder:

$$x^{1-a} \frac{du}{dx} + b u^2 = c x^{n-2a}.$$

In dem Falle, wo $n = 2a$ ist, wird dieses:

$$x^{1-a} \frac{du}{dx} = c - b u^2.$$

Die Veränderlichen sind separirbar und u ist ausdrückbar mittelst Exponentialfunctionen oder Kreisfunctionen, je nachdem b und c gleiches oder verschiedenes Vorzeichen haben.

Zweitens: Dieselbe lässt sich auch **in endlicher Form integriren,** wenn $\frac{n \pm 2a}{2n}$ eine positive ganze Zahl ist.

Die abhängige Veränderliche möge in y_1 verwandelt werden, wo $A + \frac{x^2}{y_1} = y$ und A eine Constante ist, deren Werth noch zu bestimmen ist. Substituirt man dies und ordnet dann wieder die Glieder, so geht die Gleichung über in:

$$-aA + bA^2 + (n - a + 2bA) \frac{x^n}{y_1} + b \frac{x^{2n}}{y_1^2} - \frac{x^{n+1}}{y_1^2} \frac{dy_1}{dx} = c x^n.$$

Wir wählen A so, dass das constante Glied verschwindet, also entweder $A = 0$ oder $A = \frac{a}{b}$.

Nimmt man $A = \frac{a}{b}$ und setzt dies in die neue Form ein, so wird nach leichter Umgestaltung:

$$x \frac{dy_1}{dx} - (a + n) y_1 + c y_1^2 = b x^n.$$

Nun ist diese Gleichung von derselben Form, wie die, von der wir ausgingen, und die Veränderungen, die eingetreten sind, bezie-

hen sich nur auf die Coefficienten — das ursprüngliche a ist zu $a + n$ geworden und b und c haben ihre Plätze gewechselt. In dieser letzten Gleichung setzen wir:

$$y_1 = \frac{a+n}{c} + \frac{x^n}{y_2},$$

dann zeigt die vorhergehende Analyse, dass die Gleichung für y_2 sein wird:

$$x\frac{dy_2}{dx} - (a + 2n)y_2 + by_2^2 = cx^n,$$

und das Resultat von i auf einander folgenden Transformationen wird sein, dass die gegebene Gleichung reducirt wird entweder auf:

$$x\frac{dy_i}{dx} - (a + in)y_i + cy_i^2 = bx^n,$$

oder auf:

$$x\frac{dy_i}{dx} - (a + in)y_i + by_i^2 = cx^n,$$

je nachdem i ungerade oder gerade ist.

Nach dem zuerst betrachteten Falle ist nun diese Gleichung in endlicher Form integrirbar, wenn

$$n = 2(a + in),$$

also wenn

$$\frac{n - 2a}{2n}$$

eine positive ganze Zahl ist.

Nimmt man aber jetzt den Werth Null für A, so kann man die Gleichung leicht transformiren in

$$x\frac{dy_1}{dx} - (n - a)y_1 + cy_1^2 = bx^n,$$

eine Gleichung, die sich von der ersten in y_1 nur dadurch unterscheidet, dass das Vorzeichen von a ein anderes ist. Wir wenden nun auf diese die frühere Reihe von Transformationen an und setzen:

$$y_1 = \frac{n-a}{c} + \frac{x^n}{y_2};$$

dann ist die Gleichung in y_2:

$$x\frac{dy_2}{dx} - (2n - a)y_2 + by_2^2 = cx^n.$$

Nach $i - 1$ weiteren Transformationen (und daher nach i Trans-

formationen im Ganzen) wird somit die gegebene Gleichung reducirt entweder auf

$$x\frac{dy_i}{dx} - (in - a)y_i + cy_i^2 = bx^n,$$

oder auf

$$x\frac{dy_i}{dx} - (in - a)y_i + b\,y_i^2 = cx^n.$$

In jedem Falle ist die Gleichung in endlicher Form integrirbar, wenn

$$n = 2\,(in - a),$$

d. h. wenn

$$\frac{n + 2a}{2n}$$

eine positive ganze Zahl ist.

Vereinigt man diese beiden Resultate, so hat man:

Die Gleichung

$$x\frac{dy}{dx} - ay + by^2 = cx^n$$

ist in endlicher Form integrirbar, wenn $\frac{n \pm 2a}{2n}$ eine positive ganze Zahl ist.

In jedem Falle ist das Integral in der Form eines endlichen Kettenbruches gegeben, dessen letzter Nenner entweder Exponential- oder Kreisfunctionen enthält.

§. 110.

Wir können nunmehr auch Bedingungen, unter denen die Riccati'sche Gleichung **in endlicher Form integrirbar** ist, erhalten. Aus §. 108 folgt, dass die Gleichung

$$\frac{du}{dx} + bu^2 = cx^m$$

durch die Substitution $u = \frac{y}{x}$ transformirt wird in:

$$x\frac{dy}{dx} - y + by^2 = cx^n,$$

worin $m = n - 2$ ist. Nun ist die letztere Gleichung in der angegebenen Weise integrirbar, wenn

$$n \pm 2 = 2ni$$

ist, wobei i eine positive ganze Zahl bedeutet, und daher ist die Riccati'sche Gleichung in endlicher Form integrirbar, wenn

$$m + 2 \pm 2 = 2i(m + 2)$$

ist. Nimmt man das negative Zeichen, so wird:

$$m = -\frac{4i}{2i - 1},$$

während das positive Zeichen giebt:

$$m = \frac{-4(i-1)}{2i - 1},$$

oder, was dasselbe ist, indem man bloss die ganze Zahl i verändert:

$$m = -\frac{4i}{2i + 1}.$$

Mithin ist die Riccati'sche Gleichung in endlicher Form integrirbar, wenn

$$m = -\frac{4i}{2i \pm 1}$$

ist, wo i Null oder eine positive ganze Zahl bedeutet.

Aufgabe. Man beweise, dass die Gleichung

$$\frac{du}{dx} + b x^k u^2 = c x^m$$

in endlicher Form integrirbar ist, wenn

$$\frac{m+1}{k+1} = \frac{-2i+1}{2i+1} \quad \text{oder} \quad \frac{-2i-1}{2i-1}$$

ist, wo i eine ganze Zahl bedeutet.

Beziehung zwischen der Bessel'schen und Riccati'schen Gleichung.

§. 111.

Die Gleichungen des §. 108 in der von uns discutirten Form sind von der ersten Ordnung, aber nicht linear; es giebt aber einige wichtige Transformationen, durch welche sie linear von der zweiten Ordnung werden.

In der Riccati'schen Gleichung möge die abhängige Veränderliche in v umgeändert werden mittelst der Gleichung

$$bu = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx},$$

so dass, wenn u in endlicher Form ausdrückbar ist, auch v es ist. Die Gleichung wird dann:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - bcvx^m = 0,$$

welche als die der Riccati'schen Gleichung entsprechende **Hauptform** genommen werden könnte.

Haben b und c dasselbe Zeichen (in welchem Falle in u Exponentialfunctionen vorkommen), so kann man diese Gleichung schreiben:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - a^2 x^m v = 0,$$

während, wenn ihre Zeichen verschieden sind (in welchem Falle Kreisfunctionen in u auftreten), die Gleichung lautet:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + a^2 x^m v = 0.$$

Jede derselben ist in endlicher Form für denselben Werth von m integrirbar, welcher Riccati's Gleichung integrirbar macht.

Führt man anstatt x die unabhängige Veränderliche z ein mittelst der Gleichung:

$$qz = x^q,$$

wo

$$q = \frac{1}{2} m + 1 = \frac{1}{n} \text{ etwa}$$

ist, so wird die Gleichung:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{n-1}{z} \frac{dv}{dz} - bcv = 0.$$

Diese ist daher in endlicher Form integrirbar, wenn

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2} m + 1 = 1 - \frac{2i}{2i \pm 1} = \frac{\pm 1}{2i \pm 1}$$

ist, woraus folgt, dass n eine ungerade ganze Zahl sein muss. Wird daher die Gleichung in der Form geschrieben:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{2p}{z} \frac{dv}{dz} - bcv = 0,$$

so ist die Bedingung dafür, dass sie sich in endlicher Form integriren lässt, die, dass p eine ganze Zahl sein muss.

Diese Gleichung ist auf ihre Normalform reducirbar durch die Substitution:

$$v\,z^{-p} = w,$$

und die Gleichung für w ist:

$$\frac{d^2 w}{d z^2} - b\,c\,w = \frac{p\,(p+1)}{z^2}\,w.$$

Dieselbe ist in endlicher Form integrirbar, wenn p eine ganze Zahl ist.

Schliesslich möge

$$w = z^{1/2}\,t$$

gesetzt werden; dann ist die Gleichung für t:

$$\frac{d^2 t}{d z^2} + \frac{1}{z}\,\frac{d t}{d z} - b\,c\,t - \left(p + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{t}{z^2} = 0,$$

und das vollständige Integral derselben lautet:

$$t = A\,I_{p+1/2}\{z\,(-b\,c)^{1/2}\} + B\,I_{-(p+1/2)}\{z\,(-b\,c)^{1/2}\}.$$

Ist $p + \frac{1}{2}$ eine ganze Zahl, so hört dies auf, das vollständige Integral zu sein; wir erhalten dann als vollständiges Integral:

$$t = A\,I_{p+1/2}\{z\,(-b\,c)^{1/2}\} + B\,Y_{p+1/2}\{z\,(-b\,c)^{1/2}\}.$$

Daher kann die Lösung der Riccati'schen Gleichung mit Hülfe von Bessel'schen Functionen ausgedrückt werden; im Besonderen wird die Lösung von

$$\frac{d^2 v}{d x^2} + \lambda\,v\,x^m = 0$$

gegeben durch

$$v = x^{1/2}\left\{A\,I_{\frac{1}{m+2}}(z\,\lambda^{1/2}) + B\,Y_{\frac{1}{m+2}}(z\,\lambda^{1/2})\right\},$$

oder durch

$$v = x^{1/2}\left\{A\,I_{\frac{1}{m+2}}(z\,\lambda^{1/2}) + B\,I_{-\frac{1}{m+2}}(z\,\lambda^{1/2})\right\},$$

je nachdem $m + 2$ der reciproke Werth einer ganzen Zahl ist oder nicht.

Dies geht unmittelbar aus der Verbindung der vorhergehenden Transformationen hervor.

Der einzige Fall, wo diese Art der Darstellung versagt, ist der,

in welchem $m + 2 = 0$, d. h. $m = -2$ ist. Die Gleichung ist alsdann:

$$x^2 \frac{d^2 v}{d x^2} + \lambda v = 0,$$

und diese lässt sich nach der Methode des §. 47 lösen.

Für das weitere Studium dieser Gleichung kann man eine Abhandlung von I. W. L. Glaisher in den Phil. Trans. 1881, p. 759 bis 828 nachlesen, in welcher vollständig die Quellen angegeben werden, und den Zusammenhang zwischen der Riccati'schen und der Bessel'schen Gleichung wird man vollständig in dem Werke und den Abhandlungen von Lommel, auf welche schon oben (S. 195) hingewiesen wurde, discutirt finden.

Einige Beispiele der Lösung in der Form von Reihen wird man in den vermischten Aufgaben finden.

Symbolische Lösungen.

§. 112.

In Fällen, wo die durch eine Reihe dargestellte Lösung einer Differentialgleichung aus einer Function in endlicher Form besteht, oder wenn sie besteht aus einer endlichen Reihe zusammen mit irgend einer Function oder Functionen in endlicher Form, ist man zuweilen im Stande, eine Lösung von symbolischer Natur zu finden, die sich der auf andere Weise erhaltenen Lösung als äquivalent erweist, sobald die darin angedeuteten Operationen ausgeführt werden.

Als ein Beispiel betrachten wir die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - n^2 y = \frac{m(m+1)}{x^2} y,$$

deren Lösung sich in endlicher Form darstellen lässt, sobald m eine ganze Zahl ist.

Wenn die abhängige Veränderliche mittelst der Relation

$$y = u x^{m+1}$$

in u verwandelt wird, so geht die Gleichung über in:

$$\frac{d^2 u}{d x^2} + 2(m+1) \frac{1}{x} \frac{d u}{d x} - n^2 u = 0.$$

Betrachten wir nun die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 v}{d x^2} - n^2 v = 0,$$

deren allgemeines Integral ist:

$$v = A e^{nx} + B e^{-nx},$$

und gehen wir von der unabhängigen Veränderlichen x zu z über, wo z für $\frac{1}{2} x^2$ steht, so wird die Gleichung:

$$2 z \frac{d^2 v}{d z^2} + \frac{d v}{d z} - n^2 v = 0.$$

Differentiiren wir dies $(m + 1)$-mal nach z und bezeichnen $\frac{d^{m+1} v}{d z^{m+1}}$ mit t, so erhalten wir:

$$2 z \frac{d^2 t}{d z^2} + (2m + 3) \frac{d t}{d z} - n^2 t = 0.$$

Wird nun die unabhängige Veränderliche aus z wieder zurück in x verwandelt, so geht diese Gleichung über in:

$$\frac{d^2 t}{d x^2} + 2(m + 1) \frac{1}{x} \frac{d t}{d x} - n^2 t = 0.$$

Daher ist:

$$\begin{aligned} u &= t \\ &= \frac{d^{m+1} v}{d z^{m+1}} \\ &= \left(\frac{1}{x} \frac{d}{d x}\right)^{m+1} (A e^{nx} + B e^{-nx}). \end{aligned}$$

Das vollständige Integral der ursprünglichen Gleichung in y ist daher:

$$y = x^{m+1} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{d x}\right)^{m+1} (A e^{nx} + B e^{-nx}).$$

Man kann demselben eine hiervon etwas verschiedene Form geben; denn es ist mit Veränderung der willkürlichen Constanten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \frac{d}{d x} (A e^{nx} + B e^{-nx}) &= \frac{n A e^{nx} - n B e^{-nx}}{x} \\ &= \frac{A' e^{nx} + B' e^{-nx}}{x}, \end{aligned}$$

und es kann daher das vollständige Integral geschrieben werden in der Form:

$$y = x^{m+1} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{d x}\right)^{m} \left(\frac{A' e^{nx} + B' e^{-nx}}{x}\right).$$

Da die Differentialgleichung ungeändert bleibt, wenn man $-(m+1)$ für m setzt, so kann das vollständige Integral auch dargestellt werden in den neuen Formen:

$$y = x^{-m}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{-m}(A e^{nx} + B e^{-nx})$$
$$= x^{-m}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{-m-1}\left(\frac{A' e^{nx} + B' e^{-nx}}{x}\right).$$

1. Aufgabe. Aus dem Vorhergehenden kann man ohne Weiteres ableiten, dass das Integral von

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + n^2 y = \frac{6}{x^2} y$$

(eine Gleichung, welche bei Untersuchungen vorkommt, die mit der Figur der Erde zusammenhängen) ausdrückbar ist in der Form:

$$y = C\left\{\left(1 - \frac{3}{n^2 x^2}\right) \sin(nx + \alpha) + \frac{3}{nx}\cos(nx + \alpha)\right\}.$$

2. Aufgabe. Man zeige, dass das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - n^2 z^{2q-2} v = 0$$

in dem Falle, wo q das Reciproke einer ungeraden ganzen Zahl $2i+1$ ist, dargestellt werden kann in den Formen:

$$v = z\left(z^{-2q+1}\frac{d}{dz}\right)^{i+1}\left(A e^{\frac{n}{q}z^q} + B e^{-\frac{n}{q}z^q}\right)$$

$$v = \left(z^{-2q+1}\frac{d}{dz}\right)^{-i}\left(A e^{\frac{n}{q}z^q} + B e^{-\frac{n}{q}z^q}\right)$$

$$v = z\left(z^{-2q+1}\frac{d}{dz}\right)^{i}\left\{z^{-q}\left(A e^{\frac{n}{q}z^q} + B e^{-\frac{n}{q}z^q}\right)\right\}$$

$$v = \left(z^{-2q+1}\frac{d}{dz}\right)^{-i-1}\left\{z^{-q}\left(A e^{\frac{n}{q}z^q} + B e^{-\frac{n}{q}z^q}\right)\right\}.$$

(Glaisher.)

3. Aufgabe. Man beweise, dass das vollständige Integral der Gleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + a^2 u = \frac{p(p+1)}{x^2} u$$

gegeben wird durch

$$u = C x^{-p}\left(\frac{d}{dr}\right)^p \frac{\cos(r^{1/2} x + \alpha)}{r^{1/2}},$$

worin r nach Ausführung der Differentiationen gleich a^2 zu setzen ist.

(Gaskin.)

In allen diesen Fällen, in denen die Lösung der Gleichung in dieser Weise symbolisch gegeben ist, ist es nicht schwer, die Lösung in dieser Form zu identificiren mit der in irgend einer anderen Form erhaltenen, z. B. als eine Reihe nach der ersten Methode dieses Capitels oder mittelst eines bestimmten Integrals nach der im VII. Capitel angegebenen Methode. Der Studirende, der sich vollständiger über den Gegenstand dieser symbolischen Lösungen und ihren Zusammenhang mit Lösungen in anderer Form zu unterrichten wünscht, wird eine eingehende Discussion in der schon angeführten (S. 202) Abhandlung (Section VI) von I. W. L. Glaisher finden.

Vermischte Aufgaben.

1. Man integrire durch Reihen die Gleichungen:

$$(1)\quad x^{4/3}\frac{d^2y}{dx^2}-c^2y=0$$

$$(2)\quad x^{8/5}\frac{d^2y}{dx^2}-c^2y=0,$$

und drücke die Integrale derselben in endlicher Form aus.

2. Man zeige, dass eine Wurzel der Gleichung

$$y^3+y+x=0$$

der Differentialgleichung genügt:

$$\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{27}\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{4}x\frac{dy}{dx}-\frac{1}{36}y=0.$$

(Spitzer.)

3. Man bestimme die Stammgleichung von

$$\frac{d^2y}{dx^2}+q\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x^2}$$

in der Form:

$$qxy=A(qx-2)+B(qx+2)e^{-qx}.$$

4. Man löse die Gleichungen:

$$(1)\quad x^3\frac{d^3y}{dx^3}+(x^3+3x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+(5x^2-30x)\frac{dy}{dx}+(4x+30)y=0,$$

$$(2)\quad \frac{d^3y}{dx^3}-x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=aby-(a+b)x\frac{dy}{dx},$$

$$(3)\quad (x^2+qx^3)\frac{d^2y}{dx^2}+\{(a+3)qx^2+(b-c+1)x\}\frac{dy}{dx}$$
$$+\{(a+1)qx-bc\}y=0.$$

5. Man bringe die Gleichung

$$n\frac{d^2y}{dx^2}+(m+x-na)\frac{dy}{dx}+\{p-a(m+x)\}y=0$$

dadurch, dass man

$$y = e^{\alpha x} \zeta$$

und

$$m + x + n\alpha = \xi (-n)^{1/2}$$

setzt, auf die Form:

$$\frac{d^2 \zeta}{d \xi^2} = \xi \frac{d \zeta}{d \xi} + p \zeta,$$

und integrire die letztere Gleichung durch Reihen.

6. Man integrire die Differentialgleichung

$$x(1-4x)\frac{d^2 u}{d x^2} + \{(4p-6)x - p + 1\}\frac{du}{dx} - p(p-1)u = 0$$

durch Reihen und stelle das Integral in der endlichen Form dar:

$$A\{1-(1-4x)^{1/2}\}^p + B\{1+(1-4x)^{1/2}\}^p. \qquad \text{(Glaisher.)}$$

7. Man bestimme das allgemeine Integral der Gleichung

$$\frac{d^3 y}{d x^3} + q^3 y = \frac{6}{x^2}\frac{dy}{dx}$$

in der Form:

$$y = A e^{-qx}\left(1 + \frac{2}{qx}\right) + B e^{1/2 qx}\left\{\left(1 - \frac{4}{qx}\right) \sin\left(\frac{3^{1/2}}{2} qx + \alpha\right) + 3^{1/2} \cos\left(\frac{3^{1/2}}{2} qx + \alpha\right)\right\}.$$

(Leslie Ellis.)

8. Man beweise, dass der Coefficient von α^m in der Entwickelung von

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-n}$$

nach steigenden Potenzen von α die Lösung ist von

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)^{n+1/2}\frac{dy}{dx}\right\} + m(m+2n)(1-x^2)^{n-1/2} y = 0.$$

9. Man beweise, dass nach der Bezeichnung, die wir für die Lösung der Legendre'schen Gleichung angewendet haben, $\{P_n(\cos\vartheta)\}^2$ eine Lösung der Differentialgleichung ist:

$$\left(\frac{d}{d\vartheta}\sin\vartheta\right)^2 \frac{dU}{d\vartheta} + 4n(n+1)\sin\vartheta\left(\frac{d}{d\vartheta}\sin\vartheta\right) U = 0.$$

10. Man beweise, dass nach der Bezeichnung der §§. 90, 91

$$P_{n+1} Q_n - Q_{n+1} P_n = \frac{1}{n+1}$$

ist.

11. Man beweise, dass das vollständige Integral der Gleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2 y}{d x^2} - 2(m+1)x\frac{dy}{dx} + (n+m+1)(n-m)y = 0$$

gegeben wird durch

$$y = A\frac{d^m P_n}{d x^m} + B\frac{d^m Q_n}{d x^m},$$

vorausgesetzt, dass m nicht grösser als n ist.

Was ist das vollständige Integral, wenn m grösser ist als n?

(Heine.)

12. Man zeige, dass die Lösung der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right\}+n(n+1)y=\frac{k^2}{1-x^2}y,$$

worin k eine ganze Zahl ist, ausgedrückt werden kann in der Form:

$$y=(1-x^2)^{\frac{1}{2}k}\frac{d^k y_n}{dx^k},$$

wo y_n die Lösung der Legendre'schen Gleichung ist.

13. Man suche das vollständige Integral der Gleichung:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+2(m-1)x\frac{dy}{dx}+(n-m+1)(n+m)y=0.$$

(Heine.)

14. Man beweise, dass die Gleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+n\frac{dy}{dx}+\frac{1}{4}y=0,$$

im Falle n eine ganze Zahl ist, zum vollständigen Integral den Ausdruck hat:

$$y=x^{-\frac{1}{2}(n-1)}\{A\,I_{n-1}(x^{\frac{1}{2}})+B\,Y_{n-1}(x^{\frac{1}{2}})\}.$$ (Lommel.)

15. Man bestimme das vollständige Integral der Gleichung

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+nx\frac{dy}{dx}+(b+cx^{2m})y=0$$

in der Form:

$$y=x^{-\frac{1}{2}(n-1)}\left[A\,I_\mu\left(\tfrac{1}{2}\frac{x^m}{m}\right)+B\,I_{-\mu}\left(c^{\frac{1}{2}}\frac{x^m}{m}\right)\right],$$

worin

$$\mu^2m^2=\frac{1}{4}(n-1)^2-b$$

ist. (Lommel.)

16. Man beweise, dass das vollständige Integral von

$$x^m\frac{d^{2m}y}{dx^{2m}}=y$$

lautet:

$$y=x^{\frac{1}{2}m}\sum_{p=0}^{p=m-1}\left[A_p\,I_m\{2(-\alpha_p x)^{\frac{1}{2}}\}+B_p\,Y_m\{2(-\alpha_p x)^{\frac{1}{2}}\}\right],$$

worin $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ die Wurzeln der Gleichung $\alpha^m=1$ sind, und dass das von

$$x^{m+\frac{1}{2}}\frac{d^{2m+1}y}{dx^{2m+1}}=y$$

lautet:

$$y=x^{\frac{1}{2}m+\frac{1}{4}}\sum_{p=0}^{p=2m}C_p\{I_{-m-\frac{1}{2}}(2\alpha_p x^{\frac{1}{2}})+i\,I_{m+\frac{1}{2}}(2\alpha_p x^{\frac{1}{2}})\},$$

worin $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2m}$ die Wurzeln der Gleichung $\alpha^{2m+1} = -i$ sind.
(Lommel.)

17. Das vollständige Integral der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + y\, e^{2x} = 0$$

lautet:

$$y = A\, I_0 (e^x) + B\, Y_0 (e^x),$$

und das von

$$x^4 \frac{d^2 y}{d x^2} + e^{\frac{2}{x}} y = 0$$

ist:

$$y = x \left\{ A\, I_0 \left(e^{\frac{1}{x}}\right) + B\, Y_0 \left(e^{\frac{1}{x}}\right) \right\}.$$ (Lommel.)

(Hinsichtlich des Zusammenhanges dieser beiden Gleichungen vergl. 10. Aufgabe, Seite 143.)

18. Man beweise, dass mit der Bezeichnung von §. 101

$$I_n I_{1-n} + I_{n-1} I_{-n} = \frac{2}{\pi x} \sin n \pi,$$

wenn n keine ganze Zahl, und

$$Y_n I_{n+1} - Y_{n+1} I_n = \frac{1}{x}$$

ist. (Lommel.)

19. Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{d x^2} + 2\, Q \frac{d u}{d x} + \left\{ Q^2 + \frac{d Q}{d x} + a - \frac{m (m + 1)}{x^2} \right\} u = 0$$

ist in endlicher Form integrirbar, was für eine Function von x auch Q bezeichnen möge, vorausgesetzt, dass m eine ganze Zahl ist.

20. Die Gleichung

$$\frac{d^2 u}{d x^2} + \frac{r}{x} \frac{d u}{d x} = \left(b\, x^m + \frac{c}{x^2} \right) u$$

ist in endlicher Form integrirbar, wenn

$$m + 2 = \frac{2 \left\{ (1 - r)^2 + 4\, c \right\}^{1/2}}{2\, i + 1},$$

wo i eine positive ganze Zahl oder Null ist. (Malmsten.)

21. Man beweise, dass der Coefficient von h^{p+1} in der Entwickelung von $e^{a(x^2 + x h)^{1/2}}$ der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{d^2 u}{d x^2} - a^2 u = \frac{p (p + 1)}{x^2} u.$$ (Glaisher.)

22. Man zeige, dass, wenn $y = X$ die Lösung der Gleichung

$$\frac{d^m y}{d x^m} + k^m y = 0$$

(wo k eine Constante bedeutet) ist, alsdann die Lösung von

$$\frac{d^m y}{dx^m} + k^m y = \frac{p\,m}{x}\,\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}$$

gegeben ist durch:

$$y = x^{m(p+1)-1}\left(\frac{1}{x^{m-1}}\,\frac{d}{dx}\right)^p \frac{X}{x^{m-1}},$$

und löse hiernach die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{4}{x}\,\frac{dy}{dx} + k^2 y = 0.$$

(Leslie Ellis.)

23. Die Gleichung

$$(1 - a x^2)\,\frac{d^2 y}{dx^2} - b x\,\frac{dy}{dx} - c y = 0$$

ist in den folgenden Fällen in endlicher Form integrirbar:

1) wenn $\frac{b}{a}$ eine ungerade ganze Zahl ist;

2) wenn $\left\{\left(1 - \frac{b}{a}\right)^2 - 4\,\frac{c}{a}\right\}^{1/2}$ eine ungerade ganze Zahl ist;

3) wenn $\frac{b}{a} \pm \left\{\left(1 - \frac{b}{a}\right)^2 - 4\,\frac{c}{a}\right\}^{1/2}$ eine ungerade ganze Zahl ist.

24. Man beweise, dass die Gleichung

$$(a + b x^n)\,x^2\,\frac{d^2 u}{dx^2} + (c + e x^n)\,x\,\frac{du}{dx} + (f + g x^n)\,u = X$$

eine endliche Lösung besitzt,

1) wenn irgend eine der vier Grössen $\alpha - \beta$ eine gerade ganze Zahl ist,
2) wenn irgend zwei der Grössen

$$\alpha_1 - \alpha_2,\ \beta_1 - \beta_2,\ \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2$$

ungerade ganze Zahlen sind.

Hierbei bedeuten α_1, α_2 und β_1, β_2 respective die Wurzeln der quadratischen Gleichungen:

$$\frac{1}{4}\,b\,n\,(\alpha - 2)\,(n\,\alpha - 2n - 2) + \frac{1}{2}\,e\,n\,(\alpha - 2) + g = 0$$

und

$$\frac{1}{4}\,a\,n\,\beta\,(n\,\beta - 2) + \frac{1}{2}\,c\,n\,\beta + f = 0.$$

(Pfaff.)

25. Man beweise, dass die drei Ausdrücke

$$x^{-p}\left\{1 - \frac{1}{p-\frac{1}{2}}\,\frac{a^2 x^2}{2^2} + \frac{1}{\left(p-\frac{1}{2}\right)\left(p-\frac{3}{2}\right)}\,\frac{a^4 x^4}{2!\,2^4} - \frac{1}{\left(p-\frac{1}{2}\right)\left(p-\frac{3}{2}\right)\left(p-\frac{5}{2}\right)}\,\frac{a^6 x^6}{3!\,2^6} + \cdots\right\}$$

$$e^{ax}x^{-p}\left\{1-\frac{p}{p}ax+\frac{p(p-1)}{p\left(p-\frac{1}{2}\right)}\frac{a^2x^2}{2!}-\frac{p(p-1)(p-2)}{p\left(p-\frac{1}{2}\right)(p-1)}\frac{a^3x^3}{3!}+\cdots\right\}$$

$$e^{-ax}x^{-p}\left\{1+\frac{p}{p}ax+\frac{p(p-1)}{p\left(p-\frac{1}{2}\right)}\frac{a^2x^2}{2!}+\frac{p(p-1)(p-2)}{p\left(p-\frac{1}{2}\right)(p-1)}\frac{a^3x^3}{3!}+\cdots\right\}$$

sämmtlich particuläre Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2}-a^2u=\frac{p(p+1)}{x^2}u$$

sind, und zeige, dass, wenn p nicht eine ganze Zahl ist, diese drei Ausdrücke einander gleich sind. Man suche in diesem Falle ein zweites, von jenen unabhängiges particuläres Integral.

26. Man zeige, dass die Lösung von

$$\frac{d^2y}{dx^2}-a^2y=\frac{p(p+1)}{x^2}y$$

in jeder von den Formen geschrieben werden kann:

$$y=x^{-p-1}\left(x^3\frac{d}{dx}\right)^p\{x^{-2p+1}(Ae^{ax}+Be^{-ax})\}$$

$$y=x^{-p-3}\left(x^3\frac{d}{dx}\right)^{p+1}\{x^{-2p}(Ae^{ax}+Be^{-ax})\}.$$ (Boole.)

Man zeige, dass sich das Integral derselben Gleichung auch in der Form schreiben lässt:

$$y=x^p\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right)^p(Ae^{ax}+Be^{-ax}).$$ (Donkin.)

27. Die Lösung der Gleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\{m+n+(\alpha+\beta)x\}\frac{dy}{dx}+(m\beta+n\alpha+\alpha\beta x)y=0$$

kann dargestellt werden in der Form:

$$y=Ae^{-\alpha x}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\{x^{-n}e^{x(\alpha-\beta)}\}+Be^{-\beta x}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\{x^{-m}e^{x(\beta-\alpha)}\}.$$

Man bestimme die Lösung von

$$\frac{d^2y}{dx^2}+my=x\frac{dy}{dx}$$

in der Form:

$$y=Ae^{\frac{1}{2}x^2}\frac{d^m}{dx^m}(e^{-\frac{1}{2}x^2})+Be^{\frac{1}{2}x^2}\frac{d^m}{dx^m}\{e^{-\frac{1}{2}x^2}\int e^{\frac{1}{2}x^2}dx\}.$$

(Spitzer.)

28. Die orthogonale Flächenschaar zu einem System von Umdrehungsflächen, das durch die Gleichung $P_n=cr^{n+1}$ gegeben ist, wobei P_n die Lösung der Legendre'schen Gleichung und ihr Argument x der Cosinus des Winkels ist, welchen der Radiusvector nach irgend einem Punkte mit der Aequatorialebene bildet, wird gegeben durch die Gleichung:

$$P_{n+1}-P_{n-1}=ar^n.$$

Sechstes Capitel.

Hypergeometrische Reihen.

§. 113.

Die Reihe

$$1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots$$

wird die hypergeometrische Reihe genannt und gewöhnlich mit

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

bezeichnet; die vier Grössen α, β, γ, x heissen ihre Argumente und von diesen ist x allein veränderlich. Die Elemente α und β können, ohne den Werth von F zu beeinflussen, mit einander vertauscht werden; ist eins von ihnen eine negative ganze Zahl, so wird die Reihe aus einer endlichen Anzahl von Gliedern bestehen, anderenfalls wird sie ins Unendliche gehen. Es wird angenommen, dass γ keine ganze negative Zahl ist, so dass unendliche Glieder ausgeschlossen werden können.

Ist x kleiner als 1, so ist die Reihe convergent; ist aber x grösser als 1, so ist die Reihe divergent. Für $x=1$ ist die Reihe convergent, falls $\gamma-\alpha-\beta$ positiv, und divergent, falls $\gamma-\alpha-\beta$ Null oder negativ ist.

Die Reihe ist **von sehr grosser Allgemeinheit** und begreift als besondere Fälle sehr viele der Reihen unter sich, welche in der Analysis auftreten. Die folgenden Beispiele lassen sich leicht bestätigen:

I. $$(1+x)^n = F(-n, \beta, \beta, -x).$$

II. $$(1+x)^n+(1-x)^n = 2F\left(-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right).$$

III. $$log(1+x) = xF(1, 1, 2, -x).$$

IV. $$\log \frac{1+x}{1-x} = 2\,x\,F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, x^2\right).$$

V. $$e^x = F\left(1, \beta, 1, \frac{x}{\beta}\right) \text{ für } \beta = \infty.$$

VI. $$\cosh x = F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{4\,\alpha\beta}\right) \text{ für } \alpha = \beta = \infty.$$

VII. $$\cos n x = F\left(\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}, \sin^2 x\right).$$

1. Aufgabe. Man beweise, dass alle Differentialquotienten der Reihe für den Werth $x = 1$ divergent sind, wenn die Reihe selbst für diesen Werth divergent ist, und dass alle Differentialquotienten von einer bestimmten Ordnung an für den Werth $x = 1$ divergent sein werden, obwohl die Reihe für diesen Werth convergirt.

2. Aufgabe. Man stelle als hypergeometrische Reihen dar:

(1) $\sin t$, wenn das veränderliche Element in der Reihe t^2 ist;
(2) $\sin nt$, wenn das veränderliche Element in der Reihe $\sin^2 t$ ist;
(3) $\cos nt$, wenn das veränderliche Element in der Reihe $-\tan g^2 t$ ist.

Andere sind bei Gauss gegeben am Anfang seiner ersten Abhandlung, auf welche in §. 134 hingewiesen wird.

§. 114.

Der Coefficient von x^r möge mit A_r bezeichnet werden; alsdann ist die Beziehung, welche die auf einander folgenden A mit einander verknüpft:

$$(1 + r)(\gamma + r) A_{r+1} = (\alpha + r)(\beta + r) A_r.$$

Wir betrachten nun die Differentialgleichung:

$$(1) \quad \left\{(\vartheta + \alpha)(\vartheta + \beta) - \frac{1}{x}\,\vartheta\,(\vartheta + \gamma - 1)\right\} y = 0,$$

in welcher ϑ für das Operationssymbol $x\,\frac{d}{dx}$ steht. Eine Lösung dieser Gleichung kann man durch eine Reihe erhalten. Diese Reihe möge dargestellt sein durch:

$$y = B_0\,x^\mu + B_1\,x^{\mu+1} + B_2\,x^{\mu+2} + \cdots$$

Setzt man diesen Werth in die Differentialgleichung ein, welche alsdann identisch befriedigt werden muss, so muss die Grösse, mit welcher jede einzelne Potenz von x multiplicirt ist, verschwinden. Daher haben wir für die niedrigste Potenz:

$$-\mu\,(\mu + \gamma - 1)\,B_0 = 0,$$

und aus dem Verschwinden der Coefficienten der höheren Potenzen ergiebt sich die Relation zwischen den auf einander folgenden Grössen B:

$$(\mu + r + 1)(\mu + r + \gamma) B_{r+1} - (\mu + r + \alpha)(\mu + r + \beta) B_r = 0.$$

Wir können annehmen, dass B_0 nicht gleich Null ist, da die Relation $B_0 = 0$ alle B zu Null machen würde; somit wird die erste Gleichung befriedigt entweder durch

$$\mu = 0$$

oder durch

$$\mu = 1 - \gamma.$$

§. 115.

Nehmen wir zuerst den Werth $\mu = 0$, so wird die Beziehung, welche zwei auf einander folgende B mit einander verbindet:

$$(1 + r)(\gamma + r) B_{r+1} = (\alpha + r)(\beta + r) B_r.$$

Wenn nun $B_0 = 1 = A_0$ ist, so zeigt die eben bewiesene Relation, verglichen mit der, welche die A verbindet, dass $B_r = A_r$ ist, und daher wird die angenommene Reihe die hypergeometrische Reihe. Demnach ist eine Lösung der Differentialgleichung (1):

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Die operirenden Factoren in (1) mögen entwickelt und die Glieder von derselben Ordnung gesammelt werden; dann kann die Gleichung geschrieben werden:

$$[(1 - x)\vartheta^2 + \{\gamma - 1 - x(\alpha + \beta)\}\vartheta - \alpha\beta x] y = 0.$$

Nun ist aber:

$$\vartheta = x \frac{d}{dx}$$

$$\vartheta^2 = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx};$$

setzt man daher diese Werthe in die obige Gleichung ein, ordnet dann wieder und dividirt durch $x^2(1 - x)$, so geht die Gleichung über in:

$$\text{(I)} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1 - x)} \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha\beta}{x(1 - x)} y = 0,$$

welches die Differentialgleichung ist, der $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ genügt.

Nehmen wir jetzt den Werth $\mu = 1 - \gamma$, so wird die Beziehung, welche die Grössen B verknüpft:

$$(1 + r)\ (2 - \gamma + r) B_{r+1} = (\alpha + 1 - \gamma + r)\ (\beta + 1 - \gamma + r) B_r.$$

Ist $B_0 = 1$, so zeigt diese Gleichung, dass die Grössen B die auf einander folgenden Coefficienten in einer hypergeometrischen Reihe sind, deren constante Elemente bezüglich sind: $\alpha + 1 - \gamma$, $\beta + 1 - \gamma$, $2 - \gamma$. Die für y angenommene Reihe beginnt mit $x^{1-\gamma}$; daher ist der Werth von y:

$$x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma,\ \beta + 1 - \gamma,\ 2 - \gamma, x),$$

und dies ist ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung (I).

Wir haben somit zwei particuläre Lösungen dieser Differentialgleichung, und demnach kann jedes andere particuläre Integral, welches für Werthe von x, die kleiner als 1 sind, endlich ist, dargestellt werden in der Form:

$$A\,F(\alpha, \beta, \gamma, x) + B x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma,\ 2 - \gamma, x),$$

wo A und B Constanten sind, deren Werthe durch Vergleichung der Potenzen von x bestimmt werden können. Bezeichnen in diesem Ausdruck A und B willkürliche Constante, so liefert er die vollständige Lösung von (I).

§. 116.

Um (I) auf ihre Normalform zu reduciren, müssen wir sie mit der allgemeinen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung vergleichen. Wir haben dann:

$$P = \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)\,x}{x\,(1 - x)} = \frac{\gamma}{x} + \frac{\gamma - \alpha - \beta - 1}{1 - x}$$

$$Q = \frac{-\alpha\beta}{x\,(1 - x)},$$

und daher wird die Invariante I, welche

$$\frac{1}{4}\left(4\,Q - 2\,\frac{dP}{dx} - P^2\right)$$

ist, nach einigen Reductionen:

$$\frac{1}{4}\,\frac{1 - \lambda^2}{x^2} + \frac{1}{4}\,\frac{1 - \nu^2}{(x - 1)^2} + \frac{1}{4}\,\frac{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 - 1}{x\,(x - 1)},$$

worin

$$\lambda^2 = (1 - \gamma)^2,\quad \mu^2 = (\alpha - \beta)^2,\quad \nu^2 = (\gamma - \alpha - \beta)^2$$

gesetzt ist.

Diese Invariante möge mit I oder $\psi(x)$ bezeichnet werden, wo die letztere Form bequemer sein wird, falls man die unabhängige Veränderliche verändert.

Demnach geht die Gleichung (I) durch die Substitution

$$v = y\, e^{\frac{1}{2}\int P\,dx}$$
$$= y\, x^{\frac{1}{2}\gamma}(1-x)^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1-\gamma)}$$

über in

$$\text{(II)} \qquad \frac{d^2 v}{d x^2} + v\,\psi(x) = 0,$$

worin $\psi(x)$ die oben angegebene Function von x bedeutet.

Reihe von 24 particulären Integralen.

§. 117.

Wir gehen nun dazu über, einige weitere particuläre Integrale dieser Differentialgleichung zu suchen. Aus der Untersuchung des §. 64 folgt, dass die Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, damit die Gleichungen

$$\frac{d^2 v}{d x^2} + v\,\psi(x) = 0$$

und:

$$\text{(III)} \qquad \frac{d^2 z}{d t^2} + z\,\psi_1(t) = 0$$

in einander transformirbar seien, erstens

$$v = z\left(\frac{d t}{d x}\right)^{-\frac{1}{2}} = z u$$

und zweitens:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{1}{2}\{t, x\} + \left(\frac{d t}{d x}\right)^2 \psi_1(t) - \psi(x) = 0$$

sind.

Betrachten wir daher $\psi_1(t)$ als eine gegebene Function von t, so wird die letzte Gleichung den Werth von t, ausgedrückt durch x, ergeben, und wenn dieser Werth gefunden ist, so wird die erste die Beziehung zwischen v und z liefern.

Wir nehmen nun an, dass die Function $\psi_1(t)$ so beschaffen ist, dass für sie Gleichung (III) die Normalform derjenigen Gleichung wird, welcher die hypergeometrische Reihe mit den constanten Elementen α', β', γ' genügt, und setzen voraus, dass wir aus (IV) einen Werth von t als Function von x bestimmen können.

Alsdann erhalten wir, da der Werth von u ohne Weiteres aus dem Werthe von t abgeleitet werden kann, eine Lösung von (II) in der Form:

$$u\, t^{\frac{1}{2}\gamma'} (1-t)^{\frac{1}{2}(\alpha'+\beta'+1-\gamma')} F(\alpha', \beta', \gamma', t),$$

welche verschieden ist von dem Werthe von v, den wir bereits gehabt haben.

§. 118.

Die allgemeine Lösung von (IV) wird t als eine Function von $x, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ ergeben. Wir wollen diejenigen Formen dieser Function wählen, welche t abhängig machen von x allein, aber unabhängig von den beiden Reihen von constanten Elementen. Wir können, um diese zu erhalten, setzen:

$$\{t, x\} = 0$$

$$\psi_1(t) \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = \psi(x).$$

Die erste dieser Gleichungen ist nach Multiplication mit $t'^{-\frac{1}{2}}$ direct integrirbar in der Form:

$$t''. t'^{-\frac{3}{2}} = C,$$

und führen wir die Integration weiter aus, so erhalten wir:

$$t = A - \frac{4}{C(Cx + C')}$$

$$= \frac{ax + b}{cx + d},$$

wenn wir die Constanten ändern. Dies ist der allgemeine Werth von t, für welchen die Function $\{t, x\}$ verschwindet. Die Bedingungen erfordern aber, dass

$$\psi_1(t) \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = \psi(x)$$

oder

$$\frac{(ad - bc)^2}{(cx + d)^4}\, \psi_1\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right) = \psi(x)$$

sei, und dies wird nicht für willkürliche Werthe dieser Constanten stattfinden; dieselben müssen daher bestimmt werden. Nun ist:

$$\psi(x) = \frac{1}{4}\, \frac{Ax^2 + Bx + C}{x^2(1-x)^2},$$

worin:

$$A = 1 - \mu^2$$
$$B = \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 - 1$$
$$C = 1 - \lambda^2,$$

und es kann gesetzt werden:

$$\psi_1(t) = \frac{1}{4}\,\frac{A' t^2 + B' t + C'}{t^2 (1-t)^2}.$$

Daher müssen die Constanten a, b, c, d so bestimmt werden, dass sie der Gleichung genügen:

$$\frac{A x^2 + B x + C}{x^2 (1-x)^2}$$
$$= (ad - bc)^2 \frac{A'(ax+b)^2 + B'(ax+b)(cx+d) + C'(cx+d)^2}{(ax+b)^2 (cx+d)^2 \{(c-a)x + d - b\}^2}.$$

Die Grössen α, β, γ (und daher auch A, B, C, welches Functionen von ihnen sind) sind willkürlich, und es können demnach der Zähler und Nenner des Bruches auf der linken Seite keinen gemeinschaftlichen Factor ausser einer Constanten haben, und Analoges gilt für die rechte Seite. Daher können wir setzen:

$$m(Ax^2 + Bx + C) = (ad - bc)^2 [A'(ax+b)^2 + B'(ax+b)(cx+d) + C'(cx+d)^2]$$
$$m x^2 (1-x)^2 = (ax+b)^2 (cx+d)^2 \{(c-a)x + d - b\}^2,$$

worin m constant ist. Die letzte von diesen Gleichungen wird die zulässigen Werthe von a, b, c, d bestimmen; die erste wird sodann die Beziehungen von α', β', γ' zu α, β, γ angeben, welche bestehen müssen, damit der Ausdruck am Ende von §. 117 eine Lösung von (I) sein kann.

§. 119.

Vergleichen wir nun die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x auf den beiden Seiten der letzten Gleichung, so finden wir, dass die Gleichung für folgende Werthsysteme der Constanten identisch erfüllt wird:

(1) $c = 0 = b = a - d;\quad m = a^6.$

(2) $c = 0 = d - b = a + b;\quad m = a^6.$

(3) $a = 0 = d = c - b;\quad m = b^6.$

(4) $a = 0 = d - b = c + d;\quad m = b^6.$

$$(5) \quad b = 0 = c - a = c + d; \quad m = a^6.$$
$$(6) \quad d = 0 = c - a = a + b; \quad m = b^6.$$

Werden diese Werthe in den Ausdruck für t eingesetzt, so ergiebt sich respective:

$$(1) \quad t = x, \qquad (2) \quad t = 1 - x, \qquad (3) \quad t = \frac{1}{x},$$

$$(4) \quad t = \frac{1}{1-x}, \qquad (5) \quad t = \frac{x}{x-1}, \qquad (6) \quad t = \frac{x-1}{x},$$

und diese bilden das vollständige System der gesuchten Werthe von t.

§. 120.

Mittelst eines jeden dieser Werthsysteme transformiren wir nun die erste der beiden Gleichungen und erhalten so die nothwendigen Beziehungen zwischen α', β', γ' und α, β, γ. Betrachten wir zuerst das System der Werthe (1), so haben wir:

$$Ax^2 + Bx + C = A'x^2 + B'x + C',$$

also:

$$A = A', \quad B = B', \quad C = C',$$

oder, als eine äquivalente Reihe von Gleichungen:

$$\lambda^2 = \lambda'^2, \quad \mu^2 = \mu'^2, \quad \nu^2 = \nu'^2.$$

Drücken wir diese Relationen durch die constanten Elemente aus, so werden sie:

$$(1 - \gamma')^2 = (1 - \gamma)^2$$
$$(\alpha' - \beta')^2 = (\alpha - \beta)^2$$
$$(\gamma' - \alpha' - \beta')^2 = (\gamma - \alpha - \beta)^2,$$

und (wenn wir uns erinnern, dass eine Vertauschung des ersten und zweiten constanten Elements in der hypergeometrischen Reihe keine Aenderung hervorbringt) so finden wir, dass dieselben befriedigt werden durch:

$$(1) \quad \alpha' = \alpha, \qquad \beta' = \beta, \qquad \gamma' = \gamma.$$
$$(2) \quad \alpha' = \gamma - \alpha, \qquad \beta' = \gamma - \beta, \qquad \gamma' = \gamma.$$
$$(3) \quad \alpha' = \alpha - \gamma + 1, \qquad \beta' = \beta - \gamma + 1, \qquad \gamma' = 2 - \gamma.$$
$$(4) \quad \alpha' = 1 - \alpha, \qquad \beta' = 1 - \beta, \qquad \gamma' = 2 - \gamma.$$

Da $t = x$ ist, so ist $\frac{dt}{dx} = 1$ und somit ist auch u für diesen

Werth von t gleich 1; und die particulären Integrale der Gleichung in v, welche diesen vier Werthsystemen entsprechen, sind respective:

$$x^{\frac{1}{2}\gamma}(1-x)^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1-\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma,x).$$
$$x^{\frac{1}{2}\gamma}(1-x)^{\frac{1}{2}(\gamma-\alpha-\beta+1)}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,x).$$
$$x^{1-\frac{1}{2}\gamma}(1-x)^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1-\gamma)}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x).$$
$$x^{1-\frac{1}{2}\gamma}(1-x)^{\frac{1}{2}(\gamma-\alpha-\beta+1)}F(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma,x).$$

Dies sind nun Integrale der Gleichung (II); um die entsprechenden Integrale der Gleichung (I) zu erhalten, müssen wir jedes derselben mit

$$x^{-\frac{1}{2}\gamma}(1-x)^{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1-\gamma)}$$

multipliciren. Demnach sind vier particuläre Integrale der Gleichung (I):

I. $y = F(\alpha, \beta, \gamma, x).$

II. $y = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x).$

III. $y = x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x).$

IV. $y = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, x).$

Behandeln wir nun die Relation $t = 1 - x$ in derselben Weise, so finden wir vier andere particuläre Integrale von der Form:

V. $y = F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x).$

VI. $y = x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x).$

VII. $y = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-x).$

VIII. $y = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-x).$

Und aus der Relation $t = \frac{1}{x}$ erhalten wir als ein particuläres Integral:

IX. $y = x^{-\alpha}F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \frac{1}{x}\right).$

§. 121.

Auf die angegebene Weise können sämmtliche particulären Integrale für die verschiedenen Werthe von t gefunden werden. Jeder Werth von t führt zu vier particulären Integralen, so dass es deren im Ganzen 24 giebt.

Dieses mühevolle Verfahren, die übrigen zu erhalten, braucht

man indessen nicht mehr anzuwenden; man kann, um die Reihe zu vervollständigen, aus den vorhergehenden neun die folgenden fünfzehn ableiten:

$$\text{X.}\quad y = x^{-\beta} F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, \frac{1}{x}\right).$$

$$\text{XI.}\quad y = x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(1-\alpha, \gamma-\alpha, \beta-\alpha+1, \frac{1}{x}\right).$$

$$\text{XII.}\quad y = x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(1-\beta, \gamma-\beta, \alpha-\beta+1, \frac{1}{x}\right).$$

$$\text{XIII.}\quad y = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \alpha-\beta+1, \frac{1}{1-x}\right).$$

$$\text{XIV.}\quad y = (1-x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \beta-\alpha+1, \frac{1}{1-x}\right).$$

$$\text{XV.}\quad y = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1} F\left(\alpha-\gamma+1, 1-\beta, \alpha-\beta+1, \frac{1}{1-x}\right).$$

$$\text{XVI.}\quad y = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1} F\left(\beta-\gamma+1, 1-\alpha, \beta-\alpha+1, \frac{1}{1-x}\right).$$

$$\text{XVII.}\quad y = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right).$$

$$\text{XVIII.}\quad y = (1-x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \gamma, \frac{x}{x-1}\right).$$

$$\text{XIX.}\quad y = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1} F\left(\alpha-\gamma+1, 1-\beta, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}\right).$$

$$\text{XX.}\quad y = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1} F\left(\beta-\gamma+1, 1-\alpha, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}\right).$$

$$\text{XXI.}\quad y = x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1, \frac{x-1}{x}\right).$$

$$\text{XXII.}\quad y = x^{-\beta} F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1, \frac{x-1}{x}\right).$$

$$\text{XXIII.}\quad y = x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(1-\alpha, \gamma-\alpha, \gamma-\alpha-\beta+1, \frac{x-1}{x}\right).$$

$$\text{XXIV.}\quad y = x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(1-\beta, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, \frac{x-1}{x}\right).$$

Beziehungen zwischen den particulären Integralen.

§. 122.

Alle diese Integrale mögen mit

$$y_1, y_2, \ldots, y_{23}, y_{24}$$

bezeichnet werden, wobei die Indices und die Nummern der vorstehend angegebenen Gleichungen einander entsprechen. Diese Grössen y sind nicht unabhängig von einander; denn nach der gewöhnlichen Eigenschaft einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung (von welcher sie sämmtlich Lösungen sind) besteht zwischen irgend dreien von ihnen y_λ, y_μ, y_ν eine Relation von der Form:

$$y_\lambda = A y_\mu + B y_\nu,$$

und wir müssen nun für die verschiedenen Combinationen der Integrale alle diese Relationen suchen. Es wird aber gewisse Fälle geben, in welchen entweder A oder B Null ist und daher die entsprechenden Integrale nur durch einen constanten Factor von einander verschieden sind. Diese erkennt man durch Anwendung des folgenden **Hülfssatzes:**

Wenn zwei Lösungen der Differentialgleichung (I) nach denselben aufsteigenden Potenzen von x entwickelt sind und beide Reihen convergiren, so unterscheiden sie sich nur durch einen constanten Factor von einander.

Der Einfachheit wegen nehmen wir an, dass eine der Lösungen $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ sei und dass die andere, nach steigenden Potenzen von x entwickelt, dargestellt sei durch

$$y = A + Bx + Cx^2 + \cdots$$

Substituirt man diesen Werth von y in die Differentialgleichung, so würde man durch ein ähnliches Verfahren wie in §. 114 finden: $y = A F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, wodurch der Hülfssatz bewiesen ist.

§. 123.

Wir wollen diesen Hülfssatz anwenden, um die particulären Integrale zu erhalten, die gleich y_1 sind; von diesem werden wir annehmen, dass es eine convergente Reihe, also $x < 1$ sei. Dann ist y_2 ebenfalls eine convergente Reihe, welche nach denselben stei-

genden Potenzen von x fortschreitet wie y_1; das erste Glied in jeder ist die Einheit, der constante Factor des Hülfssatzes ist daher 1 und wir haben:

$$y_1 = y_2.$$

Die nächste in der Zusammenstellung, welche, nach steigenden Potenzen von x entwickelt, mit x^0 beginnt, ist y_5. Nehmen wir aus

$$F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - x)$$

den Coefficienten von x^n, so werden wir denselben finden:

$$(-1)^n \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots n.(\alpha+\beta-\gamma+1)(\alpha+\beta-\gamma+2)\ldots(\alpha+\beta-\gamma+n)} \times$$
$$F(\alpha+n, \beta+n, \alpha+\beta-\gamma+n+1, 1).$$

In diesem Coefficienten ist aber F nur convergent (und hat daher einen endlichen Werth), wenn

$$\alpha + \beta - \gamma + n + 1 - (\alpha + n) - (\beta + n)$$

positiv ist (siehe §. 113), d. h. wenn $1 - \gamma - n$ positiv ist. Daher werden von einem bestimmten Gliede ab die Coefficienten der Potenzen von x divergirende Reihen sein, und wir können alsdann die Reihe $F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - x)$ nicht als convergent betrachten, obwohl sie nach steigenden Potenzen von x entwickelbar ist. Daher ist y_5 nicht gleich y_1.

Verfährt man mit y_7, y_{13}, y_{14}, y_{17}, y_{18} in derselben Weise, so wird man finden, dass die letzten beiden allein Reihen sind, die zu gleicher Zeit mit $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ convergiren. Demnach erhält man:

$$(1) \quad y_1 = y_2 = y_{17} = y_{18}.$$

Ferner werden y_3 und y_1, y_4 und y_2, y_{19} und y_{17}, y_{20} und y_{18} aus einander durch genau analoge Transformationen der Elemente abgeleitet; z. B. wird, um von y_1 zu y_3 überzugehen, die erste multiplicirt mit $x^{1-\gamma}$, während das erste und zweite Element erhalten wird, indem man das frühere dritte von dem früheren ersten und zweiten subtrahirt und zu jedem Resultat 1 addirt, und das neue dritte Element, indem man das frühere dritte Element von 2 subtrahirt. Dieses Verfahren ist, wie man sieht, bei allen dasselbe und daher:

$$(2) \quad y_3 = y_4 = y_{19} = y_{20}.$$

Aufgabe. Man zeige, dass

$$(3) \quad y_5 = y_6 = y_{21} = y_{22}.$$
$$(4) \quad y_7 = y_8 = y_{23} = y_{24}.$$
$$(5) \quad y_9 = y_{12} = y_{13} = y_{15}.$$
$$(6) \quad y_{10} = y_{11} = y_{14} = y_{16}.$$

§. 124.

Es ist somit ersichtlich, dass sich die 24 Integrale in sechs Classen eintheilen lassen; die gleichen Glieder dieser Classen können wir respective durch

$$Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ Y_4,\ Y_5,\ Y_6$$

bezeichnen, der Reihe nach den obigen Grössensystemen entsprechend. Wir haben noch diejenigen Relationen zu suchen, welche zwischen ihnen vermöge des Umstandes, dass sie Lösungen der Differentialgleichung sind, bestehen.

Nun sind Y_3 und Y_4 convergent für diejenigen Werthe von x, welche kleiner als 1 sind, während Y_5 und Y_6 für diejenigen Werthe von x convergiren, die grösser als 1 sind. Da nun deshalb die ersten convergent sind, wenn die letzten divergiren, und umgekehrt, so kann es offenbar keine Gleichungen geben, welche Y_3 und Y_4 mit Y_5 und Y_6 verbinden. Wir müssen daher die Gleichungen zwischen je drei Grössen des Systems Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 und je dreien des Systems Y_1, Y_2, Y_5, Y_6 suchen und brauchen dabei nur diejenigen Gleichungen zu bestimmen, in denen Y_1 vorkommt, da durch Veränderung der Elemente und durch Division mit einem Factor irgend eine der Grössen Y in Y_1 transformirt werden kann. Die gesuchten Gleichungen werden daher diejenigen sein, welche die Grössen der folgenden sechs Gruppen unter sich verbinden:

$$Y_1,\ Y_2,\ Y_3;\quad Y_1,\ Y_2,\ Y_4;\quad Y_1,\ Y_3,\ Y_4;$$
$$Y_1,\ Y_2,\ Y_5;\quad Y_1,\ Y_2,\ Y_6;\quad Y_1,\ Y_5,\ Y_6.$$

Die Gleichung für die erste von diesen Gruppen möge sein:

$$Y_1 = MY_2 + NY_3,$$

oder:

$$y_1 = My_3 + Ny_5.$$

Um M und N zu bestimmen, wird die Substitution von irgend zwei besonderen Werthen von x ausreichen; dieselben mögen $x = 1$ und $x = 0$ sein, und man nehme an, dass $1 - \gamma$ eine positive Grösse sei, so dass $x^{1-\gamma} = 0$ ist für $x = 0$. In diesen beiden Fällen erhält man:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = MF(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, 1) + N$$
$$1 = NF(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1).$$

Um M und N zu berechnen, müssen wir die **Relationen zwischen den Reihen für das Argument 1** bestimmen, zu denen wir jetzt übergehen.

Einführung der Gauss'schen Π-Function.

§. 125.

Der Coefficient von x^m in

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) - F(\alpha, \beta, \gamma - 1, x)$$

ist:

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}{1.2\ldots m.\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-1)}\left\{1-\frac{\gamma+m-1}{\gamma-1}\right\}$$

$$= -\frac{\alpha\beta}{\gamma(\gamma-1)}\cdot\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m-1)(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}{1.2.3\ldots(m-1).(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-1)}$$

$$= \text{Coefficient von } x^m \text{ in } -\frac{\alpha\beta x}{\gamma(\gamma-1)} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x),$$

und das Glied der linken Seite, welches unabhängig ist von x, verschwindet, so dass ist:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) - F(\alpha,\beta,\gamma-1,x) = -\frac{\alpha\beta x}{\gamma(\gamma-1)} F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x),$$

$$= -\frac{x}{\gamma-1}\frac{d}{dx} F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Aus der Differentialgleichung, welcher $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ genügt, erhalten wir aber:

$$\frac{dF}{dx}\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\} = \alpha\beta F - x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2}.$$

Bezeichnet man den Werth von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ für $x = 1$ mit $F_1(\alpha,\beta,\gamma)$, so ist somit, da der Werth von $\frac{d^2F}{dx^2}$ für $x = 1$ endlich ist:

$$F_1(\alpha,\beta,\gamma) - F_1(\alpha,\beta,\gamma-1) = -\frac{1}{\gamma-1}\left[\frac{dF}{dx}\right]_{x=1}$$

$$= -\frac{\alpha\beta}{(\gamma-1)(\gamma-\alpha-\beta-1)} F_1(\alpha, \beta, \gamma),$$

oder:

$$F_1(\alpha,\beta,\gamma-1) = \frac{(\gamma-1)(\gamma-\alpha-\beta-1)+\alpha\beta}{(\gamma-1)(\gamma-\alpha-\beta-1)} F_1(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$= \frac{(\gamma-1-\alpha)(\gamma-1-\beta)}{(\gamma-1)(\gamma-\alpha-\beta-1)} F_1(\alpha,\beta,\gamma),$$

oder, wenn wir γ mit $\gamma+1$ vertauschen:

$$F_1(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}F_1(\alpha,\beta,\gamma+1).$$

Ebenso:

$$F_1(\alpha,\beta,\gamma+1)=\frac{(\gamma+1-\alpha)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+1)(\gamma+1-\alpha-\beta)}F_1(\alpha,\beta,\gamma+2),$$

und daher:

$$F_1(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma+1-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma+1-\beta)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma-\alpha-\beta)(\gamma+1-\alpha-\beta)}F_1(\alpha,\beta,\gamma+2)$$

$$=\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma+1-\alpha)\dots(\gamma+k-1-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma+1-\beta)\dots(\gamma+k-1-\beta)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+k-1)(\gamma-\alpha-\beta)(\gamma+1-\alpha-\beta)\dots(\gamma+k-1-\alpha-\beta)}\times F_1(\alpha,\beta,\gamma+k).$$

§. 126.

Bezeichnet man

$$\frac{1.2.3\dots.k}{(z+1)(z+2)\dots.(z+k)}k^z \quad \text{mit } \Pi(k,z),$$

so ist:

$$F_1(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\Pi(k,\gamma-1)\,\Pi(k,\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(k,\gamma-\alpha-1)\,\Pi(k,\gamma-\beta-1)}F_1(\alpha,\beta,\gamma+k).$$

Wegen

$$1.2.3\dots k(k+1)\dots(k+z)=1.2.3\dots z(z+1)(z+2)\dots(z+k)$$

haben wir:

$$1.2.3\dots k.k^z\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{2}{k}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{k}\right)$$
$$=1.2.3\dots z(z+1)(z+2)\dots(z+k),$$

und daher:

$$\Pi(k,z)=\frac{1.2.3\dots.k}{(z+1)(z+2)\dots(z+k)}k^z$$
$$=\frac{1.2.3\dots z}{\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{2}{k}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{k}\right)},$$

vorausgesetzt, dass z eine ganze Zahl ist. Aus dieser Transformation und aus der ursprünglichen Definition erhalten wir:

$$\Pi(k,z+1)=\Pi(k,z)\frac{1+z}{1+\frac{1+z}{k}}.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass für einen gegebenen Werth von z die Function $\Pi(k,z)$, wenn k grösser und grösser wird, einem

Grenzwerth sich nähert, und dass dieser Grenzwerth endlich ist. Da alsdann $\Pi(\infty, z)$ eine Function von z allein ist, so möge dieselbe mit $\Pi(z)$ bezeichnet werden.

Die letzte Gleichung zeigt, dass

$$\Pi(z+1) = (z+1)\,\Pi(z),$$

die erste, dass, wenn z eine ganze Zahl ist,

$$\Pi(z) = z!$$

ist, während in jedem Falle die Gleichung besteht:

$$\Pi(z) = \Gamma(z+1),$$

wo $\Gamma(z+1)$ die Gammafunction Euler's ist.

Lässt man in der Gleichung, welche F_1 giebt, k unendlich gross werden, so ist jedes Glied der Reihe $F_1(\alpha, \beta, \gamma+\infty)$ gleich Null mit Ausnahme des ersten, welches gleich 1 ist. Substituirt man für $\Pi(\infty, \gamma-1)$ und die anderen Functionen die Werthe $\Pi(\gamma-1)$, so erhält man:

$$F_1(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}.$$

1. Aufgabe. Aus der Entwickelung von t in eine nach steigenden Potenzen von $\sin t$ fortschreitende Reihe zeige man, dass

$$\Pi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\pi^{1/2}$$

ist.

2. Aufgabe. Man beweise die Gleichung:

$$\Pi(-z)\,\Pi(z-1) = \pi \operatorname{cosec} z\pi.$$

3. Aufgabe. Man beweise die Relationen:

$$(1) \quad F_1(\alpha, \beta, \gamma)\,F_1(-\alpha, \beta, \gamma-\alpha) = 1.$$
$$(2) \quad F_1(\alpha, \beta, \gamma)\,F_1(\alpha, -\beta, \gamma-\beta) = 1.$$

4. Aufgabe. Man beweise die Gleichung:

$$n^{nz+1/2}\,\Pi(z)\,\Pi\left(z-\frac{1}{n}\right)\Pi\left(z-\frac{2}{n}\right)\cdots\Pi\left(z-\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{1/2(n-1)}\,\Pi(nz).$$

(Gauss.)

Bestimmung der Constanten in den Relationen des §. 124.

§. 127.

Die Gleichungen des §. 124 werden nunmehr:

$$N = \frac{1}{F_1(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1)}$$
$$= \frac{\Pi(\beta-\gamma)\,\Pi(\alpha-\gamma)}{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\,\Pi(-\gamma)},$$

und daher:

$$M\,\frac{\Pi(1-\gamma)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(-\alpha)\,\Pi(-\beta)} + \frac{\Pi(\beta-\gamma)\,\Pi(\alpha-\ )}{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\,\Pi(-\gamma)}$$
$$= \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)},$$

und hieraus ist es mit Benutzung der zweiten Aufgabe im vorhergehenden Paragraphen nicht schwer, die Gleichung abzuleiten:

$$M = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\alpha-\gamma)\,\Pi(\beta-\gamma)}{\Pi(1-\gamma)\,\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}.$$

Es sind dies die Werthe der Constanten in der Gleichung:

$$(1)\qquad Y_1 = M Y_2 + N Y_3.$$

Ebenso würden wir, wenn wir

$$(2)\qquad Y_1 = M_1 Y_2 + N_1 Y_4$$

setzten, finden, dass die Werthe von M_1 und N_1 sind:

$$M_1 = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(-\alpha)\,\Pi(-\beta)}{\Pi(1-\gamma)\,\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}$$
$$N_1 = \frac{\Pi(-\alpha)\,\Pi(-\beta)}{\Pi(\gamma-\alpha-\beta)\,\Pi(-\gamma)}.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass die folgenden Gleichungen den anderen vier Gruppen der Reihe nach entsprechen:

$$(3)\qquad Y_1 = M_2 Y_3 + N_2 Y_4$$
$$M_2 = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}$$
$$N_2 = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\alpha+\beta-\gamma+1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}.$$

$$(4)\quad Y_1 = M_3\,Y_2 + N_3\,Y_5$$

$$M_3 = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\alpha-\gamma)\,\Pi(-\beta)}{\Pi(1-\gamma)\,\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}$$

$$N_3 = \frac{\Pi(-\beta)\,\Pi(\alpha-\gamma)}{\Pi(\alpha-\beta)\,\Pi(-\gamma)}.$$

$$(5)\quad Y_1 = M_4\,Y_2 + N_4\,Y_6$$

$$M_4 = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\beta-\gamma)\,\Pi(-\alpha)}{\Pi(1-\gamma)\,\Pi(\beta-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-1)}$$

$$N_4 = \frac{\Pi(-\alpha)\,\Pi(\beta-\gamma)}{\Pi(\beta-\alpha)\,\Pi(-\gamma)}.$$

$$(6)\quad Y_1 = M_5\,Y_5 + N_5\,Y_6$$

$$M_5 = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\beta-\alpha-1)}{\Pi(\beta-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-1)}$$

$$N_5 = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\alpha-\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}.$$

Es muss bemerkt werden, dass die Arbeit, die man hat, um diese Constanten abzuleiten, nicht für jede Gleichung wiederholt zu werden braucht; es lässt sich jede Gleichung mit ihren Constanten aus der ersten Gleichung und ihren Constanten herleiten.

§. 128.

Wir gehen nun zu einer anderen Reihe von Gleichungen über, welche irgend zwei von den particulären Integralen und ihre Differentialquotienten mit einander verbinden.

Es ist bewiesen worden, dass, wenn Y_1 und Y_2 zwei particuläre Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$$

sind, die Relation besteht:

$$Y_1\frac{dY_2}{dx} - Y_2\frac{dY_1}{dx} = Ce^{-\int P\,dx},$$

worin C einen constanten Werth besitzt, der von den beiden gewählten particulären Integralen abhängt. Bei derjenigen Gleichung,

welche durch die hypergeometrische Reihe befriedigt wird, haben wir:

$$P = \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1-x)} = \frac{\gamma}{x} + \frac{\gamma - \alpha - \beta - 1}{1 - x},$$

und daher:

$$Y_1 \frac{dY_2}{dx} - Y_2 \frac{dY_1}{dx} = Cx^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}.$$

Der Werth von C in jeder Gleichung kann bestimmt werden entweder durch Vergleichung der Coefficienten derselben Potenz von x auf beiden Seiten oder durch Substitution eines besonderen Werthes von x.

1. Beispiel. Es sei:

$$Y_1 = y_3 = x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x)$$
$$Y_2 = y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Entwickelt man jede Seite nach steigenden Potenzen von x, so ist das Glied, welches die niedrigste Potenz von x in

$$Y_1 \frac{dY_2}{dx}$$

enthält, $\frac{\alpha\beta}{\gamma} x^{1-\gamma}$; das Glied, welches die niedrigste Potenz von x in

$$- Y_2 \frac{dY_1}{dx}$$

enthält, $-(1-\gamma)x^{-\gamma}$, und daher erhalten wir, wenn wir die Coefficienten der niedrigsten Potenzen gleichsetzen:

$$C = -(1-\gamma) = \gamma - 1,$$

und daher:

$$y_3 \frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dy_3}{dx} = (\gamma - 1)\, x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}.$$

2. Beispiel. Es sei:

$$Y_1 = y_5 = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - x)$$
$$Y_2 = y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Wir bewiesen vorher, dass

$$y_1 = My_3 + Ny_5$$

ist, worin M und N bestimmte Constanten sind. Dies giebt durch Differentiation:

$$\frac{dy_1}{dx} = M\frac{dy_3}{dx} + N\frac{dy_5}{dx},$$

und daher:

$$M\left(y_3 \frac{d y_1}{d x} - y_1 \frac{d y_3}{d x}\right) = N\left(y_1 \frac{d y_5}{d x} - y_5 \frac{d y_1}{d x}\right),$$

oder nach dem Resultat des letzten Beispiels:

$$y_5 \frac{d y_1}{d x} - y_1 \frac{d y_5}{d x} = -\frac{M}{N}(\gamma - 1)\, x^{-\gamma}(1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}.$$

Nun ist aus den Werthen von M und N:

$$\frac{M}{N} = \frac{\Pi(\gamma - 1)\,\Pi(-\gamma)\,\Pi(\alpha+\beta-\gamma)}{\Pi(1-\gamma)\,\Pi(\alpha - 1)\,\Pi(\beta - 1)};$$

ferner ist:

$$\Pi(1-\gamma) = (1-\gamma)\,\Pi(-\gamma) = -(\gamma - 1)\,\Pi(-\gamma),$$

mithin:

$$-\frac{M}{N}(\gamma - 1) = \frac{\Pi(\gamma - 1)\,\Pi(\alpha + \beta - \gamma)}{\Pi(\alpha - 1)\,\Pi(\beta - 1)},$$

und die Gleichung wird:

$$y_5 \frac{d y_1}{d x} - y_1 \frac{d y_5}{d x} = \frac{\Pi(\gamma - 1)\,\Pi(\alpha + \beta - \gamma)}{\Pi(\alpha - 1)\,\Pi(\beta - 1)}\, x^{-\gamma}(1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}.$$

Aufgabe. Man beweise die Relationen:

$$y_5 \frac{d y_3}{d x} - y_3 \frac{d y_5}{d x} = \frac{\Pi(\alpha + \beta - \gamma)\,\Pi(1 - \gamma)}{\Pi(\alpha - \gamma)\,\Pi(\beta - \gamma)}\, x^{-\gamma}(1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}$$

und:

$$y_{10} \frac{d y_1}{d x} - y_1 \frac{d y_{10}}{d x} = \frac{\Pi(\gamma - 1)\,\Pi(\beta - \alpha)}{\Pi(\beta - 1)\,\Pi(\gamma - \alpha - 1)}\, x^{-\gamma}(1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}.$$

§. 129.

In allen vorhergehenden Untersuchungen sind die Grössen α, β, γ als von einander unabhängig vorausgesetzt, es haben in Folge dessen die Reihen ihre allgemeinste Form behalten. Viele wichtige Anwendungen sind aber dadurch gemacht worden, dass man entweder eine oder zwei Beziehungen zwischen den constanten Elementen festsetzte, oder einem oder mehreren von ihnen numerische Werthe gab. Derartige Anwendungen (z. B. auf elliptische Integrale) können hier nicht auseinandergesetzt werden; der Studirende aber, der sich hierüber zu unterrichten wünscht, wird am Ende dieses Capitels ein Verzeichniss der wichtigeren Abhandlungen finden, die über hypergeometrische Reihen handeln.

Besondere Fälle der Integration in endlicher Form.

§. 130.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung einiger specieller Fälle über, in denen die hypergeometrische Reihe in endlicher Form dargestellt werden kann.

Es ist (§. 61) bewiesen worden, dass der Quotient s irgend zweier particulärer Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + I y = 0$$

die Gleichung befriedigt:

$$\frac{1}{2}\{s, x\} = I,$$

wo I eine Function von x allein ist, und es ist ferner gezeigt worden, dass aus irgend einem speciellen Werthe von s, welcher dieser Gleichung genügt, der Werth der beiden particulären Lösungen der ersten Gleichung erhalten werden kann. Im Falle der hypergeometrischen Reihe ist der Werth von I:

$$(A) \quad \frac{1}{4}\left\{\frac{1-\lambda^2}{x^2} + \frac{1-\nu^2}{(x-1)^2} + \frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{x(x-1)}\right\},$$

worin λ, μ, ν bestimmte Functionen der Constanten α, β, γ sind, so dass also für diese Reihe die Differentialgleichung, durch welche s bestimmt wird, geschrieben werden kann:

$$\{s, x\} = \frac{1}{2}\,\frac{1-\lambda^2}{x^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1-\nu^2}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{x(x-1)}.$$

Wenn dann eine Relation zwischen s und x gefunden werden kann, die in endlicher Form ausdrückbar ist, so wird auch nach den Formeln in §. 62 die hypergeometrische Reihe in endlicher Form ausdrückbar sein. Dass dies geschehe, kann man nicht erwarten, so lange die Parameter allgemein sind, vielmehr wird es aus den wenigen angeführten Beispielen erhellen, dass die Werthe von λ, μ, ν bestimmte numerische Constanten sein müssen.

Es giebt im Ganzen **fünfzehn verschiedene Fälle** und nicht mehr; zum Beweise dieser Behauptung muss an erster Stelle auf die Abhandlungen von Schwarz (siehe §. 134) verwiesen werden, dem man die Ermittelung derselben, aber auf vollständig verschiedenem Wege, ursprünglich verdankt.

Es wird gut sein, hier die allgemeinen Transformationsformeln für die Function $\{s, x\}$ bei Veränderung der Veränderlichen zu wiederholen. Die speciellen in der 3. Aufgabe §. 62 gegebenen Beispiele sind besondere Fälle der allgemeinen Relationen, welche lauten:

$$(1)\quad \{s, x\} = \left(\frac{dS}{dx}\right)^2 \{s, S\} - \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 \{x, X\} + \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 \{S, X\}$$

und

$$(2)\quad \left\{\frac{ax+b}{cx+d}, x\right\} = 0.$$

Hierzu können wir noch hinzufügen:

$$(3)\quad \{s, x\} = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{(\gamma x + \delta)^4} \left\{s, \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right\}.$$

$$(4)\quad \left\{\frac{as+b}{cs+d}, \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right\} = \frac{(\gamma x + \delta)^4}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} \{s, x\}.$$

Eine andere Formel, die sich nützlich erweisen wird, ist die, welche sich aus der Annahme $s^n = x$ ergiebt; wir erhalten dann:

$$s' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1},$$

also:

$$\frac{s''}{s'} = \frac{\frac{1}{n} - 1}{x},$$

somit:

$$\frac{s'''}{s'} - \left(\frac{s''}{s'}\right)^2 = \frac{1 - \frac{1}{n}}{x^2},$$

und:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}}{x^2},$$

also:

$$\{s, x\} = \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{2x^2},$$

und dies kann in jeder der beiden Formen geschrieben werden:

$$(5)\quad \begin{cases} \{x^{\frac{1}{n}}, x\} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{n^2}}{2\,x^2} \\[2ex] \{s,\, s^n\} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{n^2}}{2\,s^{2n}}. \end{cases}$$

§. 131.

I. Fall. Setzt man in Nr. (1) der eben angeführten Formeln $X = x$, so erhält man:

$$\{s, x\} = \{S, x\} + \left(\frac{d\,S}{d\,x}\right)^2 \{s, S\}.$$

Durch eine Reihe von geeigneten Substitutionen kann man von dieser Gleichung zu der entsprechenden Gleichung für die hypergeometrische Reihe gelangen.

Zuerst sei:

$$S = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} = \frac{s^n - 1}{s^n + 1};$$

dann ist:

$$\{s, x\} = \{S, x\} + \left(\frac{d\,S}{d\,x}\right)^2 \left\{s, \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}\right\},$$

während nach (3) ist:

$$\left\{s, \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}\right\} = \frac{1}{4}\,(\sigma + 1)^4\,\{s, \sigma\}.$$

Da aber $\sigma = s^n$, so wird:

$$\{s, \sigma\} = \frac{1 - \dfrac{1}{n^2}}{2\,\sigma^2},$$

und somit:

$$\left\{s, \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}\right\} = \frac{1 - \dfrac{1}{n^2}}{2}\,\frac{(\sigma + 1)^4}{4\,\sigma^2}.$$

Zweitens sei:

$$T = S^2 = 1 - x,$$

so dass die Beziehung zwischen s und x ist:

$$\left(\frac{s^n - 1}{s^n + 1}\right)^2 = 1 - x.$$

Ferner:

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 = \frac{\frac{1}{4}}{1-x}.$$

Mit Anwendung von (1) erhält man:

$$\{S, x\} = \{T, x\} + \left(\frac{dT}{dx}\right)^2 \{S, T\};$$

hierin ist aber:

$$\frac{dT}{dx} = -1$$

$$\{T, x\} = \{1-x, x\} = 0$$

$$\{S, T\} = \{S, S^2\} \qquad = \frac{1-\frac{1}{4}}{2\,T^2},$$

so dass man bekommt:

$$\{S, x\} = \frac{1}{2}\,\frac{1-\frac{1}{4}}{(1-x)^2}.$$

Da

$$\left(\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\right)^2 = 1-x$$

ist, so ist:

$$x = \frac{4\,\sigma}{(\sigma+1)^2},$$

und daher:

$$\left\{s, \frac{\sigma-1}{\sigma+1}\right\} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)\frac{2}{x^2}.$$

Werden diese Substitutionen in der ursprüglichen Gleichung, welche $\{s, x\}$ ergab, ausgeführt, so wird

$$\{s, x\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1-\frac{1}{4}}{(1-x)^2} + \frac{1-\frac{1}{n^2}}{x^2\,(1-x)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1-\frac{1}{4}}{(1-x)^2} + \frac{1-\frac{1}{n^2}}{x^2} + \frac{\frac{1}{n^2}-1}{x\,(x-1)}\right].$$

Dies ist dieselbe Form wie die Gleichung (A) in dem allgemeinen Falle, und sie wird mit dieser identisch, wenn man setzt:

$$\lambda = \frac{1}{n},\ \ \nu = \frac{1}{2},\ \ \mu = \frac{1}{2},$$

und die Beziehung zwischen s und x ist dann:

$$\left(\frac{s^n - 1}{s^n + 1}\right)^2 = 1 - x,$$

oder:

$$x = \frac{4\, s^n}{(s^n + 1)^2}.$$

Nun war $\lambda^2 = (1 - \gamma)^2$, $\mu^2 = (\alpha - \beta)^2$, $\nu^2 = (\gamma - \alpha - \beta)^2$; erinnern wir uns ferner, dass $\gamma - \alpha - \beta$ positiv sein muss, damit die Reihe auch noch für $x = 1$ convergent sei, und nehmen wir (was erlaubt ist) an, dass α grösser sei als β, so finden wir:

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\,n}, \quad \beta = -\frac{1}{2\,n}, \quad \gamma = 1 - \frac{1}{n}.$$

Wird gewünscht, dass β positiv sei, so können wir das Zeichen von n ändern; alsdann sind die Elemente der hypergeometrischen Reihe:

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\,n}, \quad \beta = \frac{1}{2\,n}, \quad \gamma = 1 + \frac{1}{n},$$

und die Relation zwischen s und x ist:

$$\frac{1 - s^n}{1 + s^n} = (1 - x)^{1/2}.$$

Die letztere giebt:

$$s^n = \frac{1 - (1 - x)^{1/2}}{1 + (1 - x)^{1/2}},$$

und daher:

$$s = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{\left[1 + (1 - x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2}{n}}},$$

während

$$s'^{-\frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{2}} (1 - x)^{\frac{1}{4}}\, x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\,n}} \left\{1 + (1 - x)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

ist.

Nun sind die beiden particulären Lösungen, wenn die Gleichung ihre Normalform besitzt:

$$C_1\, s'^{-1/2} \quad \text{und} \quad C_2\, s'^{-1/2}\, s,$$

und die Beziehung zwischen der abhängigen Veränderlichen in diesem Falle und der abhängigen Veränderlichen in der gewöhnlichen Differentialgleichung ist (§. 116):

$$y = v\, x^{-1/2\,\gamma}\, (1 - x)^{-1/2(\alpha + \beta + 1 - \gamma)}.$$

Dieselbe geht in unserem speciellen Falle über in:

$$y = v x^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)} (1-x)^{-\frac{1}{4}}.$$

Daher lautet das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$x(1-x)\frac{d^2 y}{d x^2} + \left\{1 + \frac{1}{n} - x\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{n}\right)\right\}\frac{d y}{d x} - \frac{1}{4n}\left(1 + \frac{1}{n}\right) y = 0$$

folgendermaassen:

$$y = C_1 x^{-\frac{1}{n}} \{1 + (1-x)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{n}} + C_2 \{1 + (1-x)^{\frac{1}{2}}\}^{-\frac{1}{n}}.$$

Vergleichen wir noch diese beiden particulären Lösungen

$$\{1 + (1-x)^{\frac{1}{2}}\}^{-\frac{1}{n}} \quad \text{und} \quad x^{-\frac{1}{n}} \{1 + (1-x)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{n}}$$

mit der Reihe der particulären Lösungen, so finden wir, dass sie respective I und III entsprechen; in der That bestehen die Relationen:

$$\text{(I.)} \quad F\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \quad \frac{1}{2n}, \; 1 + \frac{1}{n}, \; x\right\} = 2^{\frac{1}{n}} \{1 + (1-x)^{\frac{1}{2}}\}^{-\frac{1}{n}}$$

und

$$\text{(II.)} \quad F\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \; -\frac{1}{2n}, \; 1 - \frac{1}{n}, \; x\right\} = 2^{-\frac{1}{n}} \{1 + (1-x)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{n}},$$

wo in der letzteren der gemeinschaftliche Factor $x^{-\frac{1}{n}}$ weggelassen ist.

Diese beiden Relationen sind demnach äquivalent zu einander.

§. 132.

II. Fall. Aus dem, was in dem letzten Falle bewiesen worden ist, folgt, dass, wenn wir n den besonderen Werth 2 beilegen, die Relation

$$\xi = \frac{4\sigma^2}{(\sigma^2 + 1)^2}$$

eine Lösung der Gleichung

$$\{\sigma, \xi\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1 - \frac{1}{4}}{(1-\xi)^2} + \frac{1 - \frac{1}{4}}{\xi^2} + \frac{\frac{1}{4} - 1}{\xi(\xi - 1)}\right]$$

$$= \frac{3}{8}\,\frac{\xi^2 - \xi + 1}{\xi^2 (1-\xi)^2}$$

ist.

Zunächst sei nun:

$$\xi(\xi_1 + 1) = 1.$$

Dann ist:

$$\{\sigma, \xi_1\} = \left\{\sigma, \frac{1-\xi}{\xi}\right\} = \xi^4 \{\sigma, \xi\}$$

$$= \frac{3}{8} \frac{\xi^2(\xi^2 - \xi + 1)}{(1-\xi)^2}$$

$$= \frac{3}{8} \frac{\xi_1^2 + \xi_1 + 1}{\xi_1^2(\xi_1 + 1)^2},$$

und:

$$\xi_1 = \frac{(\sigma^2 - 1)^2}{4\sigma^2}.$$

Zweitens sei:

$$\xi_1 = \xi_2^2.$$

Dann ist:

$$\{\sigma, \xi_2\} = \left(\frac{d\xi_1}{d\xi_2}\right)^2 [\{\sigma, \xi_1\} - \{\xi_2, \xi_1\}],$$

und

$$\{\xi_2, \xi_1\} = \{\xi_2, \xi_2^2\} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{2\xi_1^2} = \frac{3}{8\xi_1^2}.$$

Mithin:

$$\{\sigma, \xi_2\} = \frac{3}{2} \xi_2^2 \left[\frac{\xi_1^2 + \xi_1 + 1}{\xi_1^2(\xi_1 + 1)^2} - \frac{1}{\xi_1^2}\right]$$

$$= \frac{3}{2} \xi_1 \frac{-\xi_1}{\xi_1^2(\xi_1 + 1)^2}$$

$$= -\frac{3}{2} \frac{1}{(\xi_2^2 + 1)^2},$$

und die Beziehung zwischen σ und ξ_2 ist:

$$\xi_2 = \frac{\sigma^2 - 1}{2\sigma}.$$

Setzt man drittens:

$$\xi_2 = \sqrt{3}\, \xi_3,$$

so hat man sofort:

$$\{\sigma, \xi_3\} = 3\{\sigma, \xi_2\} = -\frac{9}{2} \frac{1}{(1 + 3\xi_3^2)^2},$$

wobei

$$\xi_3 = \frac{\sigma^2 - 1}{2\sigma\sqrt{3}}$$

ist.

Ist viertens:

$$\sigma = s^2,$$

so ist:

$$\{s, \xi_3\} = \left(\frac{d\sigma}{d\xi_3}\right)^2 \{s, \sigma\} + \{\sigma, \xi_3\}.$$

Nun ist aber:

$$\{s, \sigma\} = \{s, s^2\} = \frac{3}{8\sigma^2},$$

und

$$2\sqrt{3} = \frac{\sigma^2 + 1}{\sigma^2} \frac{d\sigma}{d\xi_3},$$

also:

$$\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{d\sigma}{d\xi_3}\right)^2 = \frac{12\sigma^2}{(\sigma^2+1)^2} = \frac{3}{1+3\xi_3^2}.$$

Mithin wird:

$$\{s, \xi_3\} = \frac{27}{8} \frac{\xi_3^2 - 1}{(1+3\xi_3^2)^2},$$

und die Beziehung zwischen s und ξ_3 ist:

$$\xi_3 = \frac{s^4 - 1}{2s^2\sqrt{3}}.$$

Fünftens sei:

$$\xi_3 = \frac{\xi_4 + 1}{\xi_4 - 1}.$$

Dann ist:

$$\{s, \xi_4\} = \frac{4}{(\xi_4 - 1)^4} \{s, \xi_3\}$$

$$= \frac{4}{(\xi_4 - 1)^4} \cdot \frac{27}{8} \cdot \frac{4\xi_4}{(\xi_4 - 1)^2} \cdot \frac{(\xi_4 - 1)^4}{16(\xi_4^2 + \xi_4 + 1)^2}$$

$$= \frac{27}{8} \frac{\xi_4}{(\xi_4^3 - 1)^2},$$

und die Beziehung zwischen s und ξ_4 ist:

$$\xi_4 = \frac{s^4 + 2s^2\sqrt{3} - 1}{s^4 - 2s^2\sqrt{3} - 1}.$$

Sechstens sei:

$$\xi_5 = \xi_4^3.$$

Dann ist:

$$\{s, \xi_5\} = \left(\frac{d\,\xi_4}{d\,\xi_5}\right)^2 [\{s, \xi_4\} - \{\xi_5, \xi_4\}],$$

ferner:

$$\frac{d\,\xi_4}{d\,\xi_5} = \frac{\frac{1}{3}}{\xi_5^{2/3}},$$

und

$$\{\xi_5, \xi_4\} = -\frac{4}{\xi_4^2} = -\frac{4}{\xi_5^{2/3}},$$

somit:

$$\{s, \xi_5\} = \frac{\frac{3}{8}}{\xi_5 (\xi_5 - 1)^2} + \frac{\frac{4}{9}}{\xi_5^2}$$

$$= \frac{\frac{3}{8}}{(\xi_5 - 1)^2} + \frac{\frac{4}{9}}{\xi_5^2} + \frac{\frac{3}{8}}{\xi_5 (1 - \xi_5)},$$

und die Relation zwischen s und ξ_5 ist:

$$\xi_5 = \left[\frac{s^4 + 2\,s^2 \sqrt{3} - 1}{s^4 - 2\,s^2 \sqrt{3} - 1}\right]^3.$$

Es ergiebt sich daher, dass eine Lösung der Gleichung

$$\{s, x\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1 - \lambda^2}{x^2} + \frac{1 - \nu^2}{(1 - x)^2} + \frac{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 - 1}{x\,(x - 1)}\right],$$

in dem Falle, wo

$$\lambda = \frac{1}{3} = \mu, \quad \nu = \frac{1}{2}$$

ist, dargestellt wird durch

$$x = \left(\frac{s^4 + 2\,s^2 \sqrt{3} - 1}{s^4 - 2\,s^2 \sqrt{3} - 1}\right)^3.$$

Aus dieser Relation kann man den Werth von s (derselbe ist eine etwas complicirte Function von x) und daraus den von s' finden und wird dadurch zu einer Lösung der Gleichung

$$x\,(1 - x)\,\frac{d^2 y}{d\,x^2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{7}{6}\,x\right)\frac{d\,y}{d\,x} + \frac{1}{48}\,y = 0$$

gelangen.

§. 133.

III. Fall. Aus den beiden vorhergehenden Fällen kann ein neuer abgeleitet werden.

Denn man setze im II. Falle

$$\frac{4\,z}{(z+1)^2} = x,$$

so wird nach dem I. Falle:

$$\{z, x\} = \frac{\frac{3}{8}}{(1-x)^2},$$

und daher:

$$\{s, z\} = \left(\frac{d\,x}{d\,z}\right)^2 [\{s, x\} - \{z, x\}]$$

$$= \left(\frac{d\,x}{d\,z}\right)^2 \left[\frac{\frac{4}{9}}{x^2} + \frac{\frac{3}{8}}{x\,(1-x)}\right]$$

$$= \frac{\frac{4}{9}}{z^2} + \frac{-\frac{5}{18}}{z\,(z+1)^2}.$$

Verwandelt man nun z in $-z$, so dass

$$\frac{4\,z}{(z-1)^2} = -x = \left(\frac{s^4 + 2\,s^2\sqrt{3} - 1}{-s^4 + 2\,s^2\sqrt{3} + 1}\right)^3$$

ist, so wird:

$$\{s, z\} = \{s, -z\} = \frac{\frac{4}{9}}{z^2} + \frac{\frac{5}{18}}{z\,(1-z)^2}$$

$$= \frac{\frac{4}{9}}{z^2} + \frac{\frac{5}{18}}{(1-z)^2} + \frac{\frac{5}{18}}{z\,(1-z)}.$$

Eine Vergleichung dieses Resultats mit der allgemeinen Formel zeigt, dass die letzte Relation zwischen z und s eine Lösung darstellt, wofern

$$\lambda = \frac{1}{3}, \quad \nu = \frac{2}{3}, \quad \mu = \frac{1}{3},$$

und somit

$$\alpha = -\beta = \frac{1}{6}, \quad \gamma = \frac{2}{3}$$

ist.

Mittelst der vorstehenden Relation können wir somit die vollständige Lösung der Gleichung

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+\left(\frac{2}{3}-z\right)\frac{dy}{dz}+\frac{1}{36}y=0$$

in endlicher Form finden.

1. Aufgabe. Man zeige, dass aus dem II. Falle die Lösung von

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{4}{3}-\frac{11}{6}x\right)\frac{dy}{dx}-\frac{7}{48}y=0$$

in endlicher Form abgeleitet werden kann.

2. Aufgabe. Man zeige, dass aus dem III. Falle die Lösung von

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{3}x\right)\frac{dy}{dx}-\frac{1}{12}y=0$$

in endlicher Form abgeleitet werden kann.

Weitere Beispiele wird man in den „Vermischte Aufgaben" am Ende dieses Capitels finden.

Man kann leicht zeigen, dass in allen gegebenen Beispielen, wenn wir positive Werthe von λ, μ, ν nehmen,

$$\lambda+\mu+\nu>1$$

ist; der Fall $\lambda+\mu+\nu=1$ lässt sich durch die einfachere Methode des §. 68 integriren. Siehe die 7. Aufgabe, Seite 143.

§. 134.

Um sich weitere Kenntniss von dem Gegenstande der hypergeometrischen Reihen zu verschaffen, kann man folgende Abhandlungen studiren:

Gauss, „*Disquisitiones generales circa seriem infinitam*

$$1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma.(\gamma+1)}x^2+\ldots\text{"}$$

(Ges. Werke, Bd. III, S. 123 bis 163.)

„*Determinatio seriei nostrae per aequationem differentialem secundi ordinis.*" Ebendaselbst S. 207 bis 230.

Kummer, „Ueber die hypergeometrische Reihe." Crelle's J. Bd. XV, S. 39 bis 83 und 127 bis 172.

Schwarz, „Ueber einige Abbildungsaufgaben." Crelle's J. Bd. LXX, S. 105 bis 120.

„Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Argumentes darstellt." Crelle's J. Bd. LXXV, S. 292 bis 335.

Cayley, „*On the Schwarzian derivative and the Polyhedral Functions*". Camb. Phil. Trans. t. XIII.

In der letzten von diesen Abhandlungen findet man noch andere Abhandlungen angeführt.

Auch eine Abhandlung von Goursat „*Sur l'équation différentielle qui admet pour intégrale la série hypergéométrique*“ (Annales de l'école normale supérieure, Sér. II, t. X) kann mit grossem Vortheil nachgelesen werden. In derselben erhält der Verfasser durch Entwickelung einer Methode, die man ursprünglich Jacobi verdankt, die Resultate von Kummer und Schwarz.

Vermischte Aufgaben.

1. Man beweise, dass, wenn

$(a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\varphi)^{-n} = A_0 + 2A_1\cos\varphi + 2A_2\cos 2\varphi + 2A_3\cos 3\varphi + \cdots$

ist, alsdann der Coefficient A_r in jeder von den Formen geschrieben werden kann:

(1) $\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}\,a^{-2n-r}\,b^r\,F\left(n, n+r, r+1, \frac{b^2}{a^2}\right).$

(2) $\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}\,\frac{a^r\,b^r}{(a^2+b^2)^{n+r}}\,F\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}n+\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}, r+1, \frac{4\,a^2\,b^2}{(a^2+b^2)^2}\right).$

(3) $\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}\,\frac{a^r\,b^r}{(a+b)^{2(n+r)}}\,F\left(n+r, r+\frac{1}{2}, 2r+1, \frac{4\,ab}{(a+b)^2}\right).$

(4) $\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}\,\frac{a^r\,b^r}{(a-b)^{2(n+r)}}\,F\left(n+r, r+\frac{1}{2}, 2r+1, -\frac{4\,ab}{(a-b)^2}\right).$

(Gauss.)

2. Man suche eine Lösung der Gleichung

$$(A + Bx + Cx^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (D + Ex)\frac{dy}{dx} + Fy = 0$$

in der Form einer hypergeometrischen Reihe; dabei werden A, B, C, D, E, F als Constanten vorausgesetzt. (Gauss.)

3. Eine Function heisst verwandt mit $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, wenn sie aus ihr dadurch abgeleitet ist, dass man eins und nur eins von ihren constanten Elementen um eine Einheit ändert. Man bezeichne nun $F(\alpha+1, \beta, \gamma, x)$ mit $F_{\alpha+}$, $F(\alpha-1, \beta, \gamma, x)$ mit $F_{\alpha-}$ und $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ mit F und beweise dann die folgenden Relationen:

(1) $0 = (\beta - \alpha)F + \alpha F_{\alpha+} - \beta F_{\beta+}.$

(2) $0 = (\gamma - \alpha - 1)F + \alpha F_{\alpha+} - (\gamma - 1)F_{\gamma-}.$

(3) $0 = [\gamma - 2\alpha - (\beta - \alpha)x]F + \alpha(1-x)F_{\alpha+} - (\gamma - \alpha)F_{\alpha-}.$

(4) $0 = \gamma[\alpha - (\gamma - \beta)x]F - \alpha\gamma(1-x)F_{\alpha+} + (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)xF_{\gamma+}.$

(5) $0 = (\gamma - \alpha - \beta)F + \alpha(1-x)F_{\alpha+} - (\gamma - \beta)F_{\beta-}.$ (Gauss.)

4. Man beweise die Gleichung:

$$(1-x)\,F(\alpha,\beta,\gamma,x)\,F(1-\alpha,1-\beta,1-\gamma,x)-1$$
$$=\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(1-\gamma)}\,x\,F(\alpha,\beta,\gamma+1,x)\,F(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma,x).$$

(Gauss.)

5. Dadurch, dass man die unabhängige Veränderliche in der Differentialgleichung ändert, beweise man die folgenden Gleichungen:

(1) $$(1+y)^{2\alpha}\,F(2\alpha,2\alpha+1-\gamma,\gamma,y)=F\left(\alpha,\alpha+\frac{1}{2},\gamma,\frac{4y}{(1+y)^2}\right).$$

(Gauss.)

(2) $$(1+y)^{2\alpha}\,F\left(\alpha,\alpha+\frac{1}{2}-\beta,\beta+\frac{1}{2},y^2\right)=F\left(\alpha,\beta,2\beta,\frac{4y}{(1+y)^2}\right).$$

(Gauss.)

(3) $$F\left(\alpha,\beta,\alpha+\beta+\frac{1}{2},\sin^2\vartheta\right)=F\left(2\alpha,2\beta,\alpha+\beta+\frac{1}{2},\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right).$$

(Kummer.)

Man beweise ebenso, indem man die Veränderliche x in

$$-8x\,\{1+(1-x)^{1/2}\}^{-3}$$

verwandelt, die Gleichung:

(4) $$F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},\sin^2 2\vartheta\right)=\cos^{-2\alpha}\vartheta\,F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{-4\sin^2\vartheta}{\cos^4\vartheta}\right).$$

(Kummer.)

6. Man zeige, dass die Functionen P_n und Q_n, welche die unabhängigen Lösungen der Legendre'schen Gleichung sind, sich darstellen lassen durch hypergeometrische Reihen in der Form:

$$P_n(x)=\frac{\Pi(2n)}{2^{2n}\,\Pi(n)\,\Pi(n)}\,\xi^{-n}\,F\left(\frac{1}{2},-n,\frac{1}{2}-n,\xi^2\right)$$
$$Q_n(x)=\frac{2^{2n+1}\,\Pi(n)\,\Pi(n)}{\Pi(2n+1)}\,\xi^{n+1}\,F\left(\frac{1}{2},n+1,n+\frac{3}{2},\xi^2\right),$$

wobei die Veränderliche x der Legendre'schen Gleichung mit ξ durch die Relation verbunden ist:

$$2x=\xi+\xi^{-1}.$$

(Heine.)

7. Man zeige, dass, wenn die unabhängige Veränderliche in der Legendre'schen Gleichung der Bedingung unterworfen wird, dass sie kleiner als 1 sein solle, die vollständige Lösung dargestellt werden kann durch

$$A\,F\left(-\frac{1}{2}n,\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\frac{1}{2},x^2\right)+B\,x\,F\left(-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}n+1,\frac{3}{2},x^2\right),$$

worin die Reihen, wenn unendlich, convergent sind. (Heine.)

8. Wird die Reihe

$$1+\frac{\alpha\beta\gamma}{\vartheta\,\varepsilon}\,x+\frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)\,\gamma(\gamma+1)}{1\,.\,2\,.\,\vartheta(\vartheta+1)\,.\,\varepsilon(\varepsilon+1)}\,x^2+\cdots$$

mit

$$F\left\{\begin{pmatrix}\alpha,\beta,\gamma,\\ \vartheta,\varepsilon\end{pmatrix},x\right\}$$

bezeichnet, so beweise man, dass F der Differentialgleichung genügt:

$$(1-x)x^2\frac{d^3F}{dx^3}+\{\vartheta+\varepsilon+1-(\alpha+\beta+\gamma+3)x\}x\frac{d^2F}{dx^2}$$
$$+\{\vartheta\varepsilon-x(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma+1)\}\frac{dF}{dx}-\alpha\beta\gamma F=0,$$

und bestimme zwei andere particuläre Lösungen der Gleichung respective in der Form:

$$x^{1-\vartheta}F\left\{\begin{pmatrix}\alpha+1-\vartheta,\ \beta+1-\vartheta,\ \gamma+1-\vartheta\\ 2-\vartheta,\ \varepsilon+1-\vartheta\end{pmatrix}, x\right\}$$

und

$$x^{1-\varepsilon}F\left\{\begin{pmatrix}\alpha+1-\varepsilon,\ \beta+1-\varepsilon,\ \gamma+1-\varepsilon\\ \vartheta+1-\varepsilon,\ 2-\varepsilon\end{pmatrix}, x\right\}.$$

Man drücke die erste von diesen drei Lösungen mittelst der beiden anderen aus. (Siehe §. 77.)

9. Die Gleichung

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{3}{2}-2x\right)\frac{dy}{dx}-\frac{1}{4}y=0$$

hat eine particuläre Lösung von der Form x^n. Man bestimme n und suche die vollständige Lösung.

Hiernach stelle man $arc\ sin\, x$ als eine hypergeometrische Reihe dar. (Goursat.)

10. Man bestimme die vollständige Lösung von

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{3}(1-2x)\frac{dy}{dx}+\frac{20}{9}y=0,$$

sowie von

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}+2y=0$$

in endlicher Form. (Goursat.)

11. Man beweise, dass die Relation

$$\frac{x}{x-1}=\frac{(s^8+14s^4+1)^3}{108s^4(s^4-1)^4}$$

der Gleichung genügt:

$$\{s,x\}=\frac{\frac{4}{9}}{x^2}+\frac{\frac{15}{32}}{(1-x)^2}+\frac{\frac{155}{288}}{x(1-x)},$$

und bestimme hieraus in endlicher Form die vollständigen Integrale der Gleichungen:

$$(1)\quad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{2}{3}-\frac{17}{12}x\right)\frac{dy}{dx}+\frac{11}{576}y=0.$$

$$(2)\quad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{4}{3}-\frac{25}{12}x\right)\frac{dy}{dx}-\frac{133}{576}y=0.$$

12. Man beweise, dass die Relation

$$-\frac{(z-1)^2}{4z}=\frac{(s^8+14s^4+1)^3}{108s^4(s^4-1)^4}$$

der Gleichung genügt:

$$\{s, z\} = \frac{\frac{15}{32}}{z^2} + \frac{\frac{5}{18}}{(1-z)^2} + \frac{\frac{5}{18}}{z(1-z)},$$

und bestimme hieraus in endlicher Form die vollständigen Integrale der Gleichungen:

$$(1) \quad x(1-x)\frac{d^2 y}{d x^2} + \left(\frac{3}{4} - \frac{13}{12}x\right)\frac{d y}{d x} + \frac{1}{72}y = 0.$$

$$(2) \quad x(1-x)\frac{d^2 y}{d x^2} + \left(\frac{5}{4} - \frac{19}{12}x\right)\frac{d y}{d x} - \frac{5}{72}y = 0.$$

Siebentes Capitel.

Lösung durch bestimmte Integrale.

§. 135.

Wir haben nunmehr die hauptsächlichsten Methoden angegeben, durch welche sich die abhängige Veränderliche als Function der unabhängigen Veränderlichen darstellen lässt mittelst solcher Functionen, die gewöhnlich bekannte Functionen genannt werden. Es giebt indessen noch eine andere Methode, welche sicher zu einer Lösung gewisser Differentialgleichungen führt, obwohl die vollständige Ausführung der angedeuteten Operationen nicht möglich ist. Diese Methode besteht darin, dass man den Werth der abhängigen Veränderlichen als ein **bestimmtes Integral** darstellt; ihre Hauptanwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen findet sie in dem Falle einer gewissen Classe von linearen Gleichungen, welche sich sonst durch Reihen, aber nicht in so einfacher Form, lösen lassen. Die Methode ist aber von ausserordentlicher Bedeutung bei der Lösung derjenigen linearen partiellen Differentialgleichungen von höherer als der ersten Ordnung, welche bei Untersuchungen der mathematischen Physik auftreten; in der That bilden bei einigen Aufgaben diese Lösungen mittelst bestimmter Integrale die einzigen bisher erhaltenen Lösungen. An dieser Stelle haben wir indessen die Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen im Auge.

§. 136.

Die Methode wird mit besonderem Nutzen angewendet auf lineare Gleichungen, in deren Coefficienten x nur in der ersten Potenz auftritt und in denen kein von y oder den Differential-

quotienten von y unabhängiges Glied vorkommt. Eine solche Gleichung ist in ihrer allgemeinsten Form:

$$(a_0 + b_0 x) \frac{d^n y}{d x^n} + (a_1 + b_1 x) \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \cdots$$
$$+ (a_{n-1} + b_{n-1} x) \frac{d y}{d x} + (a_n + b_n x) y = 0,$$

wobei die a und b Constanten sind. Dieselbe kann geschrieben werden:

$$x \varphi \left(\frac{d}{d x}\right) y + \psi \left(\frac{d}{d x}\right) y = 0,$$

worin φ und ψ rationale ganze algebraische Functionen im Allgemeinen von der $n$ten Ordnung bedeuten, obwohl die Ordnung einer jeden durch das Verschwinden einiger ihrer Coefficienten auch niedriger sein kann. Um diese Gleichung zu lösen, nehmen wir an:

$$y = \int e^{x t}\, T d t,$$

wo T eine Function von t, aber nicht von x ist. Die Form dieser Function und die Integrationsgrenzen (die unabhängig von x vorausgesetzt werden) sind dadurch zu bestimmen, dass man diesen angenommenen Werth von y in die Differentialgleichung einsetzt. Da

$$\frac{d y}{d x} = \int t e^{x t}\, T d t$$
$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \int t^2 e^{x t}\, T d t$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

ist, so kann das Resultat der Substitution dargestellt werden in der Form:

$$\int x e^{x t} \varphi (t)\, T d t + \int e^{x t} \psi (t)\, T d t = 0,$$

welche identisch befriedigt sein muss. Der erste von diesen Ausdrücken kann, wenn man partiell integrirt, ersetzt werden durch

$$[e^{x t} \varphi (t)\, T] - \int e^{x t} \frac{d}{d t} \{\varphi (t)\, T\} d t,$$

und daher geht die Identität über in:

$$[e^{x t} \varphi (t)\, T] - \int e^{x t} \left[\frac{d}{d t} \{ \varphi (t)\, T\} - \psi (t)\, T\right] d t = 0,$$

wo das erste Glied zwischen den bisher noch unbekannten Grenzen des Integrals zu nehmen ist. Nun wird diese Gleichung erfüllt werden, wenn wir setzen:

$$\frac{d}{dt}\{\varphi(t)\,T\} - \psi(t)\,T = 0$$

für alle Werthe von t innerhalb des Integrationsbereiches und

$$[e^{xt}\varphi(t)\,T] = 0$$

für die Grenzen. Die erste von diesen Gleichungen bestimmt T als Function von t; die letzte wird die Grenzen dieses angenommenen Integrals bestimmen.

§. 137.

Um den Werth von T zu erhalten, schreiben wir die erste Gleichung in der Form:

$$\frac{d}{dt}\{\varphi(t)\,T\} - \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\,\varphi(t)\,T = 0,$$

und somit:

$$\varphi(t)\,T = A\,e^{\int \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\,dt},$$

worin A eine willkürliche Constante ist. Daher ist der Werth von y:

$$y = A\int \frac{e^{xt+\int\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\,dt}}{\varphi(t)}\,dt,$$

genommen zwischen Integrationsgrenzen, die sich durch die Gleichung bestimmen:

$$A\left[e^{xt+\int\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\,dt}\right] = 0,$$

wobei diese Grenzen unabhängig von x sind.

§. 138.

Wir haben nun die Grenzen zu bestimmen und betrachten dazu die Gleichung:

$$A\,e^{xt+\int\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\,dt} = \mu_1,$$

wo μ_1 eine Constante ist. Es sei β_1 ein Werth von t, welcher unabhängig ist von x und der Gleichung genügt; ferner seien $\mu_2, \ldots, \mu_r$ andere Constanten und $\beta_2, \ldots, \beta_r$ die entsprechenden Werthe von t, welche sämmtlich unabhängig von x sind.

Wird dann der Werth

$$y = A_1 \int_{\beta_1}^{\beta_2} e^{xt}\, T\, dt + A_2 \int_{\beta_1}^{\beta_3} e^{xt}\, T\, dt + \cdots$$

in die Gleichung eingesetzt und wird, wie bei der vorhergehenden Analyse, in jedem von diesen bestimmten Integralen (wo für T der vorher erhaltene Werth zu nehmen ist) eine einzige partielle Integration ausgeführt, so müssen wir, damit die Gleichung erfüllt werden könne, haben:

$$A_1 \left[e^{xt + \int \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} dt} \right]_{\beta_1}^{\beta_2} + A_2 \left[e^{xt + \int \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} dt} \right]_{\beta_1}^{\beta_3} + \cdots = 0,$$

und wenn diese Gleichung identisch befriedigt ist, so ist der vorstehende Werth von y eine Lösung der Gleichung. Diese letzte Identität wird diejenigen nothwendigen Relationen angeben, welche zwischen den willkürlichen Constanten A bestehen können, und sie wird somit die Anzahl der unabhängigen Constanten bestimmen; ist diese Anzahl dieselbe wie die Ordnung der Differentialgleichung, so wird der vorstehende Werth von y das vollständige Integral sein; ist sie aber kleiner, so muss die Anzahl von particulären Integralen, welche erforderlich ist, um das vollständige Integral zu geben, auf andere Weise bestimmt werden. Beispiele hierzu werden später gegeben werden.

§. 139.

Dies ist das allgemeinste Verfahren, um die Grenzen zu erhalten; es schliesst als besonderes System die Grenzen ein, welche man erhält, indem man die von x unabhängigen Wurzeln der Gleichung

$$e^{xt + \int \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} dt} = 0$$

nimmt. Für dieselben ist augenscheinlich

$$\left[e^{xt + \int \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} dt} \right] = 0,$$

und sie sind gewöhnlich die einfachsten, die man erhalten kann. Wenn diese Gleichung nur zwei von einander verschiedene Grenzen ergiebt, so wird sie das einzige bestimmte Integral liefern, welches man bei dem betreffenden Beispiel unmittelbar erhalten kann; ergiebt sie aber mehr als zwei Grenzen, z. B. $r + 1$, so können

r particuläre Integrale aufgestellt werden. Bezeichnen wir nämlich diese Grenzen mit $\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$, so erhalten wir als die entsprechende Lösung:

$$y = \sum_{s=1}^{s=r} \left\{ A_s \int_{\alpha}^{\beta_s} e^{xt}\, T\, dt \right\}.$$

1. Aufgabe. Um das Vorstehende anzuwenden, suchen wir das allgemeine Integral der Gleichung:

$$\frac{d^n y}{d x^n} - x y = 0.$$

Hier haben wir nach der obigen Bezeichnung:

$$\varphi(p) = -1$$
$$\psi(p) = p^n,$$

und daher:

$$-T = A_0\, e^{-\int t^n dt},$$

oder, wenn wir das Zeichen der willkürlichen Constante ändern:

$$T = A_0\, e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}},$$

während der allgemeinen Regel zufolge die die Grenzen bestimmende Gleichung ist:

$$e^{xt - \frac{t^{n+1}}{n+1}} = -\frac{1}{A_0}\, \mu.$$

Nun wird dieselbe befriedigt durch $t = \infty$, wenn $\mu = 0$ ist, und durch $t = 0$, wenn $\mu = -A_0$ ist. Wir können daher als Grenzen des bestimmten Integrals 0 und ∞ nehmen. Das Integral wird demnach:

$$A_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1} + xt}\, dt.$$

Es ist zu beachten, dass, gerade wie im allgemeinen Falle eines der bestimmten Integrale allein keine Lösung der Differentialgleichung war, so auch dieses keine Lösung der Gleichung ist, da die Glieder ausserhalb des Integrals

$$= A_0 \left[- e^{xt - \frac{t^{n+1}}{n+1}} \right]_0^{\infty}$$
$$= A_0$$

anstatt gleich Null sind. Dieser Werth von y ist somit das particuläre Integral der Gleichung:

$$\frac{d^n y}{d x^n} = x y + A_0.$$

Nun ändert sich die Grösse T nicht, wenn wir für t setzen ωt, wo ω eine Wurzel der Gleichung

$$\xi^{n+1} = 1$$

ist; ferner bleiben auch die Grenzen des bestimmten Integrals ungeändert, da in der Gleichung, welche diese Grenzen bestimmt, das Glied $x t$ im Exponenten sich verwandelt in $x \omega t$, was mit Rücksicht auf diese Gleichung dasselbe ist, als ob man x in $x \omega$ änderte, eine Aenderung, welche auf die Grenzen keinen Einfluss hat, da dieselben unabhängig von x sind. Daher erhalten wir ein anderes bestimmtes Integral in der Form:

$$A_1 \int_0^\infty e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1} + \omega x t}\, d(\omega t),$$

oder, wenn man ω ausserhalb des Integrationszeichens setzt:

$$\omega A_1 \int_0^\infty e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1} + \omega x t}\, d t.$$

Bildet man nun diese bestimmten Integrale für alle $(n+1)$ten Wurzeln der Einheit und addirt sie zu einander, so findet man als den Ausdruck von y, welcher zu substituiren ist:

$$y = A_0 \int_0^\infty e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1} + x t}\, d t + \omega A_1 \int_0^\infty e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1} + \omega x t}\, d t + \cdots$$
$$+ \omega^n A_n \int_0^\infty e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1} + \omega^n x t}\, d t.$$

Substituirt man nun diesen Werth, wie in der allgemeinen Untersuchung, so verschwinden die Glieder unter dem Integralzeichen identisch und der Theil des Ausdrucks, genommen zwischen den Grenzen, welcher durch das A_r entsprechende Integral geliefert wird, ist A_r; mithin ist die resultirende Gleichung, wenn man diesen Werth von y in die Differentialgleichung einsetzt:

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n = 0.$$

Ist also diese einzige Bedingung zwischen den $n + 1$ willkürlichen Constanten erfüllt, so ist der vorstehende Werth von y die vollständige Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{d x^n} = x y.$$

2. Aufgabe. Man beweise, dass der obige Werth von y das vollständige Integral der Gleichung

$$\frac{d^n y}{d x^n} = xy + a$$

ist, vorausgesetzt, dass die Constanten a der Bedingung genügen:

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n = a.$$

3. Aufgabe. Man beweise, dass das vollständige Integral der Gleichung

$$x \frac{d^2 y}{d x^2} - (\alpha + \beta)(1 + x) \frac{d y}{d x} + \alpha \beta x y = 0$$

für positive Werthe von x gegeben wird durch

$$y = A \int_\alpha^\beta e^{ux}(u-\alpha)^{-\left\{\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}+1\right\}}(u-\beta)^{-\left\{\frac{\beta(\beta+\alpha)}{\beta-\alpha}+1\right\}} du$$

$$+ B \int_{-\infty}^\alpha e^{ux}(u-\alpha)^{-\left\{\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}+1\right\}}(u-\beta)^{-\left\{\frac{\beta(\beta+\alpha)}{\beta-\alpha}+1\right\}} du,$$

und bestimme das entsprechende vollständige Integral für negative Werthe von x. (Petzval.)

4. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$x \frac{d^2 y}{d x^2} + a \frac{d y}{d x} - q^2 x y = 0,$$

worin a und q Constanten sind.

Hierbei ist:

$$\varphi(t) = t^2 - q^2, \quad \psi(t) = a t,$$

daher:

$$\int \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} d t = \frac{1}{2} a \log(t^2 - q^2).$$

Somit ist das Integral der Gleichung:

$$y = C \int e^{xt} (t^2 - q^2)^{\frac{1}{2}a - 1} d t,$$

genommen zwischen Grenzen, welche gegeben werden durch die Gleichung:

$$[e^{xt} (t^2 - q^2)^{\frac{1}{2}a}] = 0.$$

Um die Grenzen zu erhalten, setzen wir:

$$e^{xt} (t^2 - q^2)^{\frac{1}{2}a} = 0,$$

und nehmen a positiv an. Dann werden zwei Wurzeln der Gleichung gegeben durch

$$t = + q \quad \text{und} \quad t = - q.$$

Wird nun x auf positive Werthe beschränkt, so ist eine dritte Wurzel gegeben durch

$$t = -\infty,$$

während, wenn x negativ ist, eine dritte Wurzel gegeben ist durch

$$t = +\infty.$$

Da wir in jedem Falle drei Werthe haben, die durch die Grenzgleichung geliefert werden, so können wir zwei verschiedene particuläre Lösungen aufstellen und somit das allgemeine Integral erhalten. Das allgemeine Integral ist also, wenn x positiv ist:

$$y = A \int_{-q}^{+q} (t^2 - q^2)^{\frac{1}{2}a-1} e^{tx}\, dt + B \int_{-\infty}^{-q} (t^2 - q^2)^{\frac{1}{2}a-1} e^{tx}\, dt,$$

und wenn x negativ ist:

$$y = A \int_{-q}^{+q} (t^2 - q^2)^{\frac{1}{2}a-1} e^{tx}\, dt + B \int_{q}^{\infty} (t^2 - q^2)^{\frac{1}{2}a-1} e^{tx}\, dt.$$

5. Aufgabe. Man zeige, dass, wenn a zwischen 0 und 2 liegt, das allgemeine Integral der Gleichung ist:

$$y = C_1 \int_0^{\pi} e^{qx\cos\vartheta} \sin^{a-1}\vartheta\, d\vartheta + C_2 x^{1-a} \int_0^{\pi} e^{qx\cos\vartheta} \sin^{1-a}\vartheta\, d\vartheta,$$

wofern nicht $a = 1$ ist, in welchem Falle das allgemeine Integral geschrieben werden kann:

$$y = \int_0^{\pi} e^{qx\cos\vartheta} \{A + B \log(x \sin^2\vartheta)\}\, d\vartheta.$$

(Boole.)

6. Aufgabe. Man suche die vollständige Lösung der Bessel'schen Gleichung mit Hülfe von bestimmten Integralen.

§. 140.

Die im Vorstehenden behandelte allgemeine lineare Differentialgleichung ist eine mit veränderlichen Coefficienten, welche in Bezug auf die unabhängige Veränderliche vom ersten Grade sind, und die Lösung durch das bestimmte Integral war erhalten worden mit Hülfe einer Differentialgleichung erster Ordnung, welche die unbekannte Function T bestimmte. Es ist dies jedoch nicht der einzige Typus einer Differentialgleichung, auf welche die vorausgesetzte Form des Integrals anwendbar ist; es ist vielmehr thatsächlich nur ein besonderer Fall eines allgemeineren Verfahrens, welches durch den folgenden **Satz** angedeutet wird.

Die durch bestimmte Integrale zu bewerkstelligende Lösung der allgemeinen linearen Differentialgleichung

$n$ter Ordnung, deren Coefficienten nicht Constanten, sondern Functionen der unabhängigen Veränderlichen von nicht höherem als dem $m$ten Grade sind, kann abhängig gemacht werden von der Lösung einer linearen Differentialgleichung von nicht höherer als der $m$ten Ordnung, deren Coefficienten veränderlich sind.

Wir schreiten zum Beweise dieses Satzes. Die Differentialgleichung möge dargestellt sein durch:

$$X_n \frac{d^n y}{d x^n} + X_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + X_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}} + \cdots + X_1 \frac{d y}{d x} + X_0 y = 0,$$

worin X_r (für alle Werthe von r) eine Function von x allein von nicht höherem als dem $m$ten Grade ist, welche gegeben sei durch:

$$X_r = a_r + b_r x + c_r x^2 + \cdots + k_r x^{m-1} + l_r x^m,$$

wobei für einige Werthe von r einige der Coefficienten der höchsten Potenzen von x verschwinden können. Indem wir als die particuläre Lösung dieselbe Form wie vorher nehmen, setzen wir:

$$y = \int e^{tx} T\, d t$$

mit bisher noch unbestimmten Grenzen und mit T als einer unbekannten Function von t. Nun giebt dieser Werth von y:

$$\frac{d^s y}{d x^s} = \int e^{xt} t^s T\, d t,$$

und es wird somit die Gleichung, wenn dieser Ausdruck für y eingesetzt wird:

$$\int e^{tx} T [t^n X_n + t^{n-1} X_{n-1} + \cdots + t X_1 + X_0]\, d t = 0,$$

welche identisch erfüllt sein muss. Ordnen wir wieder den Ausdruck:

$$t^n X_n + t^{n-1} X_{n-1} + \cdots + t X_1 + X_0,$$

so dass er nach Potenzen von x fortschreitet, und setzen wir:

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = U_0$$
$$b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \cdots + b_1 t + b_0 = U_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$k_n t^n + k_{n-1} t^{n-1} + \cdots + k_1 t + k_0 = U_{m-1}$$
$$l_n t^n + l_{n-1} t^{n-1} + \cdots + l_1 t + l_0 = U_m,$$

so verwandelt sich obige Gleichung in:

$$\int e^{tx} T [U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + \cdots + U_{m-1} x^{m-1} + U_m x^m]\, d t = 0.$$

Nun ist die linke Seite die Summe von $m + 1$ Integralen von der Form:

$$\int e^{tx} T U_r x^r dt,$$

und jedes derselben kann partiell integrirt werden so lange, bis die Veränderliche x ausser in der Exponentialgrösse nicht mehr darin vorkommt. Wir erhalten so:

$$\int e^{tx} T U_r x^r dt = \left[e^{tx} \left\{ x^{r-1} T U_r - x^{r-2} \frac{d}{dt}(T U_r) + x^{r-3} \frac{d^2}{dt^2}(T U_r) - \cdots + (-1)^{r-1} \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}(T U_r) \right\} \right] + (-1)^r \int e^{tx} \frac{d^r}{dt^r}(T U_r)\, dt,$$

wobei der Theil ausserhalb des Integrationszeichens zwischen den bisher noch unbestimmten Grenzen des Integrals zu nehmen ist. Bezeichnen wir den Ausdruck

$$x^{r-1} T U_r - x^{r-2} \frac{d}{dt}(T U_r) + \cdots + (-1)^{r-1} \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}(T U_r)$$

mit V_r für alle Werthe von r mit Ausnahme von Null (in welchem Falle keine Integration durch Theile nothwendig ist) und wenden wir die vorstehende Formel auf jedes der bestimmten Integrale auf der linken Seite unserer Gleichung an, so verwandeln wir dadurch die Gleichung in:

$$\left[e^{tx} \sum_{r=1}^{r=m} V_r \right] + \int e^{tx} \left\{ T U_0 - \frac{d}{dt}(T U_1) + \frac{d^2}{dt^2}(T U_2) - \cdots + (-1)^m \frac{d^m}{dt^m}(T U_m) \right\} dt = 0.$$

Dies wird identisch erfüllt sein, wenn die unbekannte Function T so gewählt wird, dass sie der Gleichung

$$T U_0 - \frac{d}{dt}(T U_1) + \frac{d^2}{dt^2}(T U_2) - \cdots + (-1)^m \frac{d^m}{dt^m}(T U_m) = 0$$

für alle Werthe von t zwischen den Grenzen der Integration genügt. Diese Grenzen sind zu bestimmen aus der Gleichung:

$$\left[e^{tx} \sum_{r=1}^{r=m} V_r \right] = 0.$$

Die Gleichung, welche T bestimmt, ist nun linear mit veränderlichen Coefficienten, und sie ist von der $m$ten Ordnung, kann sich aber auch auf eine von niedrigerer Ordnung reduciren; ist die-

selbe gelöst, so kann man eine Lösung der ursprünglichen Gleichung in der Form eines bestimmten Integrals ableiten.

Hieraus folgt der Satz, wie er oben ausgesprochen wurde.

Da die Gleichung, welche T bestimmt, von der $m$ten Ordnung ist, so wird sie m von einander unabhängige particuläre Lösungen haben; dieselben mögen mit $T_1, T_2, \ldots, T_m$ bezeichnet werden. Diesen entsprechend wird es m particuläre Lösungen der ursprünglichen Gleichung geben, und zwar wird man diese erhalten, wenn man für T in

$$\int e^{tx}\, T\, dt$$

diese m Werthe der Reihe nach einsetzt.

§. 141.

Im Falle $m = 2$ wird die Gleichung, welche T bestimmt:

$$T U_0 - \frac{d}{dt}(T U_1) + \frac{d^2}{dt^2}(T U_2) = 0,$$

oder, was dasselbe ist:

$$U_2 \frac{d^2 T}{dt^2} + \left(2 \frac{d U_2}{dt} - U_1\right) \frac{dT}{dt} + \left(\frac{d^2 U_2}{dt^2} - \frac{d U_1}{dt} + U_0\right) T = 0.$$

Folgendes sind einige der speciellen Fälle, in denen diese Gleichung sehr einfach integrirt werden kann.

1) Wenn die Coefficienten a, b, c so beschaffen sind, dass die Gleichung

$$\frac{d^2 U_2}{dt^2} - \frac{d U_1}{dt} + U_0 = 0$$

für alle Werthe von t erfüllt ist. Alsdann ist der Werth von T, wie man leicht zeigt:

$$A \int \frac{dt}{U_2^2}\, e^{\int \frac{U_1}{U_2} dt}$$

2) Multiplicirt man die Gleichung mit U_2, so kann man sie in der Form schreiben:

$$\frac{d}{dt}\left(U_2^2 \frac{dT}{dt}\right) - U_1 U_2 \frac{dT}{dt} - U_2 \left(\frac{d U_1}{dt} - \frac{d^2 U_2}{dt^2} - U_0\right) T = 0,$$

deren linke Seite ein vollständiges Differential ist, wenn

$$\frac{d}{dt}(U_1 U_2) = U_2 \left(\frac{d U_1}{dt} - \frac{d^2 U_2}{dt^2} - U_0\right),$$

d. h. wenn

$$U_2 \frac{d^2 U_2}{d t^2} + U_1 \frac{d U_2}{d t} + U_0 U_2 = 0$$

ist. Wenn also die Werthe von a, b, c so beschaffen sind, dass sie diese Gleichung zu einer Identität machen, so ist der Werth von T gegeben durch

$$U_2^2 \frac{d T}{d t} - U_1 U_2 T = A,$$

und dies führt zu dem Resultat:

$$T e^{-\int \frac{U_1}{U_2} d t} = A \int \frac{d t}{U_2^2} e^{-\int \frac{U_1}{U_2} d t} + B.$$

3) Wenn die Gleichung für T auf ihre Normalform reducirt wird durch die Substitution:

$$T U_2 e^{-\frac{1}{2}\int \frac{U_1}{U_2} d t} = S,$$

so ist die neue Gleichung:

$$\frac{d^2 S}{d t^2} + \mathfrak{T} S = 0,$$

worin

$$\mathfrak{T} = \frac{U_0}{U_2} - \frac{1}{4}\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{d t}\left(\frac{U_1}{U_2}\right)$$

ist.

Ein Integral dieser Gleichung wird sofort erhalten, wenn $\mathfrak{T}$ verschwindet, d. h. wenn

$$U_0 U_2 = \frac{1}{4} U_1^2 + \frac{1}{2} U_2^2 \frac{d}{d t}\left(\frac{U_1}{U_2}\right)$$

ist.

Ferner erhält man unmittelbar integrirbare Fälle, wenn $\mathfrak{T}$ eine Constante oder von der Form $\lambda (e + f t)^{-2}$ oder von der Form $\lambda (e + f t)^{-4}$ ist.

Wie aber auch immer die Relationen zwischen den Constanten in den Functionen U sein mögen, die Lösung der Gleichung, welche T bestimmt, ist in jedem Falle von der Form:

$$T = C_1 T_1 + C_2 T_2,$$

während die Gleichung, welche die Grenzen des bestimmten Integrals ergiebt, lautet:

$$\left[e^{t x}\left\{x U_2 T - \frac{d}{d t}(U_2 T) + U_1 T\right\}\right] = 0.$$

Dieselbe wird befriedigt durch diejenigen Werthe von t, welche den Gleichungen

$$T = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dT}{dt} = 0$$

gemeinschaftlich genügen, wenn es deren überhaupt giebt.

Aufgabe. Man integrire mittelst eines bestimmten Integrals die Gleichung

$$x\frac{d^2 y}{dx^2} - (1 + x^2)\frac{dy}{dx} + \mu\,(1 - \mu x - x^2)\,y = 0,$$

worin μ eine Constante ist.

§. 142.

Eine andere Gruppe von Gleichungen, auf welche die Methode der Lösung durch bestimmte Integrale angewendet werden kann, ist diejenige Gruppe, welche aus der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \lambda x^n y = 0$$

für verschiedene Werthe von n hervorgeht. Um diese zu lösen, nehmen wir an:

$$y = \int e^{-pt}\,P\,dp,$$

worin t eine unbekannte Function von x allein und P eine unbekannte Function von p allein bezeichnet, welche beiden Functionen sowie die Grenzen des Integrals zu bestimmen sind. Differentiirt man den Werth von y zweimal und substituirt dann die Werthe in die Gleichung, so findet man:

$$\int e^{-pt}\left\{p^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - \lambda x^n\right\}P\,dp - \int e^{-pt}\,p\,P\,\frac{d^2 t}{dx^2}\,dp = 0.$$

Man wähle die unbekannte Function t so, dass

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = \lambda x^n$$

ist, und nehme λ positiv und gleich c^2 an, so dass die Differentialgleichung wird:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = c^2 x^n y.$$

Dann ist die Gleichung, welche t bestimmt:

$$\frac{dt}{dx} = c\,x^{\frac{1}{2}n},$$

und daher:

$$t = \frac{c}{\frac{1}{2}n+1} x^{\frac{1}{2}n+1} = \frac{c}{m} x^m,$$

wenn $\frac{1}{2}n + 1$ mit m bezeichnet wird. Hieraus erhält man:

$$\frac{1}{t}\frac{dt}{dx} = \frac{m}{x} \text{ und } \frac{1}{t}\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{m(m-1)}{x^2}.$$

Multiplicirt man die Gleichung, welche die Integrale enthält, mit $\frac{x^2}{mt}$, so geht sie nach einer sehr einfachen Reduction über in:

$$m\int e^{-pt}(p^2-1)\,Pt\,dp - (m-1)\int e^{-pt}\,Pp\,dp = 0.$$

Integrirt man das erste Glied partiell, so wird:

$$-[m\,e^{-pt}(p^2-1)P] + m\int e^{-pt}\frac{d}{dp}\{(p^2-1)P\}\,dp$$
$$-(m-1)\int e^{-pt}\,Pp\,dp = 0.$$

Nun wird diese Gleichung identisch befriedigt werden, wenn wir setzen

$$m\frac{d}{dp}\{(p^2-1)P\} = (m-1)\,Pp$$

für alle Werthe von p innerhalb der Integrationsgrenzen, welche letzteren bestimmt werden durch:

$$[e^{-pt}(p^2-1)P] = 0.$$

Die erste Gleichung dient zur Bestimmung von P als Function von p; sie ist von der ersten Ordnung und linear und ihre Lösung ist:

$$P = A(p^2-1)^{-\frac{m+1}{2m}},$$

wo A eine willkürliche Constante ist, und die Gleichung, welche die Grenzen giebt, wird:

$$\left[e^{-pt}(p^2-1)^{\frac{m-1}{2m}}\right] = 0.$$

Die letztere Gleichung wird befriedigt durch $p = \infty$ und durch $p = \pm 1$, vorausgesetzt, dass der Exponent von $p^2 - 1$ positiv ist; dies erfordert, dass m entweder positiv und grösser als 1 oder negativ sei und daher n nicht liegt zwischen 0 und -2. Nehmen wir an, dass diese Bedingung erfüllt sei, so sind wir im Stande, zwei bestimmte Integrale aufzustellen. Diese sind:

$$\int_{-1}^{+1} e^{-pt} (p^2 - 1)^{-\frac{m+1}{2m}} dp$$

und

$$\int_{1}^{\infty} e^{-pt} (p^2 - 1)^{-\frac{m+1}{2m}} dp.$$

Das erste von diesen ist gleich:

$$\int_{0}^{1} e^{-pt} (p^2 - 1)^{-\frac{m+1}{2m}} dp + \int_{-1}^{0} e^{-pt} (p^2 - 1)^{-\frac{m+1}{2m}} dp$$

$$= \int_{0}^{1} e^{-pt} (p^2 - 1)^{-\frac{m+1}{2m}} dp + \int_{0}^{1} e^{pt} (p^2 - 1)^{-\frac{m+1}{2m}} dp$$

$$= \int_{0}^{1} \left(e^{pt} + e^{-pt}\right) (p^2 - 1)^{-\frac{m+1}{2m}} dp.$$

Daher kann die vollständige Lösung dargestellt werden durch:

$$A' \int_{0}^{1} \left(e^{pt} + e^{-pt}\right) (p^2 - 1)^{-\frac{m+1}{2m}} dp + B \int_{1}^{\infty} e^{-pt} (p^2 - 1)^{-\frac{m+1}{2m}} dp.$$

Substituirt man für t seinen Werth, so erhält man

$$y = A \int_{0}^{1} (1 - p^2)^{-\frac{n+4}{2n+4}} cosh \left(\frac{2cp}{n+2} x^{\frac{1}{2}n+1}\right) dp$$

$$+ B \int_{1}^{\infty} e^{-\frac{2cp}{n+2} x^{\frac{1}{2}n+1}} (p^2 - 1)^{-\frac{n+4}{2n+4}} dp$$

als das vollständige Integral der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = c^2 x^n y$$

für Werthe von n, die nicht zwischen 0 und — 2 liegen.

Aufgabe. Man zeige, dass das vollständige Integral derselben Gleichung, vorausgesetzt, dass n nicht liegt zwischen — 2 und — 4, auch dargestellt wird durch:

$$y = A' x \int_{0}^{1} (1 - p^2)^{-\frac{n}{2n+4}} cosh \left(\frac{2cp}{n+2} x^{\frac{1}{2}n+1}\right) dp$$

$$+ B' x \int_{1}^{\infty} e^{-\frac{2cp}{n+2} x^{\frac{1}{2}n+1}} (p^2 - 1)^{-\frac{n}{2n+4}} dp.$$

(Lobatto.)

Anwendung auf die hypergeometrische Reihe.

§. 143.

Um ein bestimmtes Integral zu erhalten, welches der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe genügen soll, setzen wir:

$$y = \int (1 - v x)^m \, V \, d v,$$

worin V eine unbekannte Function von v allein und m eine Constante ist. Die Form von V, der Werth von m und die Grenzen des Integrals sind zu bestimmen. Aus diesem Werthe von y erhalten wir:

$$\frac{d y}{d x} = - m \int v \, V \, (1 - x v)^{m-1} \, d v$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = m \, (m - 1) \int v^2 \, V \, (1 - x v)^{m-2} \, d v,$$

so dass, wenn diese Werthe in die Gleichung

$$x (1 - x) \frac{d^2 y}{d x^2} + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1) x\} \frac{d y}{d x} - \alpha \beta y = 0$$

substituirt werden, dieselbe übergeht in:

$$\int V (1 - x v)^{m-2} [m (m - 1) v^2 x (1 - x) - m v (1 - x v) \{\gamma - (\alpha + \beta + 1) x\}$$
$$- \alpha \beta (1 - x v)^2] \, d v = 0.$$

Der Coefficient von $x^2 v^2$ innerhalb der Klammern ist vom zweiten Grade in m, welches bis jetzt eine unbestimmte Constante ist; wir wählen m so, dass dieser Coefficient verschwindet, so dass also m gegeben wird durch die Gleichung:

$$- m \, (m - 1) - m \, (\alpha + \beta + 1) - \alpha \beta = 0,$$

oder

$$m^2 + m \, (\alpha + \beta) + \alpha \beta = 0,$$

weshalb m entweder gleich $- \alpha$ oder gleich $- \beta$ gesetzt werden kann. Da die Differentialgleichung sich nicht ändert, wenn man α und β mit einander vertauscht, so kann jede dieser Wurzeln genommen werden. Wir setzen

$$m = - \alpha$$

und finden dann, wenn wir diesen Werth substituiren, dass die Gleichung

$$\int V(1-xv)^{-\alpha-2}\left[\alpha(\alpha+1)v^2x+\alpha v\{\gamma-x(\alpha+\beta+\gamma+1)\}\right.$$
$$\left.-\alpha\beta(1-2vx)\right]dv=0$$

identisch befriedigt werden muss. Ordnet man wieder den Ausdruck innerhalb der Klammern unter dem Integrationszeichen und dividirt man durch α, so verwandelt man die Gleichung in

$$\int V(1-xv)^{-\alpha-2}(\alpha+1)v(v-1)x\,dv$$
$$+\int V(1-xv)^{-\alpha-2}(v\gamma-\beta)(1-vx)\,dv=0.$$

Integrirt man das erste Glied partiell, so erhält man:

$$-Vv(1-v)(1-vx)^{-\alpha-1}+\int(1-vx)^{-\alpha-1}\frac{d}{dv}\{v(1-v)V\}\,dv,$$

und daher geht die Gleichung über in:

$$-[Vv(1-v)(1-vx)^{-\alpha-1}]$$
$$+\int(1-vx)^{-\alpha-1}\left[\frac{d}{dv}\{v(1-v)V\}-(\beta-v\gamma)V\right]dv=0.$$

Diese Gleichung wird nun identisch erfüllt sein, wenn wir als Gleichung zur Bestimmung von V nehmen:

$$\frac{d}{dv}\{v(1-v)V\}=(\beta-v\gamma)V,$$

und als Grenzen des angenommenen Integrals solche Werthe von v setzen, dass

$$[Vv(1-v)(1-vx)^{-\alpha-1}]=0$$

ist.

Um die erste Gleichung zu lösen, haben wir:

$$\frac{d}{dv}\{v(1-v)V\}=v(1-v)V\frac{\beta-v\gamma}{v(1-v)}$$
$$=v(1-v)V\left\{\frac{\beta}{v}-\frac{\gamma-\beta}{1-v}\right\},$$

mithin:

$$v(1-v)V=Av^{\beta}(1-v)^{\gamma-\beta},$$

worin A eine willkürliche Constante ist; und die Gleichung zur Bestimmung der Grenzen ist:

$$[v^{\beta}(1-v)^{\gamma-\beta}(1-vx)^{-\alpha-1}]=0,$$

welche unter der Voraussetzung, dass β positiv und γ grösser als β ist, befriedigt wird durch $v=0$ und $v=1$. Es ergiebt sich daher, dass der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe genügt wird durch

$$y = A \int_0^1 v^{\beta-1} (1-v)^{\gamma-\beta-1} (1-vx)^{-\alpha} \, dv,$$

vorausgesetzt, dass β positiv und γ grösser als β ist.

Es ist leicht zu zeigen, dass, wenn $(1-vx)^{-\alpha}$ entwickelt wird und die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x berechnet sind, die resultirende Reihe ein constantes Vielfaches der hypergeometrischen Reihe ist, wobei dieser constante Factor ist:

$$A \int_0^1 v^{\beta-1} (1-v)^{\gamma-\beta-1} \, dv.$$

§. 144.

Verwandeln wir nun die unabhängige Veränderliche aus x in $1-x_1$, so ist die entsprechende Form der Differentialgleichung:

$$x_1 (1-x_1) \frac{d^2 y}{d x_1^2} + \{\alpha + \beta + 1 - \gamma - (\alpha + \beta + 1) x_1\} \frac{dy}{dx_1} - \alpha \beta y = 0.$$

Eine Lösung dieser Gleichung (und somit der ursprünglichen Gleichung) wird der vorhergehenden Untersuchung zufolge dargestellt durch:

$$y = B \int_0^1 v^{\beta-1} (1-v)^{\alpha-\gamma} (1-x_1 v)^{-\alpha} \, dv,$$

vorausgesetzt, dass β positiv und $\alpha + 1$ grösser als γ ist. Sind diese Bedingungen hinsichtlich der Begrenzung der Parameter erfüllt, so wird die vollständige Lösung der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe gegeben durch die Summe dieser beiden verschiedenen Lösungen.

1. Aufgabe. Man stelle durch ein bestimmtes Integral die vollständige Lösung der Gleichung dar

$$(A + Bx + Cx^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + (D + Ex) \frac{dy}{dx} + Fy = 0.$$

(Siehe 2. Aufgabe, Seite 242.)

2. Aufgabe. Man beweise Folgendes:

(1) Ist β positiv und $\alpha + 1$ grösser als γ, so ist eine Lösung:

$$y = \int_0^{-\infty} u^{\beta-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-xu)^{-\alpha} \, du.$$

(2) Ist γ grösser als β und kleiner als $\alpha + 1$, so ist eine Lösung:

$$y = \int_1^{\infty} u^{\beta-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-xu)^{-\alpha} \, du,$$

(3) Ist γ grösser als β und α kleiner als 1, so ist eine Lösung:

$$y = \int_1^{\frac{1}{x}} u^{\beta-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-xu)^{-\alpha} du.$$

(Jacobi.)

3. Aufgabe. Man bestimme das vollständige Integral der Gleichung

$$(1) \quad 4\,x\,x' \frac{d^2 y}{d x^2} + 4(x'-x) \frac{d y}{d x} - y = 0$$

(worin $x' + x = 1$ ist) in der Form:

$$y = A \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - x \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi + B \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - x' \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi,$$

und dasjenige der Gleichung

$$(2) \quad 4\,x\,x' \frac{d^2 y}{d x^2} = y$$

in der Form:

$$y = x\,x' \left[A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi\, (1 - x \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} d\varphi \right.$$

$$\left. + B \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi\, (1 - x' \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} d\varphi \right],$$

wo x' dasselbe ist, wie vorher.

Man löse ebenso die Gleichungen:

$$(3) \quad 4\,x\,x' \frac{d^2 y}{d x^2} + 4\,x' \frac{d y}{d x} + y = 0.$$

$$(4) \quad 4\,x\,x' \frac{d^2 y}{d x^2} - 4\,x \frac{d y}{d x} + y = 0.$$

$$(5) \quad 4\,x\,x' \frac{d^2 y}{d x^2} \pm 4 \frac{d y}{d x} - y = 0.$$

$$(6) \quad 4\,x\,x' \frac{d^2 y}{d x^2} + 4(x'-x) \frac{d y}{d x} + 3\,y = 0.$$

4. Aufgabe. Man beweise, dass, wenn $n+1$ positiv ist, alsdann

$$x^{-(n+1)} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}n} (1-t)^{\frac{1}{2}(n-1)} \left(1 - \frac{1}{x^2} t\right)^{-\frac{1}{2}(n+1)} dt$$

eine Lösung der Legendre'schen Gleichung darstellt, während für negative n eine Lösung gegeben wird durch:

$$x^n \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}(n+1)} (1-t)^{-\frac{1}{2}(n+2)} \left(1 - \frac{1}{x^2} t\right)^{\frac{1}{2}n} dt.$$

§. 145.

Dieses Capitel enthält nur eine kurze Skizze des Verfahrens, wie man Differentialgleichungen mittelst bestimmter Integrale lösen kann. Der Leser, welcher sich über diesen Theil unseres Gegenstandes weiter zu unterrichten wünscht, kann insbesondere zwei Autoritäten zu Rathe ziehen: Die wichtigste ist Petzval, „Integration der linearen Differentialgleichungen". Die Theile, welche diese Methode behandeln, sind §§. 2 bis 5 von Abschnitt II, §§. 19 bis 22 von Abschnitt III, §§. 10, 11 von Abschnitt V. Die andere Autorität ist Euler, Inst. Calc. Int. Bd. II, Cap. X. Dieses Werk leidet jedoch an dem Uebelstande, dass es zuerst die Form der Lösung annimmt und dann die Differentialgleichung sucht, welcher durch dieselbe genügt wird. Noch zwei andere Abhandlungen kann man mit Nutzen nachlesen, nämlich eine von Lobatto, Crelle's J. Bd. XVII, S. 363 und eine von Jacobi, Crelle's J. Bd. LVI, S. 149.

Eine weitläufigere Discussion über die Lösung linearer Differentialgleichungen mittelst Reihen und bestimmter Integrale wird man nebst zahlreichen Beispielen in einer Reihe von separat veröffentlichten Abhandlungen von Spitzer finden.

Vermischte Aufgaben.

1. Man integrire vollständig die Gleichung:

$$x\frac{d^n y}{d x^n} + a y = 0.$$

2. Man beweise, dass das vollständige Integral der Gleichung

$$x\frac{d^2 y}{d x^2} + a\frac{d y}{d x} + b^2 x y = 0$$

gegeben wird durch

$$y = \int_0^b (b^2 - t^2)^{\frac{1}{2}a-1}(A \sin x t + B \cos x t)\, d t \mp A \int_0^{\mp\infty} (t^2 + b^2)^{\frac{1}{2}a-1} e^{xt}\, dt,$$

wo das obere Zeichen zu nehmen ist, wenn x positiv, das untere, wenn x negativ ist. (Petzval.)

3. Man beweise, dass die Gleichung

$$x\frac{d^3 y}{d x^3} - y = 0$$

ein Integral besitzt, welches dargestellt wird durch:

$$y = B \int_0^\infty \sin\frac{x}{v}\, e^{-\frac{1}{2}v^2}\, v\, d\, v,$$

und dass ein Integral von

$$x\,\frac{d^3 y}{d\,x^3} + y = 0$$

lautet:

$$y = C \int_0^{\mp\infty} e^{\frac{x}{v}-\frac{1}{2}v^2}\, v\, d\, v,$$

wobei das negative oder positive Zeichen zu nehmen ist, je nachdem x positiv oder negativ ist.

Man suche das vollständige Integral jeder Gleichung. (Petzval.)

4. Man bestimme das vollständige Integral der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d\,x^2} + m^2 c^2 x^{2m-2}\, y = 0$$

in der Form:

$$y = A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(c\,x^m \sin\varphi)\cos^{-\frac{1}{m}}\varphi\, d\,\varphi + B\,x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(c\,x^m \sin\varphi)\cos^{\frac{1}{m}}\varphi\, d\,\varphi$$

für Werthe von m, die nicht zwischen -1 und $+1$ liegen.

(Kummer und Lobatto.)

5. Man zeige, dass eine particuläre Lösung von

$$\frac{d^2 y}{d\,x^2} + a^2 y = \frac{n\,(n+1)}{x^2}\, y$$

lautet:

$$y = x^{n+1} \int_{-a}^{+a} (v^2 - a^2)^n \cos x\, v\, d\, v,$$

und eine particuläre Lösung von

$$\frac{d^2 y}{d\,x^2} - a^2 y = \frac{n\,(n+1)}{x^2}\, y$$

dargestellt wird durch:

$$y = x^{n+1} \int_0^\infty (x^2 + v^2)^{-n-1} \cos a\, v\, d\, v.$$

6. Man zeige, dass die Gleichung

$$\frac{d^{n+1} y}{d\,x^{n+1}} = x^m\,\frac{d\,y}{d\,x} + m\,x^{m-1}\, y$$

befriedigt wird durch

$$y = \int_0^\infty z^{m-1} e^{-\frac{z^{m+n}}{m+n}}\, \psi\,(z\,x)\, d\,z,$$

worin $\psi(x)$ bestimmt wird durch

$$\frac{d^{n+1}\psi(x)}{d x^{n+1}} = x^{m-1}\,\psi(x).$$

Hiernach leite man aus der Lösung von

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = y$$

diejenige von

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = x\,y$$

her.

7. Man bestätige, dass

$$y = \int_{x^{1/2}}^{x} e^{-z^{2n} - x^{2n} z^{-2n}}\, d z$$

ein particuläres Integral ist von:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - 4 n^2 x^{2n-2} y = \frac{1}{4} e^{-2x^n} x^{-\frac{3}{2}}.$$

8. Man zeige, dass, wenn die Coefficienten der Differentialgleichung

$$(a_2 + b_2 x)\frac{d^2 y}{d x^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{d y}{d x} + (a_0 + b_0 x)\, y = 0$$

der Bedingung

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = b_2^2$$

genügen, die Lösung sein wird:

$$y = \int e^{ux} V\,\{A + B \log U_1 (a_2 + b_2 x)\}\, d u,$$

worin

$$U_1 = b_2 u^2 + b_1 u + b_0$$

und

$$\log(V U_1) = \int \frac{a_2 u^2 + a_1 u + a_0}{U_1}\, d u$$

ist, während die Grenzen bestimmt werden durch:

$$e^{ux}\, U_1 V = 0. \qquad \text{(Spitzer.)}$$

9. Man beweise, dass Gleichungen von der Form

$$x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} + (A_1 + B_1 x^m)\, x \frac{d y}{d x} + (A_0 + B_0 x^m + C_0 x^{2m})\, y = 0$$

auf die Form in §. 136

$$t\,\varphi\left(\frac{d}{d t}\right) z + \psi\left(\frac{d}{d t}\right) z = 0$$

gebracht werden können durch die Substitutionen $x^m = t$ und $y = t^k z$, und zeige, dass k durch eine quadratische Gleichung bestimmt wird. (Petzval.)

10. Man beweise, dass das particuläre Integral von

$$(\vartheta + a_1)\,(\vartheta + a_2)\,\ldots\,(\vartheta + a_n)\; y = f(x),$$

worin $x \frac{d}{dx}$ mit ϑ bezeichnet ist, lautet:

$$y = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \ldots f(\Theta_1 \Theta_2 \ldots \Theta_n x)\, \Theta_1^{a_1-1} \Theta_2^{a_2-1} \ldots \Theta_n^{a_n-1} d\Theta_1 \, d\Theta_2 \ldots d\Theta_n.$$

11. Man beweise, dass das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\vartheta-\beta-1} v^{\gamma-1} (1-v)^{\varepsilon-\gamma-1} (1-x u v)^{-\alpha} du\, dv,$$

falls $\vartheta > \beta > 0$ und $\varepsilon > \gamma > 0$ ist, eine Lösung der Differentialgleichung ist:

$$(1-x) x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} + \{\vartheta + \varepsilon + 1 - (\alpha + \beta + \gamma + 3) x\} x \frac{d^2 y}{dx^2}$$
$$+ \{\vartheta \varepsilon - x(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha + \beta + \gamma + 1\} \frac{dy}{dx} - \alpha\beta\gamma y = 0.$$

Man gebe in der Form von bestimmten Integralen die vollständige Lösung dieser Gleichung an.

12. Die vollständige Lösung der Gleichung

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 8 \lambda x^3 y = b x$$

lautet:

$$y = A \int_0^\alpha \frac{e^{u x^2} du}{(u^3 + \lambda)^{1/2}} + B \int_0^\beta \frac{e^{u x^2} du}{(u^3 + \lambda)^{1/2}} + C \int_0^\gamma \frac{e^{u x^2} du}{(u^3 + \lambda)^{1/2}} + D \int_{-\infty}^0 \frac{e^{u x^2} du}{(u^3 + \lambda)^{1/2}},$$

worin α, β, γ die Wurzeln der Gleichung

$$u^3 + \lambda = 0$$

und die willkürlichen Constanten durch die einfache Relation verbunden sind:

$$A + B + C - D = -\frac{b}{8} \lambda^{-1/2}.$$

(Petzval.)

13. Man beweise, dass das bestimmte Integral

$$y = \int_0^\infty e^{-x^m - b z^m x^{-m}} dx$$

der Gleichung genügt:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = m^2 b z^{m-2} y.$$

(Poisson.)

14. Man beweise, dass

$$P_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{2}{\pi}(1-x)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{(1 - x\,sin^2\,\vartheta)^{\frac{1}{2}}}$$

ist, wo P die Legendre'sche Function bedeutet. (G. H. Stuart.)

15. Man drücke mittelst bestimmter Integrale die vollständige Lösung der Gleichung aus:

$$x\,\frac{d^2 y}{d x^2} - (1 + c\,x^2)\,\frac{d y}{d x} + a\,y\,(c\,x^2 - a\,x - 1) = 0,$$

worin a und c Constanten sind.

Achtes Capitel.

Gewöhnliche Differentialgleichungen mit mehr als zwei Veränderlichen.

§. 146.

Es hat sich bereits gezeigt, dass in einigen Fällen die Lösung einer Differentialgleichung durch rein algebraische Functionen sich darstellen lässt, obwohl die Integration der separirten Glieder der Gleichung neue transcendente Functionen einführen würde. So kann z. B. die Gleichung

$$\frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}} + \frac{dy}{(1-y^2)^{1/2}} = 0$$

mittelst der transcendenten Functionen *arc sin x*, *arc sin y* integrirt werden; es giebt indessen auch ein Integral von der Form

$$x(1-y^2)^{1/2} + y(1-x^2)^{1/2} = C,$$

welches dem anderen äquivalent ist. Wir werden daher naturgemäss dazu geführt zu untersuchen, ob noch andere Fälle existiren, in denen eine solche algebraische Relation zwischen den Veränderlichen der Integrale von Functionen erhalten werden kann, während die Integrale selbst ohne Einführung neuer Functionen nicht berechnet werden können. Der nächst einfache Fall, welcher ein analoges Beispiel liefert, ist der gewöhnlich unter dem Namen der Euler'schen Gleichung bekannte, bei welchem es sich darum handelt, die algebraische Integralgleichung zwischen x und y zu suchen, welche der Gleichung

$$X^{-1/2}dx + Y^{-1/2}dy = 0$$

entspricht, worin

$$X = a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4$$
$$Y = a + by + cy^2 + ey^3 + fy^4$$

ist.

Um dieselbe zu integriren, setzen wir:

$$p = x + y$$

und

$$\frac{dx}{dt} = \frac{X^{1/2}}{y - x},$$

so dass

$$\frac{dy}{dt} = \frac{Y^{1/2}}{x - y}$$

und somit

$$\frac{dp}{dt} = \frac{Y^{1/2} - X^{1/2}}{x - y}$$

ist.

Eine zweite Differentiation nach t giebt:

$$\frac{d^2p}{dt^2} = \frac{1}{x-y}\left\{\frac{1}{2\,Y^{1/2}}\frac{dY}{dy}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{2\,X^{1/2}}\frac{dX}{dx}\frac{dx}{dt}\right\} - \frac{Y^{1/2} - X^{1/2}}{(x-y)^2}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{(x-y)^2}\left\{\frac{1}{2}\frac{dY}{dy} + \frac{1}{2}\frac{dX}{dx} - \frac{(Y^{1/2} - X^{1/2})(Y^{1/2} + X^{1/2})}{y - x}\right\}$$

$$= \frac{1}{(x-y)^2}\Big\{b + c(x+y) + \frac{3e}{2}(x^2+y^2) + 2f(x^3+y^3)$$

$$- b - c(x+y) - e(x^2+xy+y^2) - f(x^3+x^2y+xy^2+y^3)\Big\},$$

wobei die letzten vier Glieder innerhalb der Parenthese den Werth von $\frac{Y-X}{y-x}$ darstellen. Ordnet man wieder und sammelt die Glieder, so erhält man:

$$\frac{d^2p}{dt^2} = \frac{1}{(x-y)^2}\left\{\frac{1}{2}e(x^2 - 2xy + y^2) + f(x^3 - x^2y - xy^2 + y^3)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}e + f(x+y)$$

$$= \frac{1}{2}e + fp.$$

Multiplicirt man mit $2\frac{dp}{dt}$ und integrirt dann, so entsteht:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = ep + fp^2 + C,$$

oder, wenn man den Werth von $\frac{dp}{dt}$ einsetzt:

$$\frac{(Y^{1/2} - X^{1/2})^2}{(y-x)^2} = C + e(x+y) + f(x+y)^2,$$

eine algebraische Beziehung zwischen x und y, obwohl die einzelnen Integrale zu ihrer Darstellung elliptische Functionen erfordern.

1. Aufgabe. Man beweise, dass ein anderes Integral der Gleichung

$$\frac{dx}{X^{1/2}} + \frac{dy}{Y^{1/2}} = 0$$

lautet:

$$\left(\frac{x^2 Y^{1/2} - y^2 X^{1/2}}{y - x}\right)^2 = C x^2 y^2 + b x y (x + y) + a (x + y)^2,$$

und bestätige den Satz in §. 12 für diesen Fall, indem man zeigt, dass die beiden Integrale nicht unabhängig von einander sind.

2. Aufgabe. Man beweise, dass ein Integral von

$$\frac{dx}{X^{1/2}} = \frac{dy}{Y^{1/2}}$$

dargestellt wird durch:

$$\frac{(Y^{1/2} + X^{1/2})^2}{(y - x)^2} = C + e(x + y) + f(x + y)^2.$$

3. Aufgabe. Man drücke die Beziehung zwischen x und y, welche durch die Gleichung

$$\frac{dx}{(1 - x^4)^{1/2}} + \frac{dy}{(1 - y^4)^{1/2}} = 0$$

gegeben wird, in algebraischer Form aus.

4. Aufgabe. Man zeige, dass die Stammgleichung von

$$\frac{dx}{\{x(1 - x)(1 - \lambda x)\}^{1/2}} + \frac{dy}{\{y(1 - y)(1 - \lambda y)\}^{1/2}} = 0$$

in der Form dargestellt werden kann:

$$\{x(1 - y)(1 - \lambda y)\}^{1/2} + \{y(1 - x)(1 - \lambda x)\}^{1/2} = A(1 - \lambda x y),$$

worin A eine willkürliche Constante ist.

§. 147.

Man kann noch ein anderes Verfahren anwenden, welches von Cauchy angegeben worden und von dem ersten vollständig verschieden ist.

Wir betrachten eine allgemeine Gleichung zweiten Grades zwischen den beiden Veränderlichen von der Form:

$$u = X_0 y^2 + 2 X_1 y + X_2 = Y_0 x^2 + 2 Y_1 x + Y_2 = 0,$$

worin X_0, X_1, X_2, Y_0, Y_1, Y_2 sämmtlich vom zweiten Grade sind und zwar die ersten drei in x und die letzten drei in y. Wenn also

$$X_0 = a_0 x^2 + 2 a_1 x + a_2$$
$$X_1 = b_0 x^2 + 2 b_1 x + b_2$$
$$X_2 = c_0 x^2 + 2 c_1 x + c_2$$

wäre, so würde sein:

$$Y_0 = a_0 y^2 + 2 b_0 y + c_0$$
$$Y_1 = a_1 y^2 + 2 b_1 y + c_1$$
$$Y_2 = a_2 y^2 + 2 b_2 y + c_2.$$

Alsdann ist das Verhältniss $\frac{dy}{dx}$ gegeben durch:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0.$$

Es ist aber:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 (Y_0 x + Y_1)$$
$$= 2 (Y_1^2 - Y_0 Y_2)^{1/2},$$

da $u = Y_0 x^2 + 2 Y_1 x + Y_2 = 0$ ist. Analog ist:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2 (X_0 y + X_1)$$
$$= 2 (X_1^2 - X_0 X_2)^{1/2},$$

und somit:

$$\frac{dx}{(X_1^2 - X_0 X_2)^{1/2}} + \frac{dy}{(Y_1^2 - Y_0 Y_2)^{1/2}} = 0,$$

eine Differentialgleichung, deren Integral $u = 0$ ist.

Da nun Euler's Differentialgleichung symmetrisch ist in Bezug auf x und y, so muss nothwendig ihr Integral $u = 0$ ebenfalls symmetrisch sein in Bezug auf x und y, damit die vorhergehende Untersuchung auf den gegenwärtigen Fall angewendet werden könne. Damit u symmetrisch sein könne, müssen wir haben:

$$b_0 = a_1, \quad c_0 = a_2, \quad c_1 = b_2,$$

und es ist dann $X_1^2 - X_0 X_2$ dieselbe Function von x, wie $Y_1^2 - Y_0 Y_2$ von y.

Um das Integral von

$$\frac{dx}{X^{1/2}} + \frac{dy}{Y^{1/2}} = 0$$

zu erhalten, worin

$$X = a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4$$

und Y die nämliche Function von y ist, müssen wir X und $X_1^2 - X_0 X_2$ identificiren. Die Vergleichung ihrer Coefficienten wird vier Glei-

chungen zur Bestimmung der Coefficienten von u geben; in u kommen aber fünf unabhängige Constanten vor (es waren ursprünglich acht, da irgend eine von ihnen gleich 1 gesetzt werden kann; indessen bestehen zwischen ihnen drei für die Symmetrie nothwendige Gleichungen), und daher wird eine unbestimmt und somit willkürlich bleiben. Diese Gleichungen, welche die Coefficienten geben, sind:

$$\frac{b_0{}^2 - a_0 c_0}{f} = \frac{4 b_1 b_0 - 2(a_1 c_0 + a_0 c_1)}{e}$$

$$= \frac{4 b_1 b_2 - 2(a_1 c_2 + a_2 c_1)}{b}$$

$$= \frac{b_2^2 - a_2 c_2}{a}$$

$$= \frac{4(b_1^2 - a_1 c_1) - (a_2 c_0 + a_0 c_2 - 2 b_0 b_2)}{c}.$$

Werden die Werthe der so bestimmten Coefficienten in u substituirt, so enthält die Gleichung $u = 0$ eine willkürliche Constante und ist somit das vollständige Integral.

1. Aufgabe. Man beweise, dass die Stammgleichung von

$$\frac{dx}{(Ax^2 + 2Bx + C)^{1/2}} + \frac{dy}{(Ay^2 + 2By + C)^{1/2}} = 0$$

lautet:

$$a_0(x^2 + y^2) + 2 b_0 xy + 2 b_1(x + y) + c_2 = 0,$$

wobei:

$$\frac{b_0^2 - a_0^2}{A} = \frac{b_1 b_0 - a_0 b_1}{B} = \frac{b_1^2 - a_0 c_2}{C}.$$

2. Aufgabe. Man bestätige, dass die Stammgleichung von

$$\frac{dx}{(1 + a_2 x^2 + a_0 x^4)^{1/2}} + \frac{dy}{(1 + a_2 y^2 + a_0 y^4)^{1/2}} = 0$$

lautet:

$$A_2(x^2 + y^2) + 2 A_3 xy = 1 + a_0 x^2 y^2,$$

wobei

$$A_3^2 - a_0 = A_2^2 + a_2 A_2. \qquad \text{(Cauchy.)}$$

Capitel XIV von Cayley's „Elliptic Functions" kann mit Nutzen nachgelesen werden.

§. 148.

Wenn wir anstatt einer einzigen Gleichung zwischen zwei Veränderlichen, für welche die zwischen ihnen bestehende Relation in einer algebraischen Form ausdrückbar ist, ein System

von $n-1$ Gleichungen zwischen n Veränderlichen haben, so können wir, ohne jeden einzelnen integrirbaren Ausdruck zu integriren, die Abhängigkeit zwischen den n Veränderlichen in endlicher Form durch eine **algebraische** Gleichung darstellen; und da diese Gleichung durch eine Integration erhalten wird, so muss sie eine willkürliche Constante enthalten. Das Verfahren, dessen man sich in dem allgemeinen Falle bedient, um diese Gleichung abzuleiten, ist, wie man sehen wird, wesentlich verschieden von dem, welches wir im besonderen Falle $n = 2$ angewandt haben.

Die Differentialgleichungen mögen sein:

$$\frac{dx_1}{X_1^{1/2}} + \frac{dx_2}{X_2^{1/2}} + \cdots\cdots + \frac{dx_n}{X_n^{1/2}} = 0$$

$$\frac{x_1\,dx_1}{X_1^{1/2}} + \frac{x_2\,dx_2}{X_2^{1/2}} + \cdots\cdots + \frac{x_n\,dx_n}{X_n^{1/2}} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x_1^{n-2}\,dx_1}{X_1^{1/2}} + \frac{x_2^{n-2}\,dx_2}{X_2^{1/2}} + \cdots\cdots + \frac{x_n^{n-2}\,dx_n}{X_n^{1/2}} = 0,$$

worin

$$X_\mu = A_0 + A_1 x_\mu + A_2 x_\mu^2 + \cdots + A_{2n-1} x_\mu^{2n-1} + A_{2n} x_\mu^{2n}$$

für alle Werthe des Stellenzeigers μ in unserem System ist. Ferner sei:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

und es bezeichne $f'(x_\mu)$ den Werth von $\frac{df(x)}{dx}$, wenn man darin, nachdem die angedeutete Differentiation ausgeführt ist, x_μ für x substituirt. Der Werth von $f'(x_\mu)$ wird daher sein:

$$(x_\mu - x_1)(x_\mu - x_2)\ldots(x_\mu - x_n),$$

worin nur der verschwindende Factor $x_\mu - x_\mu$ fehlt. Löst man nun das obige System von Gleichungen auf, um die algebraischen Verhältnisse der Grössen dx_1, dx_2, ..., dx_n zu erhalten, so findet man:

$$\frac{f'(x_1)\,dx_1}{X_1^{1/2}} = \frac{f'(x_2)\,dx_2}{X_2^{1/2}} = \cdots = \frac{f'(x_n)\,dx_n}{X_n^{1/2}}.$$

Der gemeinsame Werth dieser gleichen Brüche möge mit dt bezeichnet sein, so dass wir erhalten:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{X_1^{1/2}}{f'(x_1)},\quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{X_2^{1/2}}{f'(x_2)},\quad \text{u. s. w.}$$

Die erste von diesen Gleichungen giebt:

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = \frac{X_1}{\{f'(x_1)\}^2},$$

und daher, wenn wir sie nach t differentiiren:

$$2\frac{dx_1}{dt}\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{X_1}{\{f'(x_1)\}^2}\right]\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{X_1}{\{f'(x_1)\}^2}\right]\frac{dx_2}{dt} + \cdots$$

Nun ist:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{X_1}{\{f'(x_1)\}^2}\right] = -\frac{2X_1}{\{f'(x_1)\}^3}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\{f'(x_1)\}.$$

Da aber:

$$f'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n),$$

so haben wir:

$$\frac{1}{f'(x_1)}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\{f'(x_1)\} = -\frac{1}{x_1 - x_\mu},$$

und daher:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{X_1}{\{f'(x_1)\}^2}\right] = \frac{2X_1}{\{f'(x_1)\}^2}\frac{1}{x_1 - x_\mu},$$

vorausgesetzt, dass μ nicht gleich 1 ist. Setzen wir dies ein und dividiren durch den Coefficienten von $\frac{d^2x_1}{dt^2}$ auf der linken Seite, so geht die Gleichung über in:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{X_1}{\{f'(x_1)\}^2}\right] + \frac{X_1^{1/2}X_2^{1/2}}{f'(x_1)f'(x_2)}\frac{1}{x_1 - x_2}$$
$$+ \frac{X_1^{1/2}X_3^{1/2}}{f'(x_1)f'(x_3)}\frac{1}{x_1 - x_3} + \cdots + \frac{X_1^{1/2}X_n^{1/2}}{f'(x_1)f'(x_n)}\frac{1}{x_1 - x_n}.$$

Analog:

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{X_2}{\{f'(x_2)\}^2}\right] + \frac{X_2^{1/2}X_1^{1/2}}{f'(x_2)f'(x_1)}\frac{1}{x_2 - x_1}$$
$$+ \frac{X_2^{1/2}X_3^{1/2}}{f'(x_2)f'(x_3)}\frac{1}{x_2 - x_3} + \cdots + \frac{X_2^{1/2}X_n^{1/2}}{f'(x_2)f'(x_n)}\frac{1}{x_2 - x_n};$$

und ebenso für die anderen, was im Ganzen n Gleichungen giebt. Addirt man nun sämmtliche n linken Seiten dieser Gleichungen, so wird die Summe gleich sein der Summe der n rechten Seiten. In der letzteren kommt, wie man sieht, zu je einem Gliede $\frac{X_r^{1/2}X_s^{1/2}}{f'(x_r)f'(x_s)}\frac{1}{x_r - x_s}$ des

$r$ten Ausdrucks ein Glied $\frac{X_s^{1/2} X_r^{1/2}}{f'(x_s) f'(x_r)} \frac{1}{x_s - x_r}$ aus dem $s$ten Ausdruck vor, und daher ist die Summe dieser beiden gleich Null. Es werden daher sämmtliche Glieder, welche diese Brüche $\frac{1}{x_r - x_s}$ enthalten, für alle Werthe von s und r sich aufheben, und wir erhalten somit:

$$2 \frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{X_1}{\{f'(x_1)\}^2}\right] + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{X_2}{\{f'(x_2)\}^2}\right] + \cdots\cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left[\frac{X_n}{\{f'(x_n)\}^2}\right].$$

Wir werden im Folgenden $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ mit p bezeichnen, so dass die linke Seite $2 \frac{d^2 p}{dt^2}$ ist.

§. 149.

Wir können noch einen anderen Werth für den Ausdruck auf der rechten Seite finden. Es möge X dieselbe Function von x wie X_1 von x_1 bezeichnen, und es möge

$$\frac{X}{\{f(x)\}^2}$$

in Partialbrüche zerlegt werden. Da X und $\{f(x)\}^2$ beide vom Grade $2n$ sind, so wird ein von x unabhängiges Glied auftreten, welches gleich A_{2n} sein wird, und daher können wir schreiben:

$$\frac{X}{\{f(x)\}^2} = A_{2n} + \frac{B_1}{x - x_1} + \frac{B_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{B_n}{x - x_n}$$
$$+ \frac{C_1}{(x - x_1)^2} + \frac{C_2}{(x - x_2)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(x - x_n)^2}.$$

Multipliciren wir mit $(x - x_1)^2$, so erhalten wir:

$$\frac{X_1 (x - x_1)^2}{\{f(x)\}^2} = C_1 + B_1 (x - x_1) + \text{Gliedern, multiplicirt mit } (x - x_1)^2,$$

oder, wenn wir den Zähler und Nenner der linken Seite durch die gemeinsamen Factoren dividiren, so erhalten wir:

$$C_1 + B_1 (x - x_1) + \text{Gliedern, multiplicirt mit } (x - x_1)^2$$
$$= \frac{X}{(x - x_2)^2 (x - x_3)^2 \ldots (x - x_n)^2}.$$

Setzen wir nun x gleich x_1, so geht die linke Seite über in C_1 und die rechte wird $\frac{X_1}{\{f'(x_1)\}^2}$, daher:

$$C_1 = \frac{X_1}{\{f'(x_1)\}^2}.$$

Die rechte Seite der Gleichung in der zuletzt hingeschriebenen Form enthält nicht x_1, und daher ist ihr partieller Differentialquotient nach x_1 gleich Null. Da die beiden Seiten der Gleichung identisch gleich sind, so muss Null der Werth des partiellen Differentialquotienten der linken Seite nach x_1 sein, und daher haben wir:

$$\frac{\partial C_1}{\partial x_1} - B_1 + (x - x_1)\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \text{Gliedern mit } (x - x_1) = 0.$$

Dies ist richtig für alle Werthe von x und somit:

$$B_1 = \frac{\partial C_1}{\partial x_1}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{X_1}{\{f'(x_1)\}^2}\right];$$

analog:

$$B_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{X_2}{\{f'(x_2)\}^2}\right],$$

und entsprechende Ausdrücke für die anderen Grössen B. Mithin:

$$2\frac{d^2 p}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{X_1}{\{f'(x_1)\}^2}\right] + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{X_2}{\{f'(x_2)\}^2}\right] + \cdots$$

$$= B_1 + B_2 + \cdots + B_n.$$

Die Gleichung, welche die Zerlegung des betrachteten Ausdrucks in Partialbrüche darstellt, möge mit $\{f(x)\}^2$ multiplicirt werden und die Coefficienten von x^{2n-1} auf beiden Seiten von

$$X = A_{2n}\{f(x)\}^2 + \sum_{\mu=1}^{\mu=n}\frac{B_\mu}{x - x_\mu}\{f(x)\}^2 + \sum_{\mu=1}^{\mu=n}\frac{C_\mu}{(x - x_\mu)^2}\{f(x)\}^2$$

mögen einander gleichgesetzt werden. Von den Gliedern, welche die Grössen C enthalten, kann keins Glieder von so hohem Grade liefern, da jedes von ihnen mit x^{2n-2} beginnt; jedes der Glieder, welche die Grössen B enthalten, beginnt mit x^{2n-1} und somit ist der ganze Coefficient aus dieser Reihe von Gliedern:

$$B_1 + B_2 + \cdots + B_n.$$

Da

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$
$$= x^n - x^{n-1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + \text{niedrigeren Potenzen von } x$$
$$= x^n - p\,x^{n-1} + \text{niedrigeren Potenzen von } x$$

ist, so ist der Coefficient von x^{2n-1} in $A_{2n}\{f(x)\}^2$ gleich $-2A_{2n}p$. Derjenige der linken Seite ist A_{2n-1}, und somit:

$$A_{2n-1} = -2A_{2n}p + B_1 + B_2 + \cdots + B_n$$
$$= -2A_{2n}p + 2\frac{d^2p}{dt^2}.$$

Multiplicirt man mit $\frac{dp}{dt}$ und integrirt man, so kommt:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = A_{2n}p^2 + A_{2n-1}\,p + E,$$

wo E eine willkürliche Constante ist. Nun war aber:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{dx_n}{dt}$$
$$= \frac{X_1^{1/2}}{f'(x_1)} + \frac{X_2^{1/2}}{f'(x_2)} + \cdots + \frac{X_n^{1/2}}{f'(x_n)},$$

mithin wird das Integral:

$$\left\{\frac{X_1^{1/2}}{f'(x_1)} + \frac{X_2^{1/2}}{f'(x_2)} + \cdots + \frac{X_n^{1/2}}{f'(x_n)}\right\}^2 = E + A_{2n-1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$
$$+ A_{2n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2.$$

1. Aufgabe. Man beweise, dass ein Integral der Gleichungen

$$\frac{dx}{X^{1/2}} + \frac{dy}{Y^{1/2}} + \frac{dz}{Z^{1/2}} = 0$$
$$\frac{x\,dx}{X^{1/2}} + \frac{y\,dy}{Y^{1/2}} + \frac{z\,dz}{Z^{1/2}} = 0,$$

worin

$$X = a + bx + cx^2 + \theta x^3 + \gamma x^4 + \beta x^5 + \alpha x^6$$

ist und Y und Z analoge Functionen von y und z sind, lautet:

$$\left\{\frac{(y-z)X^{1/2} + (z-x)\,Y^{1/2} + (x-y)\,Z^{1/2}}{(x-y)(y-z)(z-x)}\right\}^2 = \alpha(x+y+z)^2 + \beta(x+y+z) + C,$$

wo C eine willkürliche Constante ist. (Richelot.)

2. Aufgabe. Man leite ein zweites Integral dieser Gleichungen in der Form ab:

$$\left\{\frac{y^2z^2(y-z)X^{1/2} + z^2x^2(z-x)\,Y^{1/2} + x^2y^2(x-y)\,Z^{1/2}}{(x-y)(y-z)(z-x)}\right\}^2$$
$$= C'x^2y^2z^2 + b\,xyz\,(xy + yz + zx) + a\,(xy + yz + zx)^2.$$ (Richelot.)

Die Theorie dieser und verwandter Gleichungen kann hier nicht über die Grenzen ihrer gegenwärtigen Entwickelung hinaus fortgeführt werden, da sie bald aufhört, ausschliesslich dem Gebiet der Differentialgleichungen anzugehören und in die allgemeine Theorie der transcendenten Functionen übertritt. Der Leser, welcher nach einer weiteren Entwickelung dieser Art von Differentialgleichungen verlangt, als hier gegeben werden kann, wird eine sehr werthvolle Abhandlung von Richelot in Crelle's Journ. Bd. XXIII, S. 354 bis 369 finden und würde gut thun, die folgenden Abhandlungen von Jacobi zu Rathe zu ziehen:

Crelle's Journ. Bd. IX, S. 394 bis 403,
" " Bd. XIII, S. 55 bis 78,
" " Bd. XXIV, S. 28 bis 35,
" " Bd. XXXII, S. 220 bis 226,

die sämmtlich auch im zweiten Bande seiner gesammelten Werke enthalten sind.

Für die höheren Theile, besonders soweit sie mit der Theorie der transcendenten Functionen zusammenhängen, würden die Abhandlungen von Abel nachzulesen sein.

Totale Differentialgleichungen.

§. 150.

Die Differentialgleichungen, mit denen wir uns bisher beschäftigt haben, sind mit Ausnahme derer in §§. 148 und 149 von solcher Beschaffenheit gewesen, dass sie nur eine abhängige und eine unabhängige Veränderliche enthielten; von nun an werden wir diejenigen betrachten, welche **mehr als zwei** Veränderliche enthalten. Dieselben können in zwei Classen eingetheilt werden, in deren einer **nur eine abhängige** Veränderliche vorkommt, in deren anderer **nur eine unabhängige** Veränderliche auftritt. In den Gleichungen der ersten Classe werden wir die partiellen Differentialquotienten der einzigen abhängigen Veränderlichen nach den unabhängigen Veränderlichen haben; diese werden partielle Differentialgleichungen genannt und sollen später behandelt werden. In Gleichungen der letzten Classe werden wir die Differentialquotienten der verschiedenen abhängigen Veränderlichen nach der einzigen

unabhängigen Veränderlichen (welche explicit oder implicit darin vorkommen kann) haben; diese werden gewöhnlich **totale** Differentialgleichungen genannt.

Wenn wir nun eine Integralgleichung

$$\varphi(x, y, z) = C$$

haben, in welcher C eine Constante ist, so können wir annehmen, dass x, y, z kleine Aenderungen dx, dy, dz erfahren, die, wie bekannt, verbunden sind durch die Gleichung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0,$$

oder, wenn wir annehmen, dass x, y, z Functionen irgend einer Veränderlichen t sind, so ist:

$$dx = \frac{dx}{dt} dt, \quad dy = \frac{dy}{dt} dt, \quad dz = \frac{dz}{dt} dt,$$

und die vorstehende Gleichung geht über in:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0.$$

Diese beiden Formen sind äquivalent; die gewöhnlich angewandte Form ist die erste; ist in irgend einem Falle die zweite gegeben, so kann sie ohne Weiteres in die erste umgewandelt werden. Wenn ferner $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ einen gemeinschaftlichen Factor haben, so kann man die Gleichung durch Weglassung dieses gemeinschaftlichen Factors vereinfachen, und daher können wir annehmen, dass die allgemeine Form einer solchen Gleichung in drei Veränderlichen dargestellt sei durch

$$P dx + Q dy + R dz = 0,$$

worin P, Q, R gegebene Functionen von x, y, z und proportional den Differentialquotienten von φ sind.

§. 151.

Ist aber umgekehrt irgend eine Gleichung von der Form

$$P dx + Q dy + R dz = 0$$

gegeben, so führt dieselbe nicht nothwendig zu einer Gleichung von der Form:

$$\varphi(x, y, z) = C;$$

denn die Existenz einer solchen Gleichung erfordert, dass die drei Grössen P, Q, R proportional den Differentialquotienten irgend einer Function sind, und dies ist nicht der Fall, da P, Q, R vollständig allgemein sind. Wir müssen daher untersuchen, unter welchen Bedingungen eine solche Differentialgleichung zu einem Integral von der gegebenen Form führen wird, und unter der Annahme, dass ein solches Integral möglich ist, eine Methode angeben, wie man es finden kann.

Es wird dann die fernere Aufgabe übrig bleiben, eine Lösung der Gleichung zu finden in dem Falle, wo die zur Existenz eines solchen Integrals, wie das obige, nothwendigen Bedingungen nicht erfüllt sind.

§. 152.

Zunächst also nehmen wir an, dass ein solches Integral existirt; es müssen daher P, Q, R respective proportional den partiellen Differentialquotienten irgend einer Function φ nach x, y, z sein, so dass wir setzen können:

$$\mu P = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mu R = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

wobei μ irgend eine Function ist, deren Werth unbekannt ist. Aus den ersten beiden von diesen Gleichungen erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q),$$

oder:

$$\mu \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial \mu}{\partial x},$$

d. i.:

$$\mu \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y}.$$

Analog:

$$\mu \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) = R \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial z}$$

und:

$$\mu \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) = P \frac{\partial \mu}{\partial z} - R \frac{\partial \mu}{\partial x}.$$

Multipliciren wir die letzten drei Gleichungen bezüglich mit R, P, Q und addiren dann, so erhalten wir:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0,$$

welches die die Relation zwischen P, Q, R darstellende Gleichung ist. Ist dieselbe identisch erfüllt, so zeigt sie an, dass die vorgelegte Differentialgleichung zu einem Integral von der betrachteten Form führt.

§. 153.

Wir werden nunmehr voraussetzen, dass diese Relation besteht und dass somit die Differentialgleichung eine Stammgleichung von der Form

$$\varphi(x, y, z) = C$$

besitzt; wir haben zu zeigen, wie man diese Stammgleichung herleiten kann.

Wenn wir diese Stammgleichung hätten und die entsprechende Differentialgleichung bilden wollten unter der Einschränkung, dass z sich nicht ändern solle, so würde die Gleichung sein:

$$P dx + Q dy = 0,$$

eine Gleichung, auf welche kein Glied in der Stammgleichung, das nur z allein enthält, einen Einfluss hat.

Umgekehrt also, wenn wir

$$P dx + Q dy = 0$$

unter der Annahme integriren, dass z sich nicht ändert, so ist die willkürliche Integrationsconstante eine Grösse, welche unabhängig ist von den Aenderungen von x und y und daher eine willkürliche Function von z sein kann. Wir ersetzen die willkürliche Constante durch eine willkürliche Function von z und erhalten so eine Relation zwischen x, y und z. Diese wird jedoch nicht nothwendig das gesuchte Integral sein, da sie die Gleichung

$$P dx + Q dy + R dz = 0$$

nicht zu befriedigen braucht; wir wissen nur, dass sie der besonderen Form derselben in dem Falle, wo z sich nicht ändert, genügt. Es ist daher wünschenswerth, die Differentialgleichung zu bilden, welche dem Integral in der Form entspricht, in welcher es jetzt auftritt. Die gegebene Differentialgleichung soll gelten, dann wird eine Ver-

gleichung der beiden Formen durch die Bedingung, dass sie identisch sein müssen, zu einer Gleichung führen, welche den Werth der willkürlichen Function von z bestimmen wird. Diese letzte Gleichung wird ebenfalls eine Differentialgleichung sein; ist dieselbe integrirt, so wird die so bestimmte Function von z eine willkürliche Constante enthalten und durch Substitution die Stammgleichung liefern. Wir erhalten daher die **Regel:**

Die Differentialgleichung sei

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

und man nehme an, dass die Relation

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

erfüllt sei. Man integrire dann die Gleichung

$$P\,dx + Q\,dy = 0,$$

als ob z unveränderlich wäre*), und setze die willkürliche Integrationsconstante gleich $\varphi(z)$. Substituirt man nun dies in die ursprüngliche Gleichung und wählt $\varphi(z)$ so, dass der Coefficient von dz gleich R ist, so ist damit die Stammgleichung gefunden.

1. Aufgabe. Man integrire die Gleichung:

$$(y\,dx + x\,dy)(a - z) + xy\,dz = 0.$$

Hierin ist:

$$P = y(a - z), \quad Q = x(a - z), \quad R = xy,$$

und die Bedingungsgleichung ist erfüllt.

Unter der Annahme, dass z unveränderlich ist, verschwindet das Glied $xy\,dz$ und alsdann fällt $a - z$ durch Division weg, so dass die Gleichung wird:

$$y\,dx + x\,dy = 0,$$

und diese giebt integrirt:

$$xy = A = \varphi(z)$$

unserer Regel gemäss. Differentiiren wir dies, so erhalten wir:

$$y\,dx + x\,dy - \frac{d\varphi}{dz}\,dz = 0.$$

*) Wenn es zweckmässiger wäre, könnte man auch jede der anderen Veränderlichen für den Augenblick als constant betrachten und die entsprechenden Aenderungen vornehmen. Anm. d. Verf.

Damit die beiden Gleichungen dieselben sein können, müssen wir haben:

$$-\frac{d\varphi}{dz} = \frac{xy}{a-z} = \frac{\varphi}{a-z},$$

daher:

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{1}{a-z} = \frac{1}{z-a},$$

und somit:

$$\varphi(z) = C(z-a),$$

wo C eine Constante ist, und die Stammgleichung wird:

$$xy = C(z-a).$$

2. Aufgabe. Man bestätige, dass bei jeder der folgenden Gleichungen die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, und bestimme die Stammgleichung:

(1) $(y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz = 0.$

(2) $zy\,dx = zx\,dy + y^2\,dz.$

(3) $(y+a)^2\,dx + z\,dy - (y+a)\,dz = 0.$

(4) $(x-a)\,dx + (z-c)\,dz + \{h^2 - (x-a)^2 - (z-c)^2\}^{1/2}\,dy = 0.$

(5) $(2y^2 + 4az^2x^2)\,x\,dx + \{3y + 2x^2 + (y^2+z^2)^{-1/2}\}\,y\,dy$
$+ \{4z^2 + 2ax^2 + (y^2+z^2)^{-1/2}\}\,z\,dz = 0.$

(6) $(y^2 + yz)\,dx + (zx + z^2)\,dy + (y^2 - xy)\,dz = 0.$

(7) $(x^2y - y^3 - y^2z)\,dx + (xy^2 - x^3 - x^2z)\,dy + (xy^2 + x^2y)\,dz = 0.$

(8) $(2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)\,dx + dy + 2z\,dz = 0.$

(9) $(2x + y^2 + 2xz)\,dx + 2xy\,dy + x^2\,dz = du.$

§. 154.

Die vorhergehende Lösung war erhalten worden unter der Annahme, dass die Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten der Differentiale dx, dy, dz befriedigt sei. Es bleibt nunmehr die Classe von Gleichungen zu betrachten übrig, bei denen diese Gleichung nicht erfüllt ist und bei denen es daher nicht ein einziges allgemeines Integral geben kann.

Nehmen wir nun irgend eine willkürliche Relation zwischen x, y, z von der Form an:

$$\psi(x, y, z) = 0$$

und differentiiren sie, so erhalten wir:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}\,dz = 0.$$

Wenn die Form ψ bestimmt angegeben ist, so werden diese beiden Gleichungen z und dz vermittelst x, y, dx und dy bestimmen (oder allgemein die eine der Veränderlichen und ihr Differential durch die anderen beiden Veränderlichen und deren Differentiale), und wenn diese in die Gleichung

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

substituirt werden, so wird dadurch dieselbe die Form erhalten:

$$M\,dx + N\,dy = 0,$$

worin M und N Functionen von x und y sind, deren Werthe von der Form der gewählten Function ψ abhängen. Diese Gleichung kann aber integrirt werden, und das Integral derselben, welches eine willkürliche Constante enthält, wird zusammen mit der Relation

$$\psi\,(x, y, z) = 0$$

eine Lösung der Differentialgleichung bilden.

Denn es ist aus der Art, wie das Integral abgeleitet worden ist, klar, dass es in Verbindung mit $\psi = 0$ Beziehungen zwischen x, y, z von solcher Beschaffenheit liefert, dass die Differentialgleichung befriedigt ist.

Indem man ψ alle möglichen Formen giebt, wird man jede mögliche Lösung erhalten. Jede Lösung wird durch zwei Gleichungen gebildet.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$dz = ay\,dx + b\,dy.$$

Die Bedingungsgleichung ist nicht erfüllt; es muss daher irgend eine Relation zwischen x, y, z angenommen werden und zwar kann dieselbe vollständig beliebig sein. Ist dieselbe

$$y = f(x),$$

so giebt sie verbunden mit der Differentialgleichung:

$$dz = af(x)\,dx + bf'(x)\,dx.$$

Das Integral hiervon ist:

$$z = a\int f(x)\,dx + bf(x) + C.$$

Dies bildet zusammen mit $f(x) = y$ die Lösung der gegebenen Gleichung.

2. Aufgabe. Man bestimme die allgemeinste Lösung der Gleichung:

$$x\,dx + y\,dy + c\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2} dz = 0,$$

welche zusammen mit der Relation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

besteht.

3. Aufgabe. Man suche die Gleichung, welche mit $x^2 + y^2 = \varphi(z)$ verbunden werden muss, damit man ein Integral von

$$\{x(x-a) + y(y-b)\}\,dz = (z-c)\,(x\,dx + y\,dy)$$

erhalte, sowie diejenige, welche man mit

$$y + z \log x + \varphi(z) = 0$$

verbinden muss, wenn man dadurch der Gleichung

$$z\,dx + x\,dy + y\,dz = 0$$

genügen will.

* 4. Aufgabe. Man beweise, dass, wenn μ eine Grösse von der Art ist, dass

$$\mu(P\,dx + Q\,dy) = dV$$

wird, alsdann die Lösung der Gleichung dargestellt werden kann durch

$$V = \varphi(z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \mu R = \varphi'(z).$$

Dies ist die Monge'sche Form.

5. Aufgabe. Man suche die allgemeinen Gleichungen, welche die Lösung von

$$y\,dx = (x-z)\,(dy - dz)$$

bilden.

§. 155.

Es ist nicht auf den ersten Blick ersichtlich, welchen Einfluss die Bedingungsgleichung auf das vorige Verfahren hat, und im Besonderen, warum das, was im letzten Falle als die Lösung gegeben wurde, nicht auch die Lösung in dem ersten Falle ist. Die Beziehung zwischen beiden kann jedoch aus dem Folgenden ersehen werden.

Die Elimination des Differentialelements dz aus den beiden Gleichungen, in denen es vorkommt, führt zu der Gleichung:

$$\left(R\frac{\partial \psi}{\partial x} - P\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)dx + \left(R\frac{\partial \psi}{\partial y} - Q\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)dy = 0,$$

und damit diese auf die Form

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

gebracht werden könne, muss man die Veränderliche z, die in ihr vorkommt, durch ihren aus der Gleichung $\psi(x, y, z) = 0$ abgeleiteten Werth ersetzen. Man nehme nun die Bedingungsgleichung

als befriedigt an, so dass P, Q, R den Differentialquotienten irgend einer Function nach x, y, z proportional sind. Ist diese Function $\psi(x, y, z)$, so haben wir:

$$(A) \quad \frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{Q}\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{P}\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

und die Gleichung, welche dx und dy enthält, ist identisch befriedigt. Es braucht daher unter dieser Annahme mit der Gleichung $\psi = 0$ oder, was in diesem Falle gleichbedeutend ist, mit der Gleichung $\psi = C$ keine andere Gleichung verbunden zu werden, vielmehr ist sie an und für sich ausreichend zur Lösung der Differentialgleichung, und jede andere Gleichung, welche mit $\psi = C$ verbunden wird (z. B. $\chi = 0$), kann vollständig willkürlich sein, da ihr Ausdruck nicht in die Differentialgleichung eingeht, wenn dieselbe aus diesen Integralgleichungen gebildet ist. Wenn aber auch die zuerst hingeschriebene Gleichung nicht diejenige ist, welche zu der speciellen Eigenschaft (A) führt, sondern eine andere, etwa $\chi = 0$, so wird man doch stets diejenige Gleichung $\psi = C$ herleiten können, in deren Ausdruck die Form von χ nicht auftritt, und wir können daher als die allgemeine Lösung der Differentialgleichung die Gleichung

$$\psi = C$$

betrachten, während wir, wenn wir y und z einzeln als Functionen von x bestimmen wollen, mit dieser irgend eine willkürliche Function von x, y, z verbinden.

Wenn indessen die Bedingungsgleichung zwischen den Grössen P, Q, R nicht erfüllt ist, so giebt es keine Function ψ von der Beschaffenheit, dass die Relationen (A) gelten; und somit ist

$$M dx + N dy = 0$$

keine Identität, sondern sie führt zu einem Integral, dessen Form abhängt von der Form der zuerst hingeschriebenen willkürlichen Gleichung und das mit dieser Gleichung verbunden werden muss, wenn man das Integral bilden will.

Es ist daher ersichtlich, dass der Unterschied zwischen den beiden Fällen der folgende ist: Während wir annehmen können, dass in beiden Fällen zwei Gleichungen erforderlich sind, um die vollständige Lösung darzustellen, ist in dem Falle, wo die Bedingungsgleichung erfüllt ist, die eine von diesen Integralgleichungen (genannt $\psi = C$) in ihrer Form vollständig unabhängig von der anderen (genannt $\chi = 0$); in dem Falle dagegen, wo diese Bedingungsgleichung nicht erfüllt ist, ist die eine von diesen Integralgleichungen in ihrer Form abhängig von der anderen.

§. 156.

Nachdem wir nun den Unterschied zwischen den Resultaten in beiden Classen klargelegt haben, können wir uns einer Integrationsmethode bedienen, welche den Punkt, an dem sich die auf diese beiden Classen angewandten Methoden trennen, deutlich erkennen lässt. Ist

$$\chi(x, y, z) = 0$$

irgend eine Beziehung zwischen x, y und z, so ist:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy + \frac{\partial \chi}{\partial z} dz = 0.$$

Ferner haben wir:

$$P dx + Q dy + R dz = 0.$$

Die erste Gleichung werde mit λ (eine später zu bestimmende Grösse) multiplicirt und zu der letzten addirt, so dass

$$\left(P + \lambda \frac{\partial \chi}{\partial x}\right) dx + \left(Q + \lambda \frac{\partial \chi}{\partial y}\right) dy + \left(R + \lambda \frac{\partial \chi}{\partial z}\right) dz = 0$$

oder etwa

$$P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz = 0$$

ist.

Man wähle λ so, dass P_1, Q_1, R_1 respective proportional den Differentialquotienten einer gewissen Function ψ nach x, y, z werden; dann ist das Integral der letzten Gleichung:

$$\psi(x, y, z) = C,$$

wo C willkürlich ist, und die vollständige Lösung der Differentialgleichung wird gegeben durch die beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} \chi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = C. \end{cases}$$

Da nun P_1, Q_1, R_1 Differentialquotienten nach x, y, z proportional sind, so haben wir:

$$P_1\left(\frac{\partial Q_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial y}\right) + Q_1\left(\frac{\partial R_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial z}\right) + R_1\left(\frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial x}\right) = 0,$$

oder, wenn wir für P_1, Q_1, R_1 ihre Werthe setzen und reduciren:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$
$$+\lambda\left\{\frac{\partial \chi}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+\frac{\partial \chi}{\partial y}\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+\frac{\partial \chi}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right\}$$
$$+\frac{\partial \lambda}{\partial x}\left(Q\frac{\partial \chi}{\partial z}-R\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)+\frac{\partial \lambda}{\partial y}\left(R\frac{\partial \chi}{\partial x}-P\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\partial \lambda}{\partial z}\left(P\frac{\partial \chi}{\partial y}-Q\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)=0.$$

Sind P, Q, R selbst proportional Differentialquotienten nach x, y, z, so verschwindet die erste Zeile dieser Gleichung und eine Lösung dieser Gleichung ist $\lambda = 0$; alsdann sind P_1, Q_1, R_1 unabhängig von χ und somit ist $\psi(x, y, z)$ unabhängig von χ.

Sind P, Q, R nicht so beschaffen, dass für sie die erste Zeile verschwindet, so ist, wie man aus dieser Gleichung sieht, λ abhängig von der Form von χ und somit auch ψ abhängig von der Form von χ. Die Form von ψ wird in diesem Falle bestimmt durch die in §. 154 gegebene Methode; die vorstehende Untersuchung ist jedoch von Nutzen, da sie ein Mittel giebt, um die analytische Vergleichung zwischen den Methoden aufzustellen.

Geometrische Veranschaulichung.

§. 157.

Man kann der Differentialgleichung und ihrem Integrale eine geometrische Deutung geben, wodurch der Unterschied zwischen den beiden in den letzten beiden Paragraphen besprochenen Classen von Gleichungen anschaulich werden wird.

Stellen wie gewöhnlich x, y, z die Coordinaten eines Punktes A dar, so wird die Gleichung irgend einen geometrischen Ort darstellen. Ist A' ein Punkt des Ortes in der Nähe von A, so sind dx, dy, dz proportional den Richtungscosinussen von AA', und es giebt daher die Differentialgleichung eine Relation zwischen diesen Richtungscosinussen an; der geometrische Ort, welchen sie darstellt, wird somit eine gewisse Curve oder Curvenschaar, nicht aber eine Fläche oder Flächenschaar sein.

§. 158.

Betrachten wir nun die beiden Differentialgleichungen

$$(1)\quad \frac{dx'}{P'}=\frac{dy'}{Q'}=\frac{dz'}{R'},$$

in denen P', Q', R' dieselben Functionen von x', y', z' wie P, Q, R von x, y, z sind, so sind ihre Integrale von der Form:

$$(2) \quad \begin{cases} u_1 = a_1 \\ u_2 = a_2, \end{cases}$$

wo u_1 und u_2 Functionen von x', y', z' sind; und da dieselben gleichzeitig bestehen, so stellen sie in Wirklichkeit den Durchschnitt zweier Flächen dar, von denen jede zu einer Flächenschaar gehört. Dieser Durchschnitt je zweier specieller Flächen ist eine Curve, und wir erhalten daher ein doppelt unendliches System von Curven. Eine Curve dieses Systems geht durch A und wird bestimmt durch diejenigen Werthe von a_1 und a_2, welche man erhält, wenn man in u_1 und u_2 die Coordinaten von A einsetzt. Ist A'' der Punkt dieser Curve, welcher unmittelbar auf A folgt, so sind die Richtungscosinusse von AA'' proportional zu dx', dy', dz' oder zu den Werthen von P', Q', R' im Punkte A, d. h. zu P, Q, R. Nun ist die Bedingung, dass AA'' und AA' auf einander senkrecht stehen,

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

welches die gegebene Differentialgleichung ist; sie drückt daher aus, dass AA' senkrecht ist zu derjenigen Curve von (2), welche durch A hindurchgeht. Die Lösung der Differentialgleichung muss somit alle diejenigen Curven umfassen, welche das System (2) orthogonal schneiden.

Gehen wir von A in irgend einer Richtung fort, welche senkrecht ist zur Tangente im Punkte A an die durch A gehende Curve des Systems (2), so werden wir in A' zu einer benachbarten Curve dieses Systems gelangen; gehen wir weiter von A' nach irgend einer Richtung, welche rechtwinkelig ist zu jener, so werden wir in einem anderen auf diesem Wege folgenden Punkte eine andere benachbarte Curve erreichen. Der so erhaltene Weg muss in der Lösung der Differentialgleichung einbegriffen sein, und da wir von jedem Punkte A nach irgend einer von unendlich vielen Richtungen (d. h. nach jeder Richtung, welche in der Normalebene der Curve des Systems im Punkte A liegt) fortgehen können, so folgt, dass die Lösung der Gleichung eine willkürliche Function enthalten wird.

Wir wollen daher durch A eine beliebige Fläche legen und unseren Weg so nehmen, dass er auf dieser Fläche liegt. Geht man von A aus unter rechtem Winkel zur Curve des Systems (2) fort, so wird es im Allgemeinen nur eine einzige mögliche Richtung auf der Fläche geben, und geht man auf dieser längs eines kleinen Bogens weiter, so werden wir im Endpunkte A' zu einer anderen

Curve kommen; in A' wird es wie vorher in der Regel nur eine einzige mögliche Richtung auf der Fläche geben, und diese wird zu einem anderen Punkte A'' führen u. s. w. Wir werden so auf der willkürlichen Oberfläche einen einzigen Weg erhalten, der durch Punkt A geht. Hätte man einen anderen Punkt B derselben Fläche (der jedoch nicht auf dem durch A führenden Wege liegt) als Ausgangspunkt genommen, so würde man in analoger Weise einen einzigen durch B führenden Weg erhalten haben, der verschieden ist von dem ersten, und ebenso für jeden Punkt.

Wir würden daher auf jeder willkürlichen Oberfläche eine einfach unendliche Reihe von Curven erhalten.

§. 159.

Dies ist genau das geometrische Verfahren, welches dem analytischen Verfahren in dem Falle entspricht, wo die Bedingungsgleichung nicht erfüllt ist. Denn dort hatten wir eine willkürliche Relation zwischen den Veränderlichen angenommen — dies ist die Gleichung der willkürlichen Oberfläche; jene hatten wir mit der Differentialgleichung combinirt und nach der Integration eine andere Gleichung erhalten, die eine willkürliche Constante enthielt und zusammen mit der ursprünglichen willkürlichen Relation als die Lösung betrachtet wurde. Die neue Gleichung, welche eine willkürliche Constante enthält, stellt eine Schaar von Flächen dar, und die Verbindung beider giebt das System von Curven, welche ihre Durchschnittslinien bilden. Jede dieser Curven liegt auf der zuerst angenommenen Fläche, und daher haben wir eine unendliche Reihe von Curven auf dieser Fläche. Das Verfahren giebt somit das System von Linien, welches auf irgend einer Oberfläche liegt und der Differentialgleichung genügt.

§. 160.

Es kann nun vorkommen, dass das vollständige System von Curven (2) durch eine Fläche und somit durch eine Schaar von Flächen orthogonal geschnitten werden kann. Wäre z. B. das System eine Reihe von geraden Linien, die durch denselben Punkt gehen, so würde dasselbe durch jede Kugel, welche diesen Punkt zum Mittelpunkt hätte, orthogonal geschnitten werden. In diesem Falle würde jede Curve, welche auf einer orthogonalen Fläche gezogen

ist, das System (2) unter rechtem Winkel schneiden, da sie in jedem Punkte senkrecht steht zu irgend einer Curve des Systems (2). Daher muss die allgemeine Lösung alle Curven einschliessen, welche man auf jeder von diesen Flächen ziehen kann, und demnach können wir, wenn wir eine Oberfläche als die Gesammtheit aller Curven ansehen, die auf ihr gezogen werden können, sagen, dass die Oberfläche in dem System von Curven enthalten sei. Da die Fläche eine aus einer Schaar ist, deren Glieder sämmtlich die nämliche Eigenschaft besitzen, so sagen wir, dass die Gleichung dieser Flächenschaar die Lösung der Differentialgleichung ist; und aus dem Gesagten geht hervor, dass damit einbegriffen ist, dass die Gleichungen jeder Curve, welche man auf einer Fläche der Schaar ziehen kann, eine Lösung bilden.

§. 161.

Dies entspricht genau dem Processe, den wir in dem Falle, wo die Bedingungsgleichung erfüllt war, angewendet haben; wir hatten dort (§. 155) eine Gleichung $\psi = C$ und eine andere willkürliche Gleichung $\chi = 0$, welche beide zusammen eine Curve auf jeder der Flächen $\psi = C$ darstellten. Indem wir alle möglichen willkürlichen Gleichungen $\chi = 0$ nahmen, erhielten wir alle möglichen Curven auf den Flächen $\psi = C$ und somit schliesslich die Flächen selbst, in deren Ausdruck die Form von χ nicht auftrat.

§. 162.

Es bleibt nur noch zu zeigen übrig, wie die Bedingungsgleichung aus den geometrischen Betrachtungen herzuleiten ist. Die Schlussfolgerungen gründen sich auf die Annahme, dass das durch

$$\frac{d x'}{P'} = \frac{d y'}{Q'} = \frac{d z'}{R'}$$

dargestellte System von Curven orthogonal geschnitten werden kann. Wenn sie orthogonal geschnitten werden können, etwa in einem Punkte A, so muss die Tangente an die specielle durch A gehende Curve zusammenfallen mit der Normalen an die orthogonale Fläche im Punkte A. Nun sind die Richtungscosinusse der Tangente in A proportional zu den Werthen von P', Q', R' im Punkte A, d. h. zu P, Q, R, und wenn

$$\varphi(x', y', z') = C$$

die Orthogonalfläche ist, so sind die Richtungscosinusse der Normale im Punkte x, y, z (welcher A ist) proportional zu $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$. Da die Richtungscosinusse für die beiden Linien dieselben sein müssen, so müssen wir haben:

$$\frac{1}{P}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{Q}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Ist jede dieser Grössen gleich μ, so dass

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu P, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu Q, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mu R$$

ist, so führt die Elimination von φ und μ aus diesen (wie in §. 152) zu der betrachteten Gleichung, welche somit die Bedingung dafür ist, dass das Curvensystem orthogonal geschnitten werden kann.

Fall von n Veränderlichen.

§. 163.

Im Vorhergehenden haben wir angenommen, dass nur drei Veränderliche auftreten; es ist indessen leicht, zu dem Falle überzugehen, wo mehr als drei vorhanden sind. Soll die Gleichung

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + X_3\, dx_3 + \cdots + X_n\, dx_n = 0,$$

in welcher X_1, X_2, ... Functionen von x_1, x_2, ... sind, ein vollständiges Integral von der Form

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A$$

besitzen, so müssen die Grössen X_μ proportional den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$ sein, so dass wir setzen können:

$$v X_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

für alle Werthe 1, 2, ..., n von μ. Sind nun λ, μ, ν drei verschiedene Indices, so ist:

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda}(v X_\mu) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu\, \partial x_\lambda} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}(v X_\lambda)$$

oder:

$$v\left(\frac{\partial X_\mu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial X_\lambda}{\partial x_\mu}\right) = X_\lambda \frac{\partial v}{\partial x_\mu} - X_\mu \frac{\partial v}{\partial x_\lambda}.$$

Analog:

$$v\left(\frac{\partial X_\lambda}{\partial x_\nu} - \frac{\partial X_\nu}{\partial x_\lambda}\right) = X_\nu \frac{\partial v}{\partial x_\lambda} - X_\lambda \frac{\partial v}{\partial x_\nu}$$

und:

$$v\left(\frac{\partial X_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial X_\mu}{\partial x_\nu}\right) = X_\mu \frac{\partial v}{\partial x_\nu} - X_\nu \frac{\partial v}{\partial x_\mu},$$

und somit:

$$X_\nu\left(\frac{\partial X_\mu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial X_\lambda}{\partial x_\mu}\right) + X_\mu\left(\frac{\partial X_\lambda}{\partial x_\nu} - \frac{\partial X_\nu}{\partial x_\lambda}\right) + X_\lambda\left(\frac{\partial X_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial X_\mu}{\partial x_\nu}\right) = 0.$$

Wenn das System von Gleichungen, welche aus dieser durch alle möglichen Combinationen von drei verschiedenen der Indices 1, 2, 3, . . ., n abgeleitet werden können, befriedigt ist, so besitzt die Differentialgleichung ein Integral von der vorausgesetzten Form. Die Gesammtzahl dieser Bedingungsgleichungen beträgt

$$\frac{1}{6}\, n\,(n-1)\,(n-2);$$

dieselben sind nicht alle von einander unabhängig; denn wenn man die vier Gleichungen niederschriebe, welche je drei von den vier Grössen X_λ, X_μ, X_ν, X_ϱ enthalten, so würde man finden, dass die eine aus den drei anderen ableitbar ist.

Aufgabe. Man zeige, dass die Gesammtzahl der von einander unabhängigen Bedingungsgleichungen

$$\frac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2)$$

ist.

§. 164.

Wenn diese Bedingungsgleichungen oder die nothwendig unabhängigen Gleichungen identisch erfüllt sind, so kann man die Stammgleichung, welche alsdann nothwendigerweise existirt, erhalten durch eine Verallgemeinerung der Methode, welche wir bei den Gleichungen mit drei Veränderlichen angewandt hatten. Wir integriren so, als ob alle Veränderlichen, mit Ausnahme von zweien, constant wären, und ersetzen die willkürliche Constante durch eine willkürliche Function aller derjenigen Veränderlichen, welche als constant angenommen worden waren. Die so erhaltene Gleichung differentiiren wir nach allen Veränderlichen und bringen das Resultat in Uebereinstimmung mit der gegebenen Gleichung; die für diese Uebereinstimmung erforder-

lichen Bedingungen werden zur Bestimmung der eingeführten willkürlichen Function und somit zur Bestimmung der Stammgleichung dienen.

1. Aufgabe. Es ist leicht zu bestätigen, dass die Coefficienten der Differentiale in der Gleichung

$$(2x_1 + x_2^2 + 2x_1 x_4 - x_3)\, dx_1 + 2x_1 x_2\, dx_2 - x_1\, dx_3 + x_1^2\, dx_4 = 0$$

den Bedingungsgleichungen, deren Anzahl vier ist, von denen aber nur drei unabhängig sind, genügen. Der Regel gemäss nehmen wir an, dass nur zwei der Veränderlichen sich ändern können, und als diese können wir x_3 und x_4 nehmen. Dann ergiebt sich das Integral:

$$-x_1 x_3 + x_1^2 x_4 = C = \varphi,$$

wo φ eine Function von x_1 und x_2 ist. Differentiiren wir dies, so erhalten wir:

$$(-x_3 + 2x_1 x_4)\, dx_1 - x_1\, dx_3 + x_1^2\, dx_4 = d\varphi,$$

und eine Vergleichung dieser Gleichung mit der gegebenen zeigt, dass

$$-d\varphi = (2x_1 + x_2^2)\, dx_1 + 2x_1 x_2\, dx_2$$

ist. Wir erhalten auf diese Weise eine Gleichung, welche nur drei Differentiale, $d\varphi$, dx_1, dx_2, anstatt vier enthält (im allgemeinen Falle würden wir $n-1$ Differentiale anstatt n erhalten); die Regel wende man dann wieder auf diese an und vermindere dadurch wieder die Anzahl der Differentiale um eins und so fort, bis man ein endliches Integral erhalten kann. In dem speciell betrachteten Beispiele ist das Integral, wie man leicht sieht:

$$-\varphi + A = x_1^2 + x_1 x_2^2,$$

worin A nunmehr eine willkürliche Constante ist; und die Stammgleichung ist:

$$x_1^2 + x_1 x_2^2 - x_1 x_3 + x_1^2 x_4 = A.$$

2. Aufgabe. Die folgenden Gleichungen haben eine Stammgleichung von der betrachteten Form; man bestimme sie für jede von ihnen.

(1) $yzu\, dx + zux\, dy + uxy\, dz + xyz\, du = 0.$

(2) $(y+z+u)\, dx + (z+u+x)\, dy + (u+x+y)\, dz + (x+y+z)\, du = 0.$

(3) $z(y+z)\, dx + z(u-x)\, dy + y(x-u)\, dz + y(y+z)\, du = 0.$

Gleichungen von höherem als dem ersten Grade.

§. 165.

Es können Gleichungen vorkommen, in denen die Differentiale der Veränderlichen in einer höheren Potenz als der ersten auftreten. Es liegt nicht in unserer Absicht, auf die Lösung derselben vollständig einzugehen, sondern nur eine Methode anzugeben, wie man in einigen Fällen verfahren kann.

Als die allgemeine Gleichung **zweiten** Grades kann man nehmen:

$$X dx^2 + Y dy^2 + Z dz^2 + 2 X' dy dz + 2 Y' dz dx + 2 Z' dx dy = 0,$$

worin X, Y, Z, X', Y', Z' Functionen von x, y, z sind. Wenn sich die linke Seite in zwei Factoren zerlegen lässt, so kann die Gleichung durch zwei andere von der Form

$$P dx + Q dy + R dz = 0$$

ersetzt werden, welche man erhält, indem man die beiden Factoren einzeln gleich Null setzt. Die Lösung einer jeden von ihnen, die man durch die früheren Methoden erhält, wird eine particuläre Lösung der vorgelegten Differentialgleichung sein, und die beiden allgemeinen Lösungen zusammengenommen werden die vollständige Lösung bilden. In dem Falle, wo jede der linearen Gleichungen im Sinne der vorhergehenden Paragraphen durch ein einziges Integral resp. von der Form

$$\psi_1 (x, y, z) - C_1 = 0, \quad \psi_2 (x, y, z) - C_2 = 0$$

befriedigt wird, wird die allgemeine Lösung wie in §. 19 dargestellt sein durch

$$(A) \quad \{\psi_1 (x, y, z) - C\} \{\psi_2 (x, y, z) - C\} = 0.$$

In dem Falle, wo zwei verschiedene Gleichungen für die Lösung erforderlich sind, muss jedes zusammengehörige Paar als eine Lösung betrachtet werden.

Nun ist die Bedingung dafür, dass dieses Lösungen sein können, die, dass die linke Seite der ursprünglichen Gleichung in Factoren zerlegbar sei. Die linke Seite ist gleich

$$\frac{1}{Z}[(Z dz + Y' dx + X' dy)^2 - \{(Y'^2 - XZ) dx^2 - 2(ZZ' - X'Y') dx dy + (X'^2 - YZ) dy^2\}],$$

und damit dieses in zwei Factoren zerlegbar sei, muss

$$(Y'^2 - XZ)\,dx^2 - 2\,(ZZ' - X'Y')\,dx\,dy + (X'^2 - YZ)\,dy^2$$

ein vollständiges Quadrat sein. Dies wird der Fall sein, wenn

$$(Y'^2 - XZ)(X'^2 - YZ) - (ZZ' - X'Y')^2 = 0$$

oder:

$$Z(XYZ + 2\,X'Y'Z' - XX'^2 - YY'^2 - ZZ'^2) = 0,$$

also, da Z nicht gleich Null ist, wenn

$$XYZ + 2\,X'Y'Z' - XX'^2 - YY'^2 - ZZ'^2 = 0$$

ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so erhält man die allgemeine Lösung auf die vorher angegebene Weise.

Ist aber diese Bedingung nicht erfüllt, so besitzt die vorgelegte Gleichung weder eine einzige vollständige Lösung von der Form (A), noch ein System von einzelnen Lösungen, von denen jede durch ein Gleichungspaar gegeben wird; sie besitzt aber im Allgemeinen eine Lösung, welche durch ein System von simultanen Gleichungen dargestellt wird.

1. Aufgabe. Die Gleichung

$$x^2 dx^2 + y^2 dy^2 - z^2 dz^2 + 2\,xy\,dx\,dy = 0$$

erfüllt die Bedingung und die entsprechenden Gleichungen sind:

$$x dx + y dy + z dz = 0 \quad \text{und} \quad x dx + y dy - z dz = 0;$$

dieselben führen zu den Integralen:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a_1 = 0, \quad x^2 + y^2 - z^2 - a_2 = 0,$$

und daher ist eine allgemeine Lösung:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a)\,(x^2 + y^2 - z^2 - a) = 0$$

oder:

$$(x^2 + y^2 - a)^2 = z^4,$$

worin a eine willkürliche Constante ist.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $$l\,l'\,dx^2 + m\,m'\,dy^2 + n\,n'\,dz^2 + (l\,m' + l'\,m)\,dx\,dy + (l\,n' + l'\,n)\,dx\,dz + (m\,n' + m'\,n)\,dz\,dy = 0.$$

(2) $$(x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2 z = (z^2 - x^2 - y^2)\,(x\,dx + y\,dy + z\,dz)\,dz.$$

(3) $$dx\,dy\,dz = 0.$$

(4) $$\begin{vmatrix} dx, & dy, & dz \\ x, & y, & mz \\ dx, & dy, & m dz \end{vmatrix} = 0, \text{ wo } m \text{ eine Constante ist.}$$

3. Aufgabe. Man suche eine Lösung der Gleichung:

$$a(b-c)\,x\,dy\,dz + b(c-a)\,y\,dz\,dx + c(a-b)\,z\,dx\,dy = 0,$$

welche zusammen mit der Gleichung

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 = 1$$

besteht. (Die erste ist die Differentialgleichung der Krümmungslinien auf der durch die letztere dargestellten Fläche.)

4. Aufgabe. Man suche ebenso für die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x^2dx, & y^2dy, & z^2dz \\ dx, & dy, & dz \\ x, & y, & z \end{vmatrix} = 0$$

eine Lösung, welche zusammen mit der Gleichung

$$xyz = 1$$

besteht.

Simultane Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten.

§. 166.

Wir haben bisher nur immer eine einzige Differentialgleichung betrachtet; nunmehr gehen wir **zur Behandlung von Systemen** von Gleichungen über. Die einfachste und zu gleicher Zeit am häufigsten vorkommende Classe ist die, in welcher **nur eine einzige unabhängige** Veränderliche vorhanden ist, von der sämmtliche anderen vorkommenden Veränderlichen Functionen sind.

Um jede von diesen abhängigen Veränderlichen für sich und vollständig zu bestimmen, muss die Anzahl der Gleichungen des Systems gleich der Anzahl der abhängigen Veränderlichen sein. In dieser Classe sind enthalten der grösste Theil der Differentialgleichungen der Dynamik; so ist z. B. im Falle des Hauptproblems der physikalischen Astronomie — die Bewegung eines Systems materieller Körper unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Anziehungen zu bestimmen — nur eine einzige unabhängige Veränderliche vorhanden, nämlich die von einem bestimmten Zeitpunkte ab verflossene Zeit, während die abhängigen Veränderlichen die Coordinaten der verschiedenen Körper sind. Diese Coordinaten ändern sich mit der Zeit und liefern daher die verschiedenen Stellungen der Körper, und sie sind jede für sich bestimmt, da die Anzahl der Gleichungen gleich der Gesammtzahl der Coordinaten ist,

Alle Gleichungen, welche die kleinen Oscillationen in einem bewegten System von Körpern behandeln, sind ebenfalls hierin enthalten; bei ihnen kommt die Vereinfachung hinzu, dass die Gleichungen sämmtlich linear sind, während die Grössen, welche mit den Differentialquotienten multiplicirt sind, Constanten sind.

Die allgemeine Theorie der letzteren soll zuerst betrachtet werden.

§. 167.

Bezeichnen wir mit t die unabhängige Veränderliche und $\frac{d}{dt}$ mit D und nehmen wir den einfachsten allgemeinen Fall, den es giebt, so haben wir zwei Gleichungen, welche zwei mit x und y bezeichnete abhängige Veränderliche enthalten. Da die Gleichungen als linear vorausgesetzt sind, so können alle Glieder, welche Differentialquotienten von x enthalten, zusammengezogen werden und ebenso alle diejenigen, welche Differentialquotienten von y enthalten; und die Gleichungen können somit geschrieben werden in der Form:

$$\text{(I.)} \quad \begin{aligned} f_1(D)\,x + \varphi_1(D)\,y &= T_1 \\ f_2(D)\,x + \varphi_2(D)\,y &= T_2, \end{aligned}$$

worin $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$ rationale algebraische ganze Functionen mit constanten Coefficienten und T_1 und T_2 explicite Functionen von t allein sind, wobei für letztere ein constanter Werth oder Null nicht ausgeschlossen ist. Operirt man an beiden Seiten der ersten Gleichung mit $\varphi_2(D)$ und an beiden Seiten der letzten Gleichung mit $\varphi_1(D)$, so werden sie:

$$\begin{aligned} \varphi_2(D) f_1(D)\,x + \varphi_2(D)\,\varphi_1(D)\,y &= \varphi_2(D)\,T_1 \\ \varphi_1(D) f_2(D)\,x + \varphi_1(D)\,\varphi_2(D)\,y &= \varphi_1(D)\,T_2. \end{aligned}$$

Da die Functionen φ nur Constanten zu ihren Coefficienten haben, so folgt:

$$\varphi_2(D)\,\varphi_1(D)\,y = \varphi_1(D)\,\varphi_2(D)\,y,$$

und daher geben die obigen Gleichungen:

$$\text{(II.)} \quad \{\varphi_2(D) f_1(D) - \varphi_1(D) f_2(D)\}\,x = \varphi_2(D)\,T_1 - \varphi_1(D)\,T_2.$$

Sind nun l_1, l_2, m_1, m_2 die Indices der höchsten Differentialquotienten in $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$ respective, so ist der Index des höchsten Differentialquotienten in $\varphi_2(D) f_1(D)$ gleich $m_2 + l_1$ und der in $\varphi_1(D) f_2(D)$ gleich $m_1 + l_2$. Von diesen beiden Zahlen möge

mit n diejenige bezeichnet werden, welche nicht kleiner ist als die andere, so dass n die Ordnung des höchsten Differentialquotienten von x in der vorstehenden linearen, die Grösse x bestimmenden Gleichung ist. Um diese zu lösen, bedienen wir uns der Methode von Capitel III, welche auf eine einzige gewöhnliche Differentialgleichung anwendbar ist. Ist P irgend ein Werth von x, welcher der Gleichung genügt (dort genannt das particuläre Integral) und sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die n Wurzeln der Gleichung:

$$(A) \quad \varphi_2(\lambda) f_1(\lambda) - \varphi_1(\lambda) f_2(\lambda) = 0,$$

so ist der vollständige Werth von x:

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + A_n e^{\lambda_n t} + P,$$

worin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ willkürliche Constanten sind.

Verfahren wir in derselben Weise, um x aus den beiden ursprünglichen Gleichungen zu eliminiren, indem wir an der ersten mit $f_2(D)$, an der zweiten mit $f_1(D)$ operiren und dann die erste von der zweiten subtrahiren, so erhalten wir:

$$\text{(III.)} \quad \{\varphi_2(D) f_1(D) - \varphi_1(D) f_2(D)\} \, y = f_1(D) \, T_2 - f_2(D) \, T_1,$$

und daher wie vorher:

$$y = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + B_n e^{\lambda_n t} + Q,$$

worin $B_1, B_2, \ldots, B_n$ willkürliche Constanten sind und Q das particuläre Integral der Differentialgleichung (III.) vorstellt.

§. 168.

In den Ausdrücken für die beiden abhängigen Veränderlichen haben wir zwei Reihen von Constanten, welche aus den Differentialgleichungen (II.) und (III.) sich ergeben. Sie bestehen beide aus willkürlichen Constanten, wir wissen aber nicht, ob sie unabhängig von einander sind; eine solche Abhängigkeit zwischen ihnen kann bestehen und doch können die Constanten willkürlich sein. So könnte z. B. irgend eine der Constanten B ein Vielfaches irgend einer der Constanten A sein, und da die letztere willkürlich ist, so ist es auch die erstere. Wir müssen daher die Anzahl der von einander unabhängigen willkürlichen Constanten bestimmen. Um dies zu thun, setze man die Werthe von x und y in eine der Gleichungen (I.), etwa in die erste ein; alsdann geben die Glieder, welche P und Q, die particulären Integrale, enthalten, auf der linken Seite ein Glied T_1, welches sich gegen die rechte Seite aufheben wird, und die resultirende Gleichung ist:

$$\{A_1 f_1(\lambda_1) + B_1 \varphi_1(\lambda_1)\} e^{\lambda_1 t} + \{A_2 f_1(\lambda_2) + B_2 \varphi_1(\lambda_2)\} e^{\lambda_2 t} + \cdots + \{A_n f_1(\lambda_n) + B_n \varphi_1(\lambda_n)\} e^{\lambda_n t} = 0.$$

Da dieselbe bestehen soll für alle Werthe von t, so muss der Coefficient jeder Exponentialgrösse gleich Null sein, und daher ist:

$$(B) \quad \begin{aligned} A_1 f_1(\lambda_1) + B_1 \varphi_1(\lambda_1) &= 0 \\ A_2 f_1(\lambda_2) + B_2 \varphi_1(\lambda_2) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n f_1(\lambda_n) + B_n \varphi_1(\lambda_n) &= 0, \end{aligned}$$

so dass jede Constante B aus der entsprechenden Constante A hergeleitet werden kann. Die Anzahl der unabhängigen willkürlichen Constanten in der vollständigen Lösung der simultanen Gleichungen ist somit gleich n, d. h. gleich dem Exponenten der höchsten Potenz von D in dem Operationszeichen:

$$\varphi_2(D) f_1(D) - \varphi_1(D) f_2(D).$$

Hiernach wird die Lösung der Gleichungen (I.) dargestellt durch die oben angegebenen Werthe von x und y; die in den Ausdrücken vorkommenden Grössen λ sind die Wurzeln der Gleichung (A), und die Relationen zwischen den Constanten sind gegeben durch die Gleichungen (B).

§. 169.

In genau derselben Weise kann bewiesen werden, dass, wenn drei abhängige Veränderliche vorhanden sind, welche gegeben werden durch die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} f_1(D)x + \varphi_1(D)y + \psi_1(D)z &= T_1 \\ f_2(D)x + \varphi_2(D)y + \psi_2(D)z &= T_2 \\ f_3(D)x + \varphi_3(D)y + \psi_3(D)z &= T_3, \end{aligned}$$

die Anzahl der unabhängigen willkürlichen Constanten, welche in die vollständige Lösung eingehen, gleich dem Exponenten der höchsten Potenz von D in der Determinante ist:

$$\begin{vmatrix} f_1(D), & \varphi_1(D), & \psi_1(D) \\ f_2(D), & \varphi_2(D), & \psi_2(D) \\ f_3(D), & \varphi_3(D), & \psi_3(D) \end{vmatrix}.$$

§. 170.

Wenn die Wurzeln der Gleichung (A), welche die Coefficienten von t in den Exponentialgrössen giebt, **reell und ungleich** sind, so ist die oben gegebene Lösung vollständig. Es bleiben aber noch die Fälle zu betrachten:

1) wenn es **ein Paar imaginärer** Wurzeln giebt,

2) wenn es **ein Paar gleicher reeller** Wurzeln giebt.

Der Fall **gleicher imaginärer** Wurzeln wird sich aus der Verbindung dieser beiden ergeben.

Im ersten Falle bleibt die erhaltene Lösung allgemein, es ist jedoch erwünscht, sie so umzuändern, dass ihre Form frei von imaginären Grössen ist. Die beiden imaginären Wurzeln, etwa λ_1 und λ_2, können durch $\alpha \pm \beta i$ bezeichnet werden; dann ist der entsprechende Theil von x:

$$e^{\alpha t}\left(A_1 e^{\beta t i} + A_2 e^{-\beta t i}\right),$$

d. i.:

$$e^{\alpha t}\left(L_1 \cos\beta t + L_2 \sin\beta t\right),$$

wenn man die willkürlichen Constanten wie in §. 44 ändert. Der Theil von y, welcher den beiden imaginären Wurzeln entspricht, ist analog:

$$e^{\alpha t}\left(M_1 \cos\beta t + M_2 \sin\beta t\right).$$

Anstatt die nothwendigen Aenderungen in den Relationen zwischen A und B vorzunehmen, ist es besser, diese Ausdrücke wieder in eine oder die andere von den ursprünglichen Gleichungen einzusetzen und die entsprechenden Relationen wie vorher abzuleiten.

In dem zweiten Falle hört die erhaltene Lösung auf, allgemein zu sein, da zwei Constanten, etwa A_1 und A_2, zu einer zusammenschmelzen, es kann aber genau so wie in §. 44 bewiesen werden, dass der Theil von x, welcher von dieser mehrfachen Wurzel λ abhängt, gleich

$$e^{\lambda t}(A + A' t)$$

und der von y gleich

$$e^{\lambda t}(B + B' t)$$

ist.

1. Aufgabe. Man beweise, dass die Relationen zwischen den vier Constanten, durch welche sie auf zwei unabhängige Constanten reducirt werden, in diesem letzten Falle lauten:

$$A' f_1(\lambda) + B' \varphi_1(\lambda) = 0$$

$$A f_1(\lambda) + B \varphi_1(\lambda) + A' \frac{d f_1(\lambda)}{d\lambda} + B' \frac{d \varphi_1(\lambda)}{d\lambda} = 0.$$

2. Aufgabe. Wenn eine imaginäre Wurzel $\alpha + \beta i$ mehrfach vorkommt, so gebe man die entsprechenden Theile der complementären Functionen in x und y an.

§. 171.

Es kann vorkommen, dass die Aufgabe, bei deren Behandlung man auf Differentialgleichungen kommt, bereits eine Andeutung über die Form des Resultats enthält. So werden wir z. B. bei einem auf kleine Schwingungen sich beziehenden Problem erwarten, dass die Werthe der abhängigen Veränderlichen sich mit Hülfe rein periodischer Functionen darstellen werden, und es wird alsdann zweckmässig sein, für x und y respective Functionen von der Form

$$L_1 \cos\beta t + L_2 \sin\beta t$$
$$M_1 \cos\beta t + M_2 \sin\beta t$$

an Stelle von $e^{\lambda t}$ in die Gleichungen (II.) und (III.) zu substituiren. Setzt man dann, nachdem diese Werthe substituirt worden sind, die Coefficienten von $\cos\beta t$ und $\sin\beta t$ in jeder Gleichung gleich Null, so entstehen vier in den Grössen L und M lineare und homogene Gleichungen, deren Eliminationsresultante die Werthe von β ergeben wird. Wenn ferner das Problem auf eine Bewegung von nicht beständigem Charakter hinweist, so würde die anzuwendende Form der Lösung sein:

$$e^{at}(L_1 \cos\beta t + L_2 \sin\beta t)$$

und ebenso für y; hat man aber gar keine durch anderweitige Schlüsse erlangte Kenntniss von dem Charakter dieser Bewegung, so müsste man die gewöhnliche Methode anwenden.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega x.$$

Hierbei ist:

$$Dx + \omega y = 0$$
$$-\omega x + Dy = 0,$$

und daher wird die Gleichung für x:

$$(D^2 + \omega^2) x = 0,$$

so dass:

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Analog ist:

$$y = A' \cos \omega t + B' \sin \omega t.$$

Die Relationen zwischen A, B, A', B' werden ohne Weiteres abgeleitet, wenn man diese Werthe in die erste Gleichung substituirt. Wir erhalten:

$$-\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t = -\omega A' \cos \omega t - \omega B' \sin \omega t$$

oder:

$$A' = -B, \quad B' = A.$$

Die kürzeste Methode würde die sein, dass man y nach der ersten Gleichung durch x ausdrückt, also:

$$y = -\frac{1}{\omega} \frac{dx}{dt}$$
$$= A \sin \omega t - B \cos \omega t.$$

Diese Methode ist aber nur in besonderen Fällen anwendbar.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - a \frac{dy}{dt} + \mu^2 x = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + \mu^2 y = 0.$$

Wenn wir die Glieder zusammenziehen, welche sich auf die einzelnen Veränderlichen beziehen, so sind die Gleichungen:

$$(D^2 + \mu^2) x - a D y = 0$$
$$a D x + (D^2 + \mu^2) y = 0.$$

Daher wird die Gleichung für x:

$$\{(D^2 + \mu^2)^2 + a^2 D^2\} x = 0,$$

und der Werth von x ist:

$$x = L_1 \cos \beta_1 t + L_2 \sin \beta_1 t + L_3 \cos \beta_2 t + L_4 \sin \beta_2 t,$$

worin β_1^2 und β_2^2 die Wurzeln der Gleichung:

$$(\mu^2 - p)^2 - a^2 p = 0$$

sind, und der Werth von y ist:

$$y = M_1 \sin\beta_1 t + M_2 \cos\beta_1 t + M_3 \sin\beta_2 t + M_4 \sin\beta_2 t.$$

Man zeigt leicht, dass die Relation zwischen den Constanten lautet:

$$\frac{L_1}{M_1} = -\frac{L_2}{M_2} = \frac{L_3}{M_3} = -\frac{L_4}{M_4} = a.$$

3. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + c$$

$$\frac{dy}{dt} = a'x + b'y + c'.$$

Dieselben könnten durch Anwendung der gewöhnlichen Regel gelöst werden; eine andere auf diese Form anwendbare Methode ist die folgende:

Man multiplicire die zweite mit m und addire sie zur ersten; dann ist:

$$\frac{d}{dt}(x + my) = x(a + ma') + y(b + mb') + c + mc'$$
$$= (a + ma')(x + my) + c + mc',$$

vorausgesetzt, dass m so gewählt ist, dass

$$b + mb' = m(a + ma'),$$

d. h. dass m eine Wurzel der Gleichung ist:

$$m^2 a' + (a - b')m - b = 0.$$

Da die vorige Differentialgleichung ist:

$$\frac{d(x + my)}{(a + ma')(x + my) + c + mc'} = dt,$$

so lautet ihr Integral:

$$(a + ma')(x + my) + c + mc' = Ae^{t(a+ma')}.$$

Sind m_1 und m_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung, so ist dieses ein Integral, wofern m entweder gleich m_1 oder m_2 ist. Setzen wir $m = m_1$, so erhalten wir:

$$(a + m_1 a')(x + m_1 y) + c + m_1 c' = A_1 e^{t(a+m_1 a')},$$

und setzen wir $m = m_2$, so wird:

$$(a + m_2 a')(x + m_2 y) + c + m_2 c' = A_2 e^{t(a+m_2 a')},$$

worin A_1 und A_2 willkürliche Constanten sind. Diese beiden Gleichungen bilden die vollständige Lösung des gegebenen Paares von simultanen Gleichungen.

4. Aufgabe. Man löse in derselben Weise wie in der vorhergehenden Aufgabe die Gleichungen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = ax + by$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = a' x + b' y.$$

5. Aufgabe. Man löse die folgenden Aufgaben:

$$(1) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 7x - y = 0. \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 5x + y = e^t. \\ \dfrac{dy}{dt} + 3y - x = e^{2t}. \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} + 9\dfrac{dy}{dt} + 44x + 49y = t. \\ 3\dfrac{dx}{dt} + 7\dfrac{dy}{dt} + 34x + 38y = e^t. \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} + 9\dfrac{dy}{dt} + 11x + 31y = e^t. \\ 3\dfrac{dx}{dt} + 7\dfrac{dy}{dt} + 8x + 24y = e^{2t}. \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} + 9\dfrac{dy}{dt} + 2x + 31y = e^t. \\ 3\dfrac{dx}{dt} + 7\dfrac{dy}{dt} + x + 24y = 3. \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} + m^2 y = 0. \\ \dfrac{d^2 y}{dt^2} - m^2 x = 0. \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} - 3x - 4y + 3 = 0. \\ \dfrac{d^2 y}{dt^2} + x + y + 5 = 0 \end{cases}$$

Simultane Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten.

§. 172.

Wir setzen wie vorher voraus, dass nur **eine einzige unabhängige** Veränderliche vorhanden ist, und dass somit das gleichzeitige Bestehen von m simultanen Gleichungen ausreicht, um die Relationen zwischen den m abhängigen Veränderlichen und derjenigen, von welcher jede einzelne eine Function ist, zu bestimmen.

Ferner wird es genügen, wenn wir nur Systeme simultaner Gleichungen **erster Ordnung** betrachten, da jedes andere auf ein solches zurückgeführt werden kann. Wenn z. B. in irgend einer Gleichung eines gegebenen Systems ein Differentialquotient $n$ter Ordnung vorkommen sollte, etwa $\frac{d^n y}{dx^n}$, so könnten wir eine äquivalente Reihe von Gleichungen erster Ordnung aufstellen, indem wir die Substitutionen machen:

$$y_1 = \frac{dy}{dx},\ y_2 = \frac{dy_1}{dx},\ \ y_3 = \frac{dy_2}{dx}, \ldots, y_n = \frac{dy_{n-1}}{dx},$$

welche alle von der festgesetzten Ordnung sind; und wenn wir die entsprechenden Substitutionen für alle Differentialquotienten von höherer als der ersten Ordnung vornähmen, so würden wir jedes System simultaner Gleichungen von irgend welcher Ordnung in ein äquivalentes System von Gleichungen erster Ordnung transformiren. Wenn m abhängige Veränderliche vorhanden sind, so müssen wir in diesem System m Gleichungen haben, deren jede die Form besitzt:

$$\varphi\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_m}{dx}\right) = 0.$$

§. 173.

Die Auflösung dieses Systems von Gleichungen kann abhängig gemacht werden von der Lösung einer einzigen Differentialgleichung der $m$ten Ordnung, welche eine der abhängigen Veränderlichen mit der unabhängigen Veränderlichen verknüpft.

Denn man löse die m Gleichungen so auf, dass die m Differentialquotienten als explicite Functionen der Veränderlichen gegeben werden, und nehme an, dass diese Relationen seien:

$$\frac{dy_1}{dx} = \psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_m}{dx} = \psi_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m).$$

Die erste von diesen differentiire man $(m-1)$ mal hinter einander nach x und substituire nach jeder Differentiation und vor Ausführung der nächsten die Werthe von $\frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_m}{dx}$ aus den letzten $m-1$ von diesen Gleichungen. Auf diese Weise wird man, einschliesslich der ersten, m Gleichungen erhalten, welche

$$\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^my_1}{dx^m}$$

mit den Veränderlichen $x, y_1, y_2, \ldots, y_m$ in Beziehung setzen. Werden aus diesen m Gleichungen die $m-1$ Veränderlichen $y_2, y_3, \ldots, y_m$ eliminirt, so wird sich eine einzige Gleichung ergeben, welche dargestellt werden kann durch:

$$f\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^my_1}{dx^m}\right) = 0.$$

Da diese Gleichung von der $m$ten Ordnung ist, so hat sie (§. 8) m unabhängige erste Integrale, deren jedes eine willkürliche Constante enthält, wobei alle m Constanten von einander unabhängig sind, und diese Integrale können dargestellt werden durch die Gleichungen:

$$F_1\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}}, C_1\right) = 0$$

$$F_2\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}}, C_2\right) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_m\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}}, C_m\right) = 0,$$

in denen die Constanten C von einander unabhängig sind. Aus den vorhergehenden Gleichungen kennen wir aber die Werthe der Differentialquotienten von y_1 als Functionen der Veränderlichen; werden dieselben in das System der Gleichungen F substituirt, so nehmen die letzteren die Form an:

$$\Phi_1 (x, y_1, y_2, \ldots, y_m, C_1) = 0$$
$$\Phi_2 (x, y_1, y_2, \ldots, y_m, C_2) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Phi_m (x, y_1, y_2, \ldots, y_m, C_m) = 0,$$

und diese reichen aus, um jede der Veränderlichen y als Function von x zu bestimmen; sie sind ein Integralsystem und enthalten m willkürliche Constanten.

Wir erhalten daher als **allgemeines Resultat:**

Die vollständige Lösung eines Systems von m Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen $m + 1$ Veränderlichen hängt ab von derjenigen einer gewöhnlichen Differentialgleichung $m$ter Ordnung und besteht aus m Gleichungen, welche die $m + 1$ Veränderlichen mit einander verknüpfen und m unabhängige willkürliche Constanten enthalten.

§. 174.

Das Vorhergehende stellt die allgemeine Theorie dar; in besonderen Fällen aber ergeben sich Vereinfachungen, die uns eines grossen Theils der in der allgemeinen Theorie angedeuteten Arbeit überheben. Wenn z. B. die Gleichungen in einem System bestehen, in welchem jede linear ist, so kann es vorkommen, dass man von jeder Gleichung von der Form

$$P\,dx + P_1\,dy_1 + P_2\,dy_2 + \cdots + P_m\,dy_m = 0$$

ein Integral erhalten kann in der Form:

$$\varphi (x, y_1, y_2, \ldots, y_m) = C,$$

und es würde nicht nöthig sein, jenen langen Weg einzuschlagen. Ferner würde es, anstatt die m unabhängigen ersten Integrale zu bestimmen, ausreichen, die vollständige Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $m$ter Ordnung zu bestimmen, da man aus dieser $m - 1$ andere Gleichungen ableiten könnte, in welche man die Werthe der Differentialquotienten einsetzen könnte, und man würde so ein äquivalentes Resultat erhalten. Wenn ferner die

Gleichungen sämmtlich linear sind, so können wir sie derart auflösen, dass wir die Verhältnisse der $m + 1$ Differentiale in der Form erhalten:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \cdots = \frac{dy_m}{Y_m},$$

welche wir die **symmetrische Form** nennen können. Die Art der Behandlung dieser Gleichungen wird zuweilen (was von der Form der Nenner in diesen Brüchen abhängt) sehr wesentlich von dem allgemeinen Verfahren verschieden und zweckmässiger als dieses sein. Beispiele, welche dieses erläutern, wird man in dem Folgenden antreffen.

1. Aufgabe. Die allgemeine Methode kann vermieden werden, wenn man Integrale von allen Gleichungen mit Ausnahme einer einzigen finden kann, und um so mehr, wenn sich alle Integrale finden lassen.

So führen z. B. die Gleichungen

$$l\,dx + m\,dy + n\,dz = 0$$
$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

unmittelbar zu den Integralen:

$$lx + my + nz = c_1$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = c_2,$$

welche y und z als Functionen von x bestimmen.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} t\,dx = (t - 2x)\,dt \\ t\,dy = (tx + ty + 2x - t)\,dt. \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} t\,\frac{d^2x}{dt^2} + 2\,\frac{dx}{dt} + tx = 0 \\ \frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}\,y = \frac{dx}{dt}. \end{cases}$$

3. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

worin:

$$X = ax + by + cz + d$$
$$Y = a'x + b'y + c'z + d'$$
$$Z = a''x + b''y + c''z + d''.$$

Bei Gleichungen von dieser Form ist es zweckmässig, irgend eine neue unabhängige Veränderliche einzuführen und alle diejenigen Veränderlichen, welche bereits in den gegebenen Gleichungen vorkommen, von dieser neuen Veränderlichen abhängig zu machen. Nennen wir die letztere t, so können wir als eine vortheilhafte Form die folgende annehmen:

$$\frac{dt}{t} = \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$
$$= \frac{l\,dx + m\,dy + n\,dz}{lX + mY + nZ}$$
$$= \frac{l\,dx + m\,dy + n\,dz}{\lambda(lx + my + nz) + r},$$

vorausgesetzt, dass wir l, m, n, λ so wählen, dass

$$al + a'm + a''n = \lambda l$$
$$bl + b'm + b''n = \lambda m$$
$$cl + c'm + c''n = \lambda n$$

ist. Der Werth von r ist:

$$ld + md' + nd''.$$

Eliminiren wir l, m, n zwischen jenen drei Gleichungen, so erhalten wir:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda, & a', & a'' \\ b, & b'-\lambda, & b'' \\ c, & c', & c''-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

eine cubische Gleichung zur Bestimmung von λ, deren Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sein mögen. Substituirt man λ_1 in irgend zwei der obigen Gleichungen, so kann man die Verhältnisse $l : m : n$ bestimmen. Man bezeichne sie mit $l_1 : m_1 : n_1$ und nehme an, der entsprechende Werth von r sei r_1, und analog für die anderen Werthe von λ. Dann erhalten wir für den Werth λ_1:

$$\frac{dt}{t} = \frac{l_1\,dx + m_1\,dy + n_1\,dz}{\lambda_1(l_1 x + m_1 y + n_1 z) + r_1},$$

und das Integral hiervon ist:

$$c_1 t = \left(l_1 x + m_1 y + n_1 z + \frac{r_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}.$$

Analog:

$$c_2 t = \left(l_2 x + m_2 y + n_2 z + \frac{r_2}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_2}},$$

und:

$$c_3 t = \left(l_3 x + m_3 y + n_3 z + \frac{r_3}{\lambda_3}\right)^{\frac{1}{\lambda_3}}.$$

Um die allgemeine Lösung des gegebenen Systems von Gleichungen zu erhalten, müssen wir t aus diesen Gleichungen eliminiren. Setzen wir $c_1 = A c_2 = B c_3$, wo A und B willkürliche Constanten sind, so ist das gesuchte allgemeine Integral gegeben durch die Gleichung:

$$\left(l_1 x + m_1 y + n_1 z + \frac{r_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} = A\left(l_2 x + m_2 y + n_2 z + \frac{r_2}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_2}}$$
$$= B\left(l_3 x + m_3 y + n_3 z + \frac{r_3}{\lambda_3}\right)^{\frac{1}{\lambda_3}}.$$

4. Aufgabe. Man löse auf diese Weise die Gleichungen:

$$-dx = \frac{dy}{3y + 4z} = \frac{dz}{2y + 5z}.$$

5. Aufgabe. Diese Methode lässt sich auch zur Lösung gewisser Systeme von Gleichungen benutzen, in denen die Veränderlichen nicht in so einfacher Weise wie in der 3. Aufgabe auftreten. Wir wollen z. B. die Gleichungen betrachten:

$$\frac{dx}{dt} + T(ax + by) = T_1$$
$$\frac{dy}{dt} + T(a'x + b'y) = T_2,$$

in denen T, T_1, T_2 Functionen von t sind. Multiplicirt man die zweite mit l und addirt sie zur ersten, so erhält man:

$$\frac{d}{dt}(x + ly) + \lambda T(x + ly) = T_1 + l T_2,$$

vorausgesetzt, dass l und λ so bestimmt werden, dass sie den Gleichungen genügen:

$$a + la' = \lambda$$
$$b + lb' = \lambda l,$$

so dass die Werthe von λ die beiden Wurzeln von

$$(a - \lambda)(b' - \lambda) - a'b = 0$$

sind, welche mit λ_1 und λ_2 bezeichnet seien. Da das Integral der vorstehenden Gleichung ist:

$$(x + ly)e^{\lambda\int T dt} = A + \int (T_1 + l T_2) e^{\lambda \int T dt} dt,$$

so ist die vollständige Lösung gegeben durch:

$$(x + l_1 y)\, e^{\lambda_1 \int T\, dt} = A_1 + \int (T_1 + l_1 T_2)\, e^{\lambda_1 \int T\, dt}\, dt$$

$$(x + l_2 y)\, e^{\lambda_2 \int T\, dt} = A_2 + \int (T_1 + l_2 T_2)\, e^{\lambda_2 \int T\, dt}\, dt.$$

6. Aufgabe. Man löse die Systeme von Gleichungen:

$$(\alpha) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{2}{t}(x - y) = 1 \\ \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{t}(x + 5y) = t. \end{cases}$$

$$(\beta) \quad \begin{cases} l t \dfrac{dx}{dt} = mn(y - z) \\ m t \dfrac{dy}{dt} = nl(z - x) \\ n t \dfrac{dz}{dt} = lm(x - y). \end{cases}$$

$$(\gamma) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ny - mz \\ \dfrac{dy}{dt} = lz - nx \\ \dfrac{dz}{dt} = mx - ly. \end{cases}$$

Ein specielles System von Gleichungen aus der Dynamik.

§. 175.

Es giebt zwei Classen von simultanen Gleichungen, welche von ausserordentlicher Bedeutung sind; die eine ist die bereits in den §§. 148, 149 als Verallgemeinerung der Euler'schen Gleichungen betrachtete Classe, welche zu höheren transcendenten Functionen, gewöhnlich Abel'sche Functionen genannt, führt. Die andere ist das System von Gleichungen, durch welches die Bewegung eines Punktes bestimmt wird, den ein Kräftecentrum nach dem Gravitationsgesetze anzieht. Das letztere kann dargestellt werden durch die simultanen Gleichungen:

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial R}{\partial z},$$

in welchen R eine rationale algebraische Function von r oder $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, der Entfernung des Punktes x, y, z vom Anfangspunkte, bedeutet. Um das vollständige Integral darzustellen, werden drei unabhängige Gleichungen (oder ihr Aequivalent) erforderlich sein, und da jede Gleichung ersetzt werden kann durch zwei von der Form:

$$x_1 = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x},$$

was im Ganzen sechs Gleichungen zur Bestimmung der sechs Grössen giebt. so zeigt die Untersuchung in §. 173, dass wir sechs willkürliche Constanten in der Lösung haben müssen.

Multipliciren wir die Gleichungen (1) respective mit

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

addiren sie dann und integriren, so erhalten wir:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} = R + B,$$

worin B eine willkürliche Constante ist.

Den Gleichungen (1) kann man noch eine andere Form geben. Da B eine Function von r ist, so ist:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{dR}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{dR}{dr},$$

und ebenso für die anderen. Somit geht (1) über in:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x}{r}\frac{dR}{dr},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{y}{r}\frac{dR}{dr},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{z}{r}\frac{dR}{dr},$$

und somit:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

$$z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

von denen nur zwei unabhängig sind. Die Integrale dieser sind respective:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C_1$$

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = C_2$$

$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = C_3.$$

Quadrirt und addirt man diese, so erhält man:

$$(x^2+y^2+z^2)\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}$$
$$-\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right)^2 = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = A^2$$

wo A eine willkürliche Constante ist. Dies ist gleichbedeutend mit

$$2r^2(R+B) - \left(r\frac{dr}{dt}\right)^2 = A^2,$$

d. i. mit:

$$dt = \frac{r\,dr}{\{2r^2(R+B) - A^2\}^{1/2}},$$

und daher ist:

$$(2) \quad t + \alpha = \int \frac{r\,dr}{\{2r^2(R+B) - A^2\}^{1/2}}.$$

Aus der eben erhaltenen Gleichung haben wir:

$$2R = -2B + \frac{A^2}{r^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

somit:

$$2\frac{dR}{dr}\frac{dr}{dt} = -2\frac{A^2}{r^3}\frac{dr}{dt} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2},$$

d. i.:

$$\frac{dR}{dr} = -\frac{A^2}{r^3} + \frac{d^2r}{dt^2}.$$

Wenn wir diesen Werth in die veränderte Form der ursprünglichen Gleichungen einsetzen, so wird die erste von ihnen:

$$r\frac{d^2x}{dt^2} = x\frac{d^2r}{dt^2} - A^2\frac{x}{r^3},$$

oder:

$$\frac{d}{dt}\left(r\frac{dx}{dt} - x\frac{dr}{dt}\right) + A^2\frac{x}{r^3} = 0,$$

oder:

$$r^2 \frac{d}{dt} \left\{ r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{r} \right) \right\} + A^2 \frac{x}{r} = 0.$$

Setzt man:

$$d\varphi = A \frac{dt}{r^2}$$

$$= \frac{A\,dr}{r\left\{2r^2(R+B) - A^2\right\}^{1/2}},$$

so ist die vorige Gleichung für $\frac{x}{r}$:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{x}{r} = 0,$$

und daher:

$$(3) \quad \frac{x}{r} = a_1 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi.$$

Werden die zweite und dritte Gleichung ebenso behandelt, so kommt man zu:

$$(4) \quad \frac{y}{r} = b_1 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi$$

$$(5) \quad \frac{z}{r} = c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi,$$

und in diesen sind die Constanten a, b, c willkürlich. Sie sind jedoch nicht unabhängig von einander, denn wir haben stets:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

welches auch der Werth von φ sein möge, und daher ist

$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) \cos^2 \varphi + 2(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) \cos \varphi \sin \varphi$$
$$+ (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) \sin^2 \varphi$$
$$= 1 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi$$

erfüllt für alle Werthe von φ, so dass:

$$(6) \quad \begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1 \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Die sechs Constanten sind drei unabhängigen Constanten äquivalent. Ferner können wir (3) auf die Form bringen:

$$\frac{x}{r} = \varrho_1 \cos(\varphi + \beta_1),$$

worin ϱ_1 und β_1 willkürliche Constanten sind; es ist daher auf diese Weise mit φ eine willkürliche Constante verbunden, und es wird somit nicht nöthig sein, eine solche in der Gleichung

$$(7) \quad \varphi = \int \frac{A\,d\,r}{r\,\{2\,r^2\,(R+B) - A^2\}^{1/2}}$$

hinzuzufügen.

Wir haben nun hinreichend viel Gleichungen, um das allgemeine Integral zu bestimmen. Mittelst (7) wird φ gegeben als eine Function von r und somit nach (2) als Function von t; hiernach geben die Gleichungen (3), (4) und (5) x, y, z als Functionen von t. Ueberdies haben wir sechs unabhängige willkürliche Constanten, nämlich A^2, B, α und die sechs Grössen a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, welche durch die drei Relationen (6) verbunden sind. Diese Gleichungen bilden daher das allgemeine Integral der Differentialgleichungen.

Aufgabe. Man löse auf diese Weise die Gleichungen:

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^{3/2}\,\dfrac{d^2\,x}{d\,t^2} + \mu\,x = 0 \\ (x^2+y^2)^{3/2}\,\dfrac{d^2\,y}{d\,t^2} + \mu\,y = 0, \end{cases}$$

und löse dieselben auch dadurch, dass man Polarcoordinaten einführt.

Vermischte Aufgaben.

1. Man beweise, dass, wenn

$$d\vartheta\,(m - n\cos\varphi)^{1/2} = d\varphi\,(m - n\cos\vartheta)^{1/2}$$

ist, die Gleichung besteht:

$$2\,m - n\left(c^2 + \frac{1}{c^2}\right) + n\left(c\cos\frac{\vartheta+\varphi}{2} - \frac{1}{c}\cos\frac{\vartheta-\varphi}{2}\right)^2 = 0,$$

wo c eine willkürliche Constante ist.

2. Man bezeichne mit $F(x)$ das Integral:

$$\int_0^x \frac{d\,x}{\{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)\}^{1/2}}$$

und zeige, dass die zu

$$F(x_1) + F(x_2) + F(x_3) = 0$$

äquivalente algebraische Relation lautet:

$$4\,(1-x_1^2)\,(1-x_2^2)\,(1-x_3^2) = (2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + k^2\,x_1^2\,x_2^2\,x_3^2)^2.$$

3. Man bezeichne mit $E(x)$ das Integral:

$$\int_0^x \left(\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}\right)^{1/2} dx$$

und zeige, dass

$$E(x_1) + E(x_2) + E(x_3) = -k^2 x_1 x_2 x_3$$

ist, wenn x_1, x_2, x_3 in derselben Beziehung zu einander stehen, wie in der vorigen Aufgabe.

4. Man zeige, dass

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ein Integral ist von

$$\frac{dx_1}{(1-x_1^3)^{2/3}} + \frac{dx_2}{(1-x_2^3)^{2/3}} + \frac{dx_3}{(1-x_3^3)^{2/3}} = 0,$$

wo y gegeben ist durch die Gleichung $x^3 + y^3 = 1$, und gebe die geometrische Bedeutung des Resultats an. (Cayley.)

5. Man beweise, dass das Integral von

$$\frac{dx}{(1+x^3)^{2/3}} + \frac{dy}{(1+y^3)^{2/3}} = 0$$

dargestellt werden kann in der Form:

$$(1+x^3)(1+y^3)(1+a^3) = (1+xya)^3,$$

wo a eine willkürliche Constante ist, und das von

$$\frac{dx}{(4x^3 - Ix + J)^{2/3}} + \frac{dy}{(4y^3 - Iy + J)^{2/3}} = 0$$

dargestellt werden kann in der Form:

$$(4x^3 - Ix + J)(4y^3 - Iy + J)(4a^3 - Ia + J) = \left\{4xya - \frac{1}{3} I(x+y+a) + J\right\}^3,$$

wo I und J bestimmte Constanten und a eine willkürliche Constante ist.

Man zeige, dass das allgemeine Integral von

$$X^{-2/3} dx + Y^{-2/3} dy = 0,$$

worin

$$X = (k, l, m, n \between x, 1)^3$$
$$Y = (k, l, m, n \between y, 1)^3$$

ist, lautet:

$$XYZ = \{k + l(x+y+z) + m(xy+yz+zx) + nxyz\}^3,$$

worin

$$Z = (k, l, m, n \between z, 1)^3$$

und z eine willkürliche Constante ist. (Mac Mahon und Russell.)

6. Man zeige, dass die Integralgleichungen, welche den Gleichungen

$$\frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta} + \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\psi}{\Delta\psi} = 0$$

$$\frac{\sin^2\vartheta\, d\vartheta}{\Delta\vartheta} + \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{\sin^2\psi\, d\psi}{\Delta\psi} = 0$$

äquivalent sind, worin

$$\Delta\chi = \{(1 - \varkappa \sin^2\chi)\,(1 - \lambda \sin^2\chi)\,(1 - \mu \sin^2\chi)\}^{1/2}$$

ist, dargestellt werden durch:

$$\frac{\sin\psi \sin\varphi \cos\vartheta\, \Delta\vartheta}{(\sin^2\vartheta - \sin^2\varphi)(\sin^2\vartheta - \sin^2\psi)} + \frac{\sin\vartheta \sin\psi \cos\varphi\, \Delta\varphi}{(\sin^2\varphi - \sin^2\vartheta)(\sin^2\varphi - \sin^2\psi)} + \frac{\sin\varphi \sin\vartheta \cos\psi\, \Delta\psi}{(\sin^2\psi - \sin^2\vartheta)(\sin^2\psi - \sin^2\varphi)} = A$$

und

$$\frac{\cos\psi \cos\varphi \sin\vartheta\, \Delta\vartheta}{(\sin^2\vartheta - \sin^2\varphi)(\sin^2\vartheta - \sin^2\psi)} + \frac{\cos\vartheta \cos\psi \sin\varphi\, \Delta\varphi}{(\sin^2\varphi - \sin^2\vartheta)(\sin^2\varphi - \sin^2\psi)} + \frac{\cos\varphi \cos\vartheta \sin\psi\, \Delta\psi}{(\sin^2\psi - \sin^2\vartheta)(\sin^2\psi - \sin^2\varphi)} = B,$$

und bestimme A und B durch die Bedingungen, dass, für $\vartheta = 0$, $\varphi = \alpha$ und $\psi = \beta$ sein solle.

7. Man suche die Stammgleichung der Gleichungen:

(1) $\quad (ay - bz)\,dx + (cz - ax)\,dy + (bx - cy)\,dz = 0.$

(2) $\quad \dfrac{dx\,(y + z - 2x)}{(y - x)(z - x)} + \dfrac{dy\,(z + x - 2y)}{(z - y)(x - y)} + \dfrac{dz\,(x + y - 2z)}{(x - z)(y - z)} = 0.$

(3) $\quad (y^2 + yz + z^2)\,dx + (z^2 + zx + x^2)\,dy + (x^2 + xy + y^2)\,dz = 0.$

8. Man bestimme die vollständige Lösung der Gleichung

$$(x^2 - y^2 + z^2)\,dx + z\,dz\,(y - x) = z^2\,dy - \frac{x\,dz}{z}(y^2 - x^2)$$

in der Form:

$$\int e^{-u^2}\,du + C = e^{-u^2}\,\frac{z}{y - x},$$

worin $x = uz$ ist. (Euler.)

9. Man löse die simultanen Gleichungen:

$$\begin{cases} a\,\dfrac{dx}{dt} = (b - c)\,yz \\ b\,\dfrac{dy}{dt} = (c - a)\,zx \\ c\,\dfrac{dz}{dt} = (a - b)\,xy, \end{cases}$$

indem man jede der Grössen x, y, z als elliptische Function darstellt.

10. Man integrire das System von Gleichungen:

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega}{dt} + ax + by\cos nt + bz\sin nt = 0 \\ a\omega - \dfrac{dx}{dt} - by\sin nt + bz\cos nt = 0 \\ b\omega\cos nt + bx\sin nt - \dfrac{dy}{dt} - az = 0 \\ b\omega\sin nt - bx\cos nt + ay - \dfrac{dz}{dt} = 0. \end{cases}$$

11. Man integrire die simultanen Gleichungen:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + n^2\{u - 3\xi(u\xi + v\eta)\} = 0 \\ \dfrac{d^2v}{dt^2} + n^2\{v - 3\eta(u\xi + v\eta)\} = 0, \end{cases}$$

worin ξ für $\cos(at + b)$ und η für $\sin(at + b)$ gesetzt ist. (Liouville.)

12. Man löse die simultanen Gleichungen:

$$\frac{d^4y}{dx^4} - a\frac{d^3z}{dx^3} + b\frac{d^2y}{dx^2} + cy = 0$$

$$\frac{d^4z}{dx^4} + a\frac{d^3y}{dx^3} + b\frac{d^2z}{dx^2} + cz = 0.$$

13. Man zeige, dass jedes System von Linien, welches auf der Oberfläche der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ beschrieben ist und der Gleichung

$$(1 + 2m)x\,dx + y(1 - x)\,dy + z\,dz = 0$$

genügt, auf die xy-Ebene projicirt, durch Parabeln dargestellt werden würde.

Man suche die Gleichung der Projectionen desselben Systems von Curven auf die yz-Ebene.

14. Man zeige, dass die Monge'sche Methode (4. Aufgabe, §. 154), wenn wir zunächst in Bezug auf x und z integriren, die Lösung der Gleichung der vorhergehenden Aufgabe in der Form

$$(1 + 2m)x^2 + z^2 = \varphi(y), \quad 2y(1 - x) = -\varphi'(y)$$

ergeben würde, und wende dieselbe an, um die vorhergehende Aufgabe zu lösen und die Resultate zu identificiren.

15. Man integrire die simultanen Gleichungen:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial R}{\partial x_1}, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{\partial R}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^2x_n}{dt^2} = \frac{\partial R}{\partial x_n},$$

in denen R eine Function von

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$$

ist. Binet.

Neuntes Capitel.

Partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung.

§. 176.

Bisher haben wir meistens Differentialgleichungen betrachtet, bei denen die abhängige Veränderliche oder, falls ein System simultaner Gleichungen gegeben war, die abhängigen Veränderlichen als Functionen von nur einer einzigen unabhängigen Veränderlichen vorausgesetzt wurden. Wir gehen nun zur Betrachtung von Gleichungen über, in welchen die **Anzahl** der **unabhängigen** Veränderlichen **grösser als eins** ist und vorausgesetzt wird, dass nur **eine einzige abhängige** Veränderliche vorhanden sei. Die letztere wird gewöhnlich mit z bezeichnet; ist sie eine Function von nur zwei Veränderlichen, so werden diese gewöhnlich mit x und y bezeichnet, ist z aber eine Function von mehr als zwei, etwa von n, Veränderlichen, so ist es üblich, sie mit $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ zu bezeichnen. Im ersteren Falle bezeichnen wir die ersten partiellen Differentialquotienten, nämlich $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$, bezüglich mit p und q; im letzteren Falle bezeichnen wir die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ bezüglich mit $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Eine Gleichung mit partiellen Differentialquotienten ist eine Beziehung zwischen den unabhängigen Veränderlichen, der abhängigen Veränderlichen (welche eine unbekannte Function jener Veränderlichen ist) und den partiellen Differentialquotienten der letzteren in Bezug auf die ersteren; sie heisst von der ersten Ordnung, wenn die in ihr vorkommenden partiellen Differentialquotienten von nicht höherer als der ersten Ordnung sind, von der zweiten Ordnung, wenn die in ihr vorkommenden partiellen Diffe-

rentialquotienten von nicht höherer als der zweiten Ordnung sind u. s. w. In diesem Capitel wollen wir nur Gleichungen von der **ersten** Ordnung betrachten.

Es kann vorkommen, dass mehr als eine einzige Differentialgleichung gegeben sind, die sich auf dasselbe System von Veränderlichen beziehen; z. B. können zwei Gleichungen zwischen z, x, y, p, q bestehen. In diesem Falle könnten beide Gleichungen gelöst und aus ihnen Werthe von p und q als Functionen von x, y und z hergeleitet werden; diese könnten wir in die Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

substituiren und würden so eine totale Differentialgleichung erhalten. Aehnlich würden beim Vorhandensein von n unabhängigen Veränderlichen n Gleichungen hinreichend und nothwendig sein, um $p_1, p_2, \ldots, p_n$ zu bestimmen; diese n Gleichungen könnten dann dazu dienen, um eine totale Differentialgleichung zu erhalten. Wenn aber die Anzahl der Gleichungen geringer ist als die Anzahl der partiellen Differentialquotienten und daher selbstverständlich auch kleiner als die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen, so sind wir nicht mehr im Stande, eine totale Differentialgleichung herzustellen; gewöhnlich ist uns nur eine einzige Gleichung gegeben, die wir dann eine partielle Differentialgleichung nennen.

Wie in dem Falle von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist unter der Integration der Gleichung die Herleitung aller derjenigen Werthe von z zu verstehen, durch deren Substitution die Differentialgleichung eine Identität wird.

Classification der Integrale.

§. 177.

Bevor wir die Methoden zur Integration und solche Classen von Gleichungen angeben, die sich leicht integriren lassen, ist es nothwendig, die verschiedenen **Arten der Integrale** einer partiellen Differentialgleichung zu classificiren und zu beweisen, dass diese Classen alle möglichen Integrale der Gleichung in sich schliessen. Der vollständigen Allgemeinheit wegen müssten die Behauptungen bewiesen werden für eine Gleichung von n Veränderlichen, die Beweise werden aber für eine Gleichung mit nur drei Veränderlichen geführt; diese Beschränkung hat den Vortheil, dass

die Gleichungen kürzer und ihre Anzahl geringer wird, während die einfachste Betrachtung zeigen wird, dass man zum allgemeinen Falle übergehen kann, ohne dass irgend welche neue analytische Schwierigkeiten hinzutreten.

§. 178.

Wir nehmen an, es sei uns zwischen z, x_1, x_2, x_3 eine Beziehung von der Form

$$(1) \quad f(z, x_1, x_2, x_3, a_1, a_2, a_3) = 0$$

gegeben, in welcher a_1, a_2, a_3 willkürliche Constanten sind, und die keine Differentialquotienten von z enthält. Um nun p_1, p_2, p_3 zu erhalten, haben wir die Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} p_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} p_2 + \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} p_3 + \frac{\partial f}{\partial x_3} &= 0. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) können die drei willkürlichen Constanten eliminirt werden; wären in (1) mehr als drei willkürliche Constanten vorhanden, so würden diese Gleichungen zur Elimination derselben nicht ausreichen, während zu viel Gleichungen vorhanden wären, wenn weniger als drei Constanten vorkämen. Das Resultat der Elimination im vorliegenden Falle möge durch

$$(A) \quad F(p_1, p_2, p_3, z, x_1, x_2, x_3) = 0$$

dargestellt werden, und dieses wird die partielle Differentialgleichung sein, welche der Integralbeziehung (1) entspricht.

Umgekehrt ist diese Integralbeziehung (1) eine Lösung von (A), und sie enthält drei willkürliche Constanten. Wir können nicht mehr als drei willkürliche Constanten in einer Lösung von (A) erwarten; denn wenn wir von einer solchen Lösung zu der Differentialgleichung übergehen mittelst der Methode, nach welcher (A) aus (1) erhalten wurde, so können nur drei Constanten eliminirt werden. Es enthält daher (1) die grösste Anzahl von willkürlichen Constanten, welche wir in einer Lösung von (A) erwarten können.

Den Namen „**vollständiges Integral**" einer partiellen Differentialgleichung giebt man einer Beziehung zwischen den Veränderlichen, welche ebenso viele willkürliche Constanten in sich schliesst, als unabhängige Veränderliche vorhanden sind.

§. 179.

Wir haben die Voraussetzung gemacht, dass a_1, a_2, a_3 constant seien, und haben dann die Gleichung (A) aus (1) und (2) abgeleitet. Wir können aber auch annehmen, dass a_1, a_2, a_3 Functionen der unabhängigen Veränderlichen sind; sind dieselben so beschaffen, dass die Formen von p_1, p_2, p_3 ungeändert bleiben, so wird die Differentialgleichung, die wir durch die Elimination dieser Functionen erhalten, dieselbe sein, wie in dem Falle, wo die Grössen a willkürliche Constanten waren, da die rein algebraische Elimination sich nicht kümmert um den Werth der eliminirten Grösse, sondern allein um deren Form.

Bei der neuen Annahme, dass die Grössen a Functionen der Veränderlichen x_1, x_2, x_3 seien, werden nun die Werthe der partiellen Differentialquotienten durch die Gleichungen gegeben:

$$\frac{\partial f}{\partial z} p_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial a_3}\frac{\partial a_3}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} p_2 + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial a_3}\frac{\partial a_3}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} p_3 + \frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial a_3}\frac{\partial a_3}{\partial x_3} = 0.$$

Da aber die Formen von p_1, p_2, p_3 dieselben sein sollen wie vorher, als sie durch die Gleichungen (2) gegeben wurden, so müssen, damit dies der Fall sei, die Gleichungen bestehen:

$$(3)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial a_3}\frac{\partial a_3}{\partial x_1} = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial a_3}\frac{\partial a_3}{\partial x_2} = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial a_3}\frac{\partial a_3}{\partial x_3} = 0. \end{aligned}$$

Bezeichnet R den Werth der Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial a_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial a_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_3}, & \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{vmatrix},$$

so sind die vorstehenden Gleichungen äquivalent mit

$$(4) \quad R\,\frac{\partial f}{\partial a_1} = 0, \quad R\,\frac{\partial f}{\partial a_2} = 0, \quad R\,\frac{\partial f}{\partial a_3} = 0.$$

Wenn nun R nicht verschwindet, so können diese nur befriedigt werden durch

$$(B) \quad \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a_3} = 0,$$

und dies sind drei Gleichungen, welche die Werthe von a_1, a_2, a_3 als Functionen der Veränderlichen bestimmen. Die Gleichung (1) ist auch bei dieser Aenderung der Grössen a immer noch eine Lösung; werden die eben gefundenen Werthe für dieselben eingesetzt, so erhalten wir eine Lösung von (A), welche keine willkürliche Constanten enthält. Ueberdies wird diese Lösung sich offenbar von einer Lösung unterscheiden, welche keine willkürliche Constante enthält, aber aus (A) dadurch abgeleitet ist, dass den Grössen a_1, a_2, a_3 in (A) specielle constante Werthe zuertheilt sind; es giebt daher das Resultat der Elimination der willkürlichen Constanten zwischen (A) und (B) in der That eine neue Lösung.

Diese Lösung wird ein **„singuläres Integral“** genannt; sie ist eine Beziehung zwischen den Veränderlichen, welche keine willkürliche Constante enthält; sie ist jedoch nicht ein besonderer Fall des vollständigen Integrals.

§. 180.

Die Gleichungen (4) werden sämmtlich befriedigt, sobald $R = 0$ ist, und da wir nun annehmen, dass a_1, a_2, a_3 nicht willkürliche Constanten, sondern Functionen der Veränderlichen sind, so wird dieser Gleichung genügt werden durch eine Functionalbeziehung

zwischen a_1, a_2, a_3. Diese Functionalbeziehung kann beliebig angenommen werden, so dass wir schreiben können:

$$(C) \qquad a_3 = \varphi(a_1, a_2),$$

wo φ eine willkürliche Function bezeichnet. Multipliciren wir nun die Gleichungen (3) bezüglich mit dx_1, dx_2, dx_3 und addiren sie dann, so erhalten wir:

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} d a_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} d a_2 + \frac{\partial f}{\partial a_3} d a_3 = 0;$$

aus Gleichung (C) aber erhalten wir:

$$d a_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} d a_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} d a_2,$$

somit:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial a_1} + \frac{\partial f}{\partial a_3}\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}\right) d a_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial a_2} + \frac{\partial f}{\partial a_3}\frac{\partial \varphi}{\partial a_2}\right) d a_2 = 0.$$

Da nun a_1 und a_2 von einander unabhängig sind, so sind ihre Aenderungen $d a_1$ und $d a_2$ ebenfalls von einander unabhängig; damit also diese Gleichung befriedigt werden könne, müssen wir haben:

$$(C) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a_1} + \frac{\partial f}{\partial a_3}\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial a_2} + \frac{\partial f}{\partial a_3}\frac{\partial \varphi}{\partial a_2} &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen (C) reichen aus, um a_1, a_2, a_3 als Functionen der Veränderlichen zu bestimmen, und die so erlangten Werthe dieser Grössen werden die willkürliche Function φ enthalten. Werden dieselben in (1) eingesetzt, so nimmt die Lösung eine neue von den beiden anderen verschiedene Form an.

Diese Lösung wird das **„allgemeine Integral“** genannt; sie ist eine Beziehung zwischen den Veränderlichen, welche zwei (oder, im Falle von n Veränderlichen, $n - 1$) von einander unabhängige Functionen dieser Veränderlichen zusammen mit einer willkürlichen Function dieser zwei (oder $n - 1$) Functionen enthält.

Die Gleichung $R = 0$ würde auch befriedigt werden, wenn wir a_3 zu einer willkürlichen Function von a_1 allein oder von a_2 allein machten, so dass wir auf diese Weise zu verschiedenen Classen von allgemeinen Integralen gelangen würden; indessen sind

alle diese weniger allgemein als das frühere, in welchem nur eine einzige willkürliche Beziehung zwischen allen Grössen a vorkam. Dies erkennt man leicht aus folgender Betrachtung: Wenn in Gleichung (C) a_3 entwickelt würde nach Potenzen von a_1, so würden die Coefficienten willkürliche Functionen von a_2 sein, während, wenn $a_3 = \psi(a_1)$ eine willkürliche Function von a_1 wäre und nach Potenzen von a_1 entwickelt würde, die Coefficienten nur willkürliche Constanten sein würden, welcher letztere Fall augenscheinlich in dem ersteren enthalten ist.

§. 181.

Es ist somit klar, dass wir **drei von Grund aus verschiedene** Classen von Lösungen partieller Differentialgleichungen erhalten; es bleibt also nur zu zeigen übrig, dass es **keine weiteren** giebt, und dies wird durch den Beweis des folgenden **Satzes** geschehen:

> Jede Lösung der partiellen Differentialgleichung ist in der einen oder anderen jener drei Classen von Lösungen der Gleichung enthalten, welche durch das vollständige Integral, das singuläre Integral und das allgemeine Integral gebildet werden.

Es stelle (A) die Differentialgleichung und (1) das vollständige Integral dieser Gleichung dar; alsdann werden die Gleichungen (B) und (C) das singuläre und das allgemeine Integral liefern. Irgend eine andere Lösung der Gleichung möge dargestellt werden durch

$$(5) \qquad \psi(z, x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Sobald es aber zweckmässig ist, von z zu sprechen, als ob es explicit durch die unabhängigen Veränderlichen ausgedrückt sei, wollen wir uns des Buchstabens Z bedienen, um den Werth der abhängigen Veränderlichen, wie er sich aus (1) ergiebt, zu bezeichnen, des Buchstabens ζ aber, um den aus (5) abgeleiteten Werth darzustellen. Diese letztere Gleichung ergiebt:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} p_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} p_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} p_3 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0.$$

Wenn wir nun diese Werthe der Differentialquotienten mit denen zur Uebereinstimmung bringen, welche durch die Gleichungen (2) gegeben sind, so erhalten wir die drei Gleichungen:

$$(6)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3}\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \end{aligned}$$

und diese bestimmen die Werthe von a_1, a_2, a_3 als Functionen von x_1, x_2, x_3 und der abhängigen Veränderlichen.

Da nun (5) eine Lösung der Differentialgleichung ist, so haben wir:

$$F(p_1, p_2, p_3, \zeta, x_1, x_2, x_3) = 0,$$

und da auch (1) eine Lösung ist, ebenso:

$$F(p_1, p_2, p_3, Z, x_1, x_2, x_3) = 0,$$

welche letztere befriedigt ist, wenn die Grössen a willkürliche Constanten sind. Diese letzte Gleichung wird aber auch befriedigt, wenn die Grössen a, anstatt willkürliche Constanten zu sein, Functionen der Veränderlichen werden, vorausgesetzt, dass diese Functionen derart sind, dass sie die Formen von p_1, p_2, p_3 ungeändert lassen; wir können daher die Grössen a, vorausgesetzt, dass die erforderlichen Bedingungen erfüllt sind, ersetzen durch die Functionen von x_1, x_2, x_3, die wir als ihre Werthe aus den Gleichungen (6) erhalten haben. Geschieht dies, so sind die Werthe von p_1, p_2, p_3 dieselben für die beiden Formen der Gleichung (A), und aus der Vergleichung dieser beiden Formen ergiebt sich, dass die Gleichung bestehen muss:

$$\zeta = Z,$$

wo in Z die Constanten a_1, a_2, a_3 ersetzt sind durch die für sie abgeleiteten Werthe.

Damit die Formen von p_1, p_2, p_3 für die neuen Werthe dieser Grössen a ungeändert bleiben, müssen die drei Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial x_1} &= -\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}\,p_1 \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial a_3}\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) \end{aligned}$$

zugleich mit den drei Gleichungen (6) befriedigt werden, und es müssen daher die Werthe von a_1, a_2, a_3 den Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial a_3}\frac{\partial a_3}{\partial x_1}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial a_3}\frac{\partial a_3}{\partial x_2}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_3}+\frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_3}+\frac{\partial f}{\partial a_3}\frac{\partial a_3}{\partial x_3}=0.$$

Da nun diese von der Form der Gleichungen (3) sind, vermöge deren wir von dem vollständigen Integral zu den beiden anderen Integralen übergehen konnten, so sind die Werthe der a unter denen enthalten, welche entweder das vollständige oder das singuläre oder das allgemeine Integral der Gleichung ergeben. Da ausserdem die nothwendigen Bedingungen erfüllt sind, so ist auch

$$\zeta = Z,$$

oder der aus der gegebenen Lösung abgeleitete Werth von z fällt mit dem einen oder dem anderen der drei Hauptintegrale zusammen.

Hierdurch ist unser Satz bewiesen und gezeigt, dass die angenommenen drei Classen alle möglichen Lösungen in sich schliessen.

Wenn bei der Auflösung der Gleichungen (6) die Grössen a sich als Constante herausstellen, so wird die gegebene Lösung ein besonderer Fall des vollständigen Integrals sein; stellen sie sich als Functionen der Veränderlichen dar und besteht zwischen ihnen eine Functionalbeziehung von der Form

$$a_3 = \varphi\,(a_1, a_2),$$

so ist die gegebene Lösung ein besonderer Fall des allgemeinen Integrals, und wenn sie sich als Functionen der Veränderlichen ergeben, zwischen denen keine Functionalbeziehung besteht, so ist die gegebene Lösung das singuläre Integral.

1. Aufgabe. Vorausgesetzt, man wisse, dass das vollständige Integral von $z = p\,q$ sei:

$$4\,z = \left(a\,x + \frac{y}{a} + b\right)^2,$$

untersuche man die Natur der Lösung:

$$4\,z - 2\,x\,y = (x^2 + y^2)\,sec\,\alpha + (x^2 - y^2)\,tang\,\alpha.$$

2. Aufgabe. Angenommen, man wisse, dass das vollständige Integral von $z = px + qy$ sei:

$$\log z = a \log x + (1-a) \log y + b,$$

so untersuche man die Natur der Lösung:

$$z = y\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

3. Aufgabe. Angenommen, man wisse, dass das vollständige Integral von $z = px + qy + pq$ sei:

$$z = ax + by + ab,$$

so untersuche man die Natur der Lösung:

$$z + xy = 0.$$

§. 182.

In dem Falle, wo nur zwei unabhängige und eine abhängige Veränderliche vorhanden sind, können die drei als Coordinaten eines Punktes im Raume angesehen und die Beziehungen zwischen den verschiedenen Integralen können **geometrisch gedeutet** werden.

Das vollständige Integral ist als eine Beziehung zwischen x, y und z die Gleichung einer Fläche und diese Gleichung enthält zwei willkürliche Parameter, so dass das vollständige Integral ein doppelt unendliches System von Flächen oder ein einfach unendliches System von Flächenfamilien darstellt. Dieses Integral ist von der Form:

$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0.$$

Um das allgemeine Integral zu erhalten, machen wir einen der willkürlichen Parameter zu einer willkürlichen Function des anderen, z. B. $b = \vartheta(a)$, und eliminiren a zwischen den Gleichungen:

$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0$$

$$b = \vartheta(a)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\,\vartheta'(a) = 0.$$

Diese Operation ist in Wirklichkeit äquivalent mit der Auswahl einer bestimmten Flächenfamilie aus dem System von Flächenfamilien als Repräsentantin und dem Aufsuchen ihrer Enveloppe.

Wenn eine besondere Familie genommen wird (was geschieht, sobald b zu einer bestimmten Function von a gemacht wird an Stelle einer willkürlichen Function), so ist die Gleichung der Enveloppe ein particulärer Fall des allgemeinen Integrals. Die obigen Gleichungen, so wie sie dastehen, repräsentiren eine Curve, die auf derjenigen Oberfläche der Familie liegt, deren Parameter a ist, während die Gleichung, welche durch Elimination von a aus ihnen hervorgeht, die Enveloppe der Familie darstellt; mithin berührt die Enveloppe diejenige Fläche, welche durch die beiden ersten Gleichungen dargestellt wird, längs der Linie, welche durch alle drei Gleichungen dargestellt wird. Diese Curve heisst die Charakteristik der Enveloppe, und das allgemeine Integral stellt somit die Enveloppe einer Flächenschaar dar, wenn man sich diese Enveloppe als aus ihren Charakteristiken entstanden denkt.

Um das singuläre Integral zu erhalten, eliminiren wir die Parameter a und b zwischen den Gleichungen:

$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} = 0.$$

Diese Operation entspricht der Auffindung der Enveloppe aller Flächen, welche in dem vollständigen Integral enthalten sind. Die obigen drei Gleichungen geben den Berührungspunkt der besonderen, durch die erste von ihnen dargestellten Fläche mit der allgemeinen Enveloppe. Das singuläre Integral repräsentirt demnach die allgemeine Enveloppe aller in dem vollständigen Integral enthaltenen Flächen.

Wenn nun die Elimination stattgefunden hat, so dass wir eine Beziehung zwischen x, y und z erhalten haben, so müssen wir erst untersuchen, ob die erhaltene Gleichung auch die der Enveloppe ist und nicht etwa die Gleichung eines der Oerter, welche durch dieselben Gleichungen dargestellt werden können. Solche Oerter sind z. B. der Ort der conischen Punkte und der Ort der Doppellinien, von denen keiner der Differentialgleichung genügt. Wir müssen daher das Resultat (wenn wir es nicht auf den ersten Blick als die Gleichung der Enveloppe erkennen können) in die Differentialgleichung substituiren und können es nur dann als singuläres Integral gelten lassen, wenn es überhaupt eine Lösung ist.

Es ist möglich, dass das ganze System von Flächen keine allgemeine Enveloppe zulässt, dann wird es aber auch für die betreffende Differentialgleichung kein singuläres Integral geben, und das Nichtvorhandensein desselben wird durch die Gleichungen angezeigt werden, welche wir gewöhnlich benutzen, um es zu erhalten. Beispiele hierzu werden nachher gegeben werden.

Als ein **Beispiel**, um die vorhergehende Discussion der geometrischen Beziehungen zwischen den Integralen zu veranschaulichen, betrachten wir die Gleichung

$$(1) \quad ax + by + cz = (a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

welche zwei von einander unabhängige Constanten enthält. Es ist leicht zu zeigen, dass die entsprechende Differentialgleichung lautet:

$$(A) \quad (xp + yq - z)^2 = 1 + p^2 + q^2,$$

und dass die allgemeine Enveloppe aller in (1) enthaltenen Ebenen die Kugel ist:

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Mithin ist (2) das singuläre Integral von (A), und die durch (2) dargestellte Kugel berührt jede der durch (1) dargestellten Ebenen in einem Punkte.

Um das allgemeine Integral zu erhalten, eliminiren wir a zwischen

$$ax + yf(a) + z\,[1 - a^2 - f^2(a)]^{\frac{1}{2}} = 1,$$

$$x + yf'(a) - z\,\frac{a + f(a)f'(a)}{[1 - a^2 - f^2(a)]^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

worin $f(a)$ eine willkürliche Function ist. Dieses ist augenscheinlich die Enveloppe einer Schaar von Ebenen, deren Gleichung nur einen Parameter enthält, sie ist also eine abwickelbare Fläche. Die Gleichung jeder abwickelbaren Fläche, welche die Kugel einhüllt, ist also in dem obigen allgemeinen Integral enthalten. Die Operation, durch welche b zu einer Function von a gemacht wird, ist gleichbedeutend mit dem Ziehen einer bestimmten Curve auf der Kugel, und die abwickelbare Fläche ist die Enveloppe der Tangentialebenen der Kugel in denjenigen Punkten, welche auf dieser Curve liegen.

§. 183.

Die Auseinandersetzung in §. 179 zeigt, wie das singuläre Integral aus dem vollständigen Integral hergeleitet werden kann;

es ist jedoch auch möglich, dasselbe wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen direct aus der Differentialgleichung abzuleiten.

Der Kürze wegen setzen wir voraus, dass nur zwei unabhängige Veränderliche vorhanden seien. Alsdann sei die Differentialgleichung:

$$\psi(x, y, z, p, q) = 0,$$

von welcher das vollständige Integral ist:

$$F(x, y, z, a, b) = 0,$$

worin a und b willkürliche Constanten sind. Das singuläre Integral wird erhalten, wenn wir die Gleichung $F = 0$ verbinden mit den Gleichungen:

$$(A) \quad \frac{\partial F}{\partial a} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0.$$

Da $F = 0$ das Integral der Differentialgleichung $\psi = 0$ ist, so werden die aus dem Integral abgeleiteten Werthe von z, p, q die Gleichung $\psi = 0$ identisch erfüllen, und durch Einsetzung der aus $F = 0$ abgeleiteten Werthe von p und q (aber nicht desjenigen von z) wird im Allgemeinen $\psi = 0$ gleichbedeutend werden mit der Integralgleichung. Ist nun diese letztere Substitution ausgeführt, so dass p und q durch Functionen von x, y, z, a, b ersetzt sind, so müssen wir, um das singuläre Integral zu finden, die analogen Gleichungen wie in (A) bilden, und diese Gleichungen sind:

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial b} + \frac{\partial \psi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial b} = 0.$$

Diese Gleichungen können auf zweierlei Art befriedigt werden:

1) dadurch, dass wir setzen:

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial q};$$

2) dadurch, dass, wenn $\frac{\partial \psi}{\partial p}$ und $\frac{\partial \psi}{\partial q}$ nicht verschwinden,

$$\frac{\partial p}{\partial a} \frac{\partial q}{\partial b} - \frac{\partial p}{\partial b} \frac{\partial q}{\partial a} = 0$$

ist. Die letztere Gleichung hat eine Beziehung zur Folge von der Form:

$$\varphi(p, q) = 0,$$

welche weder a noch b enthält, wohl aber die Grössen enthalten

kann, mit denen a und b in den Ausdrücken für p und q multiplicirt sind, d. h. Grössen, welche von x, y und z abhängen. Wenn beide willkürlichen Constanten in den Ausdrücken von p und q vorkommen (was nicht immer der Fall ist), so würde die Gleichung $\varphi = 0$ aussagen, dass sie in der That nur eine sind oder dass die eine von ihnen eine Function der anderen ist. Die benutzten Gleichungen geben dann das allgemeine Integral, auf welches es uns jetzt nicht ankommt.

Wir kehren also zurück zu

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = 0 \text{ und } \frac{\partial \psi}{\partial q} = 0.$$

Die Elimination von p und q zwischen diesen beiden und $\psi = 0$ wird eine Beziehung zwischen x, y, z liefern, welche unabhängig von jeder willkürlichen Constanten ist. Wenn diese Beziehung der Differentialgleichung genügt, so ist sie das singuläre Integral, und wenn andererseits das Integral nach dieser Methode gefunden worden ist, so muss man nothwendig prüfen, ob auch die Differentialgleichung dadurch befriedigt wird.

Der Grund, weshalb diese Vorsicht nöthig ist, ist demjenigen ähnlich, welcher die entsprechende Vorsicht bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen nöthig macht. Haben die dargestellten Flächen eine Enveloppe, so wird diese durch die Gleichungen

$$\psi = 0, \ \frac{\partial \psi}{\partial p} = 0, \ \frac{\partial \psi}{\partial q} = 0$$

wirklich gegeben werden. Dieselben Gleichungen werden aber auch befriedigt werden durch die Coordinaten jedes singulären Punktes auf einer der Flächen, welche durch das vollständige Integral dargestellt werden; der Ort dieser singulären Punkte ist jedoch augenscheinlich keine Lösung der Gleichung. Die Gleichungen werden ebenfalls befriedigt durch die Coordinaten jedes Punktes P, in welchem sich zwei verschiedene Flächen des Systems berühren, und somit durch die Gleichung der Fläche, welche der Ort dieser Punkte ist. Aber diese Fläche hat nicht nothwendig zur Tangentialebene in P die Tangentialebene, welche den beiden Flächen gemeinschaftlich ist, und daher sind diejenigen Werthe von p und q (welche ja die Richtungscosinusse der Tangentialebene bestimmen), die aus der Gleichung dieses neuen geometrischen Ortes abgeleitet sind, nicht die Werthe von p und q, welche der gegebenen Gleichung $\psi = 0$ genügen. Ein solcher geometrischer Ort entspricht dem, was wir früher den Ort der Berührungspunkte genannt haben (§. 28), und

da dieser geometrische Ort nicht der einzige (ausser der Enveloppe) ist, welcher vorkommen kann, so ist eine Untersuchung nothwendig, ob auch die Gleichung zwischen x, y, z der Differentialgleichung genügt.

1. Aufgabe. Die Differentialgleichung

$$z^2(1 + p^2 + q^2) = \lambda^2 \{(x + pz)^2 + (y + qz)^2\}$$

hat zu ihrem vollständigen Integral:

$$(x - a \cos \alpha)^2 + (y - a \sin \alpha)^2 + z^2 = \lambda^2 a^2,$$

wobei λ eine bestimmte Constante ist. Bilden wir die Enveloppe dieser Kugel, indem wir setzen:

$$F = (x - a \cos \alpha)^2 + (y - a \sin \alpha)^2 + z^2 - \lambda^2 a^2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0,$$

so finden wir leicht, dass dieselbe ist:

$$\lambda^2(x^2 + y^2 + z^2) = z^2.$$

Setzen wir nun:

$$\psi = z^2(1 + p^2 + q^2) - \lambda^2 \{(x + pz)^2 + (y + qz)^2\},$$

und befolgen wir die Vorschrift, nach welcher das singuläre Integral aus der Differentialgleichung abzuleiten ist, so erhalten wir:

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = 2pz^2 - 2\lambda^2 z(x + pz) = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = 2qz^2 - 2\lambda^2 z(y + qz) = 0.$$

Den letzten beiden Gleichungen wird genügt durch $z = 0$, welches, obwohl frei von p und q, doch keine Lösung der Differentialgleichung ist. In der That sieht man durch Zeichnung einer Figur leicht, dass $z = 0$ ein Ort der Berührungspunkte ist, da es diejenige Ebene ist, welche die Berührungspunkte der verschiedenen nicht auf einander folgenden Kugeln enthält, welche dadurch erhalten werden, dass man a und α alle möglichen Werthe giebt.

2. Aufgabe. Wir betrachten das System von Kegeln:

$$(x - a \cos \vartheta)^2 + (y - a \sin \vartheta)^2 = \left(\frac{z}{m} - \frac{a}{m^2}\right)^2,$$

in welchem m und ϑ die willkürlichen Constanten sind. Die entsprechende Differentialgleichung ist leicht zu finden. Die Gleichungen, welche die Enveloppe bestimmen, sind:

$$\sin\vartheta\,(x - a\cos\vartheta) - \cos\vartheta\,(y - a\sin\vartheta) = 0$$

$$\left(\frac{z}{m} - \frac{a}{m^2}\right)\left(-\frac{z}{m^2} + \frac{2a}{m^3}\right) = 0.$$

Diese werden sämmtlich befriedigt durch

$$x = a\cos\vartheta,\quad y = a\sin\vartheta,\quad z = \frac{a}{m},$$

und hieraus folgt:

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

während z willkürlich bleibt.

Die Gleichungen werden auch befriedigt durch

$$z = \frac{2a}{m},\quad x\sin\vartheta = y\cos\vartheta,$$

und das entsprechende Eliminationsresultat ist:

$$x^2 + y^2 = \left(a + \frac{z^2}{4a}\right)^2.$$

Die letzte Gleichung stellt die Enveloppe dar; das doppelt unendliche System von Kegeln wird erzeugt, indem alle die geraden Kreiskegel, deren Spitzen auf der Scheiteltangente einer Parabel liegen und deren eine Seitenkante zusammenfällt mit der durch die Spitze des Kegels gehenden Tangente der Parabel, um die Directrix der Parabel rotiren. Die Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2$$

stellt den Cylinder dar, auf welchem alle die (singulären) Kreise liegen, die die geometrischen Oerter für die Spitzen der Kegel bei der Rotation um die Directrix sind.

Zur weiteren Belehrung über die singulären Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung lese man eine Abhandlung von Darboux in den *Mémoires de l'Institut de France*, t. 27 (1880) nach.

Lagrange's lineare Differentialgleichung.

§. 184.

Wir haben gesehen, dass es unter den Integralen einer Differentialgleichung eins giebt — das allgemeine Integral —, in dessen Ausdruck eine willkürliche Function auftritt; die Ableitung der

Differentialgleichung aus dem Integral erfordert die Elimination dieser willkürlichen Function. Die einfachste Form, welche es für ein Integral dieser Art giebt, ist im Falle zweier unabhängigen Veränderlichen die Gleichung:

$$(1) \qquad \varphi(u, v) = 0,$$

in welcher φ ein willkürliches Functionssymbol ist und u und v bestimmte Functionen von x, y, z sind. Um φ zu eliminiren, differentiiren wir nach jeder der unabhängigen Veränderlichen und erhalten:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0,$$

und daher:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

oder geordnet:

$$(2) \qquad Pp + Qq = R,$$

worin:

$$\frac{P}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{Q}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial z}, & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z}, & \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{R}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}},$$

oder, was hiermit gleichbedeutend ist,

$$(3) \qquad \begin{aligned} P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \\ P\frac{\partial v}{\partial x} + Q\frac{\partial v}{\partial y} + R\frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

ist.

Wenn daher eine Differentialgleichung von der Form (2) gegeben ist, in welcher die Differentialquotienten linear auftreten, während die Grössen, mit denen dieselben multiplicirt sind, irgend welche Functionen von x, y, z sein können, so erhalten wir in (1) ein zugehöriges Integral, vorausgesetzt, dass wir u und v finden können, um sie in diese Integralgleichung einzusetzen. Eine Differentialgleichung von dieser Form heisst **linear**; die Schwierigkeit bei der Lösung derselben besteht nur in der Ableitung der Functionen u und v.

§. 185.

Wir wollen nun die Gleichungen $u = a$ und $v = b$ betrachten, worin a und b willkürliche Constanten sind, und die Differentialgleichung bilden, die ihnen entspricht. Wir erhalten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz = 0$$

und daher:

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{dy}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial z}, & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z}, & \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{dz}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

oder:

$$(4) \qquad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Dies sind die Differentialgleichungen, die $u = a$ und $v = b$ zu ihren Integralen haben; dieselben können unmittelbar aus den Coefficienten der Differentialgleichung gebildet werden. Wir erhalten daher die folgende **Regel** *):

Um ein Integral der linearen partiellen Differentialgleichung

$$Pp + Qq = R$$

zu erhalten, schreibe man die Hülfsgleichungen hin:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

und suche zwei von einander unabhängige Integrale der letzteren. Sind dieselben:

$$u = a \quad \text{und} \quad v = b,$$

---

*) Die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen sowie die Classification der Integrale von Gleichungen erster Ordnung ist zuerst von Lagrange gegeben worden. Die Hülfsgleichungen (4) werden zuweilen die Lagrange'schen Gleichungen genannt. Anm. d. Verf.

so ist ein Integral der partiellen Differentialgleichung gegeben durch:

$$\varphi(u, v) = 0,$$

worin φ eine willkürliche Function bezeichnet.

Eine willkürliche Functionalbeziehung zwischen u und v von irgend welcher Form genügt; z. B. können wir setzen:

$$u = \psi(v),$$

wo ψ eine willkürliche Function ist.

§. 186.

Vermittelst dieser Regel können wir ein Integral, welches eine willkürliche Function enthält, finden; es wird nun zu zeigen sein, dass es das allgemeinste Integral ist, das es giebt, insofern es alle Lösungen der Differentialgleichung in sich schliesst. Es möge

$$\psi(x, y, z) = 0$$

eine Lösung der Gleichung sein:

$$Pp + Qq = R,$$

während die nach obiger Regel gefundene Lösung

$$\varphi(u, v) = 0$$

ist.

Nach den Gleichungen (3) ist dann:

$$P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$P\frac{\partial v}{\partial x} + Q\frac{\partial v}{\partial y} + R\frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Wegen $\psi(x, y, z) = 0$ haben wir:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} p = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} q = 0.$$

Durch Substitution dieser Werthe von p und q in die Differentialgleichung ergiebt sich:

$$P\frac{\partial \psi}{\partial x} + Q\frac{\partial \psi}{\partial y} + R\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

Wir haben daher drei Gleichungen, welche linear sind in P, Q und R. Werden diese Grössen eliminirt, so erhalten wir:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x}, & \frac{\partial \psi}{\partial y}, & \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Es besteht daher eine bestimmte Functionalbeziehung zwischen ψ, u, v; dieselbe sei:

$$\psi = F(u, v),$$

worin F eine bestimmte Function ist. Die Lösung $\psi(x, y, z) = 0$ ist daher dieselbe wie

$$F(u, v) = 0,$$

und da F eine bestimmte Function ist, während φ eine willkürliche Function war, so ist diese Lösung enthalten in:

$$\varphi(u, v) = 0,$$

d. h. sie ist enthalten in der Lösung, die wir durch die in der Regel angeführte Methode erhalten haben.

Diese Lösung ist daher die **allgemeinste** Lösung von dieser Form, die es giebt; sie entspricht offenbar dem allgemeinen Integral.

§. 187.

Zusatz. Die Gleichungen $u - a = 0$ und $v - b = 0$ sind Integrale der Differentialgleichung. Denn die allgemeine Lösung kann geschrieben werden:

$$u = \psi(v),$$

worin ψ eine willkürliche Function ist. Nimmt man dann $\psi(v) = a v^0$, wo a eine willkürliche Constante bedeutet, so geht die Gleichung über in $u - a = 0$, welches das erste der angegebenen Integrale ist. Analog ergiebt sich das zweite.

Diese Resultate können auch unabhängig von dem Obigen gefunden werden. Der vorhergehende Paragraph zeigt, dass, damit

$\psi(x, y, z) = 0$ ein Integral sein könne, die Gleichung bestehen muss:

$$P\frac{\partial \psi}{\partial x} + Q\frac{\partial \psi}{\partial y} + R\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0;$$

nun sind aber die Gleichungen

$$P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$P\frac{\partial v}{\partial x} + Q\frac{\partial v}{\partial y} + R\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

wirklich erfüllt; mithin sind $u - a = 0$ und $v - b = 0$ Integrale.

§. 188.

Wir sehen daher, dass, wenn nur eine einzige willkürliche Function einfach (d. i. ohne irgend welche Ableitungen) in einer Integralgleichung vorkommt, die entsprechende Differentialgleichung nothwendig linear ist, und dass die lineare Differentialgleichung zu ihrem allgemeinsten Integral eine Gleichung hat, in welcher eine willkürliche Function vorkommt. Wir können daher schliessen, dass im Falle einer nicht linearen Differentialgleichung die willkürliche Function, welche zum allgemeinen Integral erforderlich ist, nicht in einer Weise auftreten kann, die analog ist derjenigen, in welcher die willkürliche Function in der vorigen Gleichung auftritt. In der That wird mit ihr zugleich ihr erster Differentialquotient in der allgemeinen Stammgleichung auftreten.

§. 189.

Im Vorhergehenden haben wir uns selbst auf den Fall zweier unabhängigen Veränderlichen beschränkt; der Beweis des Verfahrens im Falle von n unabhängigen Veränderlichen ist in allen Stücken derselbe wie der frühere und die entsprechende **Regel** lautet:

Um das allgemeinste Integral der linearen Gleichung

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \cdots + P_n p_n = R$$

zu erhalten, schreibe man die Hülfsgleichungen hin:

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R},$$

und suche n unabhängige Integrale derselben. Sind dieselben:

$$u_1 = a_1,\ u_2 = a_2, \ldots, u_n = a_n$$

und verbindet man diese Grössen u durch eine willkürliche Functionalbeziehung:

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$

so ist diese Gleichung das gesuchte Integral.

Der Beweis hiervon, sowie der des entsprechenden Zusatzes, nämlich dass $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2, \ldots, u_n = a_n$ Integrale der Gleichung sind, ist nicht schwierig.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$xp + yq = z.$$

Die Lagrange'schen Hülfsgleichungen sind:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

von denen zwei Integrale sind:

$$z = ay,\quad z = bx.$$

Daher ist die Lösung der Gleichung:

$$\varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{z}{x}\right) = 0.$$

Dieselbe lässt sich darstellen in den Formen:

$$\frac{z}{y} = \psi\left(\frac{z}{x}\right),\quad \frac{z}{y} = \chi\left(\frac{x}{y}\right),$$

die, wie leicht zu sehen, alle drei einander äquivalent sind.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$(mz - ny)p + (nx - lz)q = ly - mx.$$

Die Lagrange'schen Hülfsgleichungen sind:

$$\frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx},$$

und daher:

$$xdx + ydy + zdz = 0,\quad \text{also}\quad x^2 + y^2 + z^2 = a,$$

und

$$ldx + mdy + ndz = 0,\quad \text{also}\quad lx + my + nz = b,$$

und das Integral der Gleichung ist:

$$lx + my + nz = \varphi(x^2 + y^2 + z^2).$$

3. **Aufgabe.** Man löse die Gleichungen:

(1) $x^2 p - xyq + y^2 = 0.$

(2) $xzp + yzq = xy.$

(3) $(y^2 + z^2 - x^2)p - 2xyq + 2xz = 0.$

(4) $z - xp - yq = a(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}.$

(5) $(a - x)p + (b - y)q = c - z.$

(6) $(y^3 x - 2x^4)p + (2y^4 - x^3 y)q = 9z(x^3 - y^3).$

(7) $p \operatorname{tang} x + q \operatorname{tang} y = \operatorname{tang} z.$

(8) $(11x - 6y + 2z)p - (6x - 10y + 4z)q = 2x - 4y + 6z.$

(9) $x_1 p_1 + (z + x_3)p_2 + (z + x_2)p_3 = x_2 + x_3.$

4. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$(x_2 + x_3 + z)p_1 + (x_3 + x_1 + z)p_2 + (x_1 + x_2 + z)p_3 = x_1 + x_2 + x_3$$

Die Lagrange'schen Hülfsgleichungen sind:

$$\frac{dx_1}{x_2 + x_3 + z} = \frac{dx_2}{x_3 + x_1 + z} = \frac{dx_3}{x_1 + x_2 + z} = \frac{dz}{x_1 + x_2 + x_3}.$$

Jeder von diesen gleichen Brüchen ist gleich:

$$\frac{dz - dx_1}{-(z - x_1)} = \frac{dz - dx_2}{-(z - x_2)} = \frac{dz - dx_3}{-(z - x_3)} = \frac{dz + dx_1 + dx_2 + dx_3}{3(z + x_1 + x_2 + x_3)}.$$

Die Integrale hiervon sind:

$$\frac{c_1}{z - x_1} = \frac{c_2}{z - x_2} = \frac{c_3}{z - x_3} = (z + x_1 + x_2 + x_3)^{1/3},$$

und daher ist das Integral der vorgelegten Gleichung:

$$\Phi\{(z - x_1)S^{1/3}, (z - x_2)S^{1/3}, (z - x_3)S^{1/3}\} = 0,$$

worin S steht für

$$z + x_1 + x_2 + x_3.$$

5. **Aufgabe.** Man zeige, dass, wenn in der letzten Aufgabe für $z = 0$ die Veränderlichen durch die Relation

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 1$$

verbunden sind, alsdann das Integral ist:

$$\{(x_1 - z)^3 + (x_2 - z)^3 + (x_3 - z)^3\}^4 (x_1 + x_2 + x_3 + z)^3 = (x_1 + x_2 + x_3 - 3z)^3.$$

(Mansion).

6. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = nz.$

(2) $p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = az + \frac{x_1 x_2}{x_3}.$

(3) $x_2 x_3 z p_1 + x_3 x_1 z p_2 + x_1 x_2 z p_3 = x_1 x_2 x_3.$

Hauptformen.

§. 190.

Bevor wir die Methode angeben, welche auf die Integration der allgemeinsten Gleichung erster Ordnung anwendbar ist, ist es zweckmässig, auf wenige Hauptformen von Differentialgleichungen aufmerksam zu machen, welche ein sehr kurzes Integrationsverfahren zulassen und auf deren eine oder andere viele Gleichungen sich reduciren lassen. Da die allgemeine Methode gewöhnlich viel länger ist, als die, welche für irgend eine von diesen Hauptformen zum Ziele führt, so ist es vortheilhaft, zunächst zu untersuchen, ob die Gleichung unter einer von ihnen enthalten ist.

§. 191.

I. Hauptform: Gleichungen, in denen die Veränderlichen nicht explicit vorkommen; derartige Gleichungen können in der Form geschrieben werden:

$$\psi\,(p, q) = 0.$$

Eine Lösung von dieser ist augenscheinlich:

$$z = ax + by + c,$$

vorausgesetzt, dass a und b der Bedingung genügen:

$$\psi\,(a, b) = 0.$$

Ist dann $b = f(a)$ der aus dieser Gleichung sich ergebende Werth von b, so ist das vollständige Integral der Gleichung:

$$z = ax + yf(a) + c.$$

Das allgemeine Integral und das singuläre Integral muss bei jeder Gleichung ebenso gut angegeben werden, wie das vollständige Integral, sonst ist die Gleichung nicht als vollständig gelöst zu betrachten.

Gleichungen, welche nicht unmittelbar unter diese Hauptform fallen, können doch häufig durch Aenderung der Veränderlichen auf diese Form gebracht werden. So können z. B. Functionen von x, welche in der Gleichung vorkommen, eine Verbindung mit p und Functionen von y eine Verbindung mit q gestatten. Eine solche für irgend eine Gleichung erforderliche Aenderung der Veränderlichen kann aber nur nach den besonderen Verhältnissen der Gleichung bestimmt werden; es giebt keine allgemeine Vorschrift, da eine Gleichung nicht immer auf diese Form gebracht werden kann.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$pq = k.$$

Das Vorhergehende zeigt, dass

$$z = ax + by + c$$

eine Lösung ist, vorausgesetzt, dass

$$ab = k$$

ist. Daher ist das vollständige Integral:

$$z = ax + \frac{k}{a} y + c.$$

Das allgemeine Integral wird erhalten, wenn man a aus den Gleichungen:

$$z = ax + \frac{k}{a} y + \varphi(a)$$

$$0 = x - \frac{k}{a^2} y + \varphi'(a),$$

in denen φ willkürlich ist, eliminirt.

Das singuläre Integral, falls ein solches existirt, wird bestimmt durch die Gleichungen:

$$z = ax + \frac{k}{a} y + c$$

$$0 = x - \frac{k}{a^2} y$$

$$0 = 1;$$

die letzte Gleichung zeigt, dass das singuläre Integral nicht existirt.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$pq = x^m y^n z^l.$$

Dieselbe kann auf die Form gebracht werden:

$$\frac{z^{-\frac{1}{2}l}\,dz}{x^m\,dx}\,\frac{z^{-\frac{1}{2}l}\,dz}{y^n\,dy} = 1.$$

Man setze:

$$dZ = z^{-\frac{1}{2}l}dz, \quad \text{so dass} \quad (1 - \tfrac{1}{2}l)\,Z = z^{1-\frac{1}{2}l}$$
$$d\xi = x^m\,dx, \quad \text{„ „} \quad (m+1)\,\xi = x^{m+1}$$
$$d\eta = y^n\,dy, \quad \text{„ „} \quad (n+1)\,\eta = y^{n+1},$$

alsdann wird die Gleichung:

$$\frac{\partial Z}{\partial \xi}\,\frac{\partial Z}{\partial \eta} = 1,$$

welche in der letzten Gleichung enthalten ist.

3. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $p^2 + q^2 = m^2$.

(2) $a(p+q) = z$.

(3) $x^2 p^2 + y^2 q^2 = z$.

(4) $p^m \sec^{2m} x + z^l q^n \operatorname{cosec}^{2n} y = z^{\frac{lm}{m-n}}$.

(5) $p^2 + q^2 = npq$.

(6) $p_1^m + p_2^m + p_3^m = 1$.

(7) $z p_1 p_2 p_3 = x_1 x_2 x_3$.

(8) $q^2 y^2 = z(z - px)$.

§. 192.

Die in der Form

$$\psi(p, q) = 0$$

enthaltenen Gleichungen haben **eine wichtige geometrische Bedeutung.** Bekanntlich ist die Gleichung der Tangentialebene der Fläche

$$z = F(x, y)$$

im Punkte ξ, η, ζ:

$$z = (x - \xi)\frac{\partial F}{\partial \xi} + (y - \eta)\frac{\partial F}{\partial \eta} + F(\xi, \eta),$$

und die Fläche ist die Enveloppe der Tangentialebenen. Wenn nun zwischen $\frac{\partial F}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial F}{\partial \eta}$ eine Relation

$$\psi\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}, \frac{\partial F}{\partial \eta}\right) = 0$$

besteht, so sind alle Grössen ξ, η, $\frac{\partial F}{\partial \xi}$, $\frac{\partial F}{\partial \eta}$ Functionen einer einzigen Grösse, und deshalb giebt es nur einen Parameter in der Gleichung der Tangentialebene. Nun ist aber die Enveloppe einer Ebene, deren Gleichung von dieser Form ist, eine abwickelbare Fläche, und somit ist die betrachtete Fläche eine abwickelbare Fläche.

Es folgt daher, dass

$$\psi(p, q) = 0$$

die allgemeine Differentialgleichung einer Schaar von **abwickelbaren** Flächen ist; und das entsprechende allgemeine Integral ist die Integralgleichung der Schaar.

§. 193.

II. Hauptform. Bei dem Versuch, eine Gleichung auf die vorhergehende Hauptform zu bringen, kann es vorkommen, dass sich zwar die unabhängigen Veränderlichen aus der Gleichung wegschaffen lassen, so dass sie nicht explicit darin vorkommen, dass sich aber nicht die abhängige Veränderliche fortschaffen lässt. Alsdann wird die Gleichung von der Form sein:

$$\chi(z, p, q) = 0.$$

Wir nehmen versuchsweise als Lösung die Gleichung an:

$$z = f(x + a y) = f(\xi)$$

(wo ξ für $x + a y$ geschrieben ist), worin a eine willkürliche Constante ist. Wir erhalten dann:

$$p = \frac{dz}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{dz}{d\xi}$$

$$q = \frac{dz}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} = a \frac{dz}{d\xi},$$

und die Substitution dieser Werthe in die Gleichung ergiebt:

$$\chi\left(z \frac{dz}{d\xi}, a \frac{dz}{d\xi}\right) = 0.$$

Dies ist keine partielle Differentialgleichung mehr, da jetzt nur noch eine einzige unabhängige Veränderliche vorhanden ist. Diese unabhängige Veränderliche kommt nicht explicit vor; somit fällt die Gleichung unter die IV. Hauptform (§. 18) der gewöhnlichen Diffe-

rentialgleichungen erster Ordnung. Löst man sie nach $\frac{dz}{d\xi}$ auf, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$\frac{dz}{d\xi} = \varphi(z, a),$$

deren Lösung ist:

$$\xi + b = \int \frac{dz}{\varphi(z, a)},$$

oder:

$$x + ay + b = F(z, a).$$

Dies ist das vollständige Integral; das allgemeine und das singuläre Integral können nach der gewöhnlichen Methode gefunden werden.

1. **Aufgabe.** Man löse die Gleichung:

$$9(p^2 z + q^2) = 4.$$

Machen wir dieselben Substitutionen wie bei dem vorstehenden Hauptfalle, so wird:

$$9\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 (a^2 + z) = 4,$$

oder:

$$\frac{3}{2}\, dz\, (a^2 + z)^{\frac{1}{2}} = d\xi,$$

deren Integral ist:

$$(z + a^2)^{\frac{3}{2}} = \xi + c.$$

Das vollständige Integral der Gleichung ist somit:

$$(z + a^2)^3 = (x + ay + c)^2.$$

Das allgemeine Integral wird erhalten durch Elimination von a aus den Gleichungen:

$$(z + a^2)^3 = [x + ay + \vartheta(a)]^2$$
$$3a(z + a^2)^2 = [x + ay + \vartheta(a)]\,[y + \vartheta'(a)],$$

worin ϑ eine willkürliche Function ist.

Es ist nicht schwer zu beweisen, dass es kein singuläres Integral giebt.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $p^2 = z^2(1 - pq)$.
(2) $p = (qy + z)^2$.
(3) $p(1 + q^2) = q(z - a)$.
(4) $1 = p_2 p_3 + p_3 p_1 z + p_1 p_2 z^2$.
(5) $p_1^2 + z p_2^2 + z^2 p_3^2 = z^3 p_1 p_2 p_3$.

§. 194.

Die Beziehung zwischen dem Integral und der Differentialgleichung gestattet eine **geometrische** Interpretation. Der erste Schritt bei dem Lösungsprocesse besteht darin, dass man ξ für $x + ay$ setzt, und dies ist gleichbedeutend mit einer Drehung der Achsen in der xy-Ebene um einen Winkel, welcher gleich *arc tang* a ist, und mit einer Vergrösserung der Coordinaten in dieser Ebene in dem Verhältniss von $(1 + a^2)^{1/2} : 1$. Es wird dann angenommen, dass z eine Function von ξ, aber unabhängig von der Coordinate sei, welche der neuen y-Achse parallel ist. Nun stellt

$$z = f(\xi)$$

einen Cylinder dar, dessen Achse der neuen y-Achse parallel ist, und daher giebt die Gleichung diejenigen Cylinder, welche dieser Bedingung genügen. Kehren wir nun wieder zu unseren ursprünglichen Achsen zurück, so ist, da a eine willkürliche Constante ist, die ξ-Achse eine beliebige Linie in der Ebene, und dasselbe gilt von der Linie, welche als die neue y-Achse genommen war. Es folgt somit, dass das, was wir durch unser Integrationsverfahren finden, sämmtliche Cylinder sein werden, deren Achsen in der xy-Ebene gelegen sind und die der gegebenen Differentialgleichung genügen.

§. 195.

III. Hauptform. Bei dem Versuch, eine gegebene Gleichung auf die erste Hauptform zu reduciren, kann es vorkommen, dass sich z wegschaffen lässt, so dass es nicht mehr explicit in der Gleichung auftritt, dass aber x und y bleiben und alsdann die Functionen von p und x und gleicherweise die Functionen von q und y mit einander verbunden werden können. Die Gleichung wird alsdann die Form annehmen:

$$\varphi(x, p) = \psi(y, q).$$

Wir nehmen versuchsweise als Lösung an, dass jede dieser gleichen Grössen gleich einer willkürlichen Constanten a sei. Aus der ersten der so erhaltenen Gleichungen ergiebt sich dann:

$$p = \vartheta_1(x, a),$$

und aus der zweiten:

$$q = \vartheta_2(y, a).$$

Integrirt man jede von ihnen, so findet man aus der ersten:

$$z = f_1(x, a) + \text{einer von } x \text{ unabhängigen Grösse}$$

und aus der zweiten:

$$z = f_2(y, a) + \text{einer von } y \text{ unabhängigen Grösse.}$$

Diese sind offenbar enthalten in der Gleichung

$$z = f_1(x, a) + f_2(y, a) + b,$$

und äquivalent mit derselben, wobei b eine willkürliche Constante ist. Dies ist eine Lösung der ursprünglichen Gleichung; da sie zwei willkürliche Constanten enthält, so ist es das vollständige Integral.

Das allgemeine Integral und das singuläre Integral, falls ein solches existirt, sind aus diesem in der gewöhnlichen Weise abzuleiten.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$p^2 + q^2 = x + y.$$

Schreibt man die Gleichung in der Form:

$$p^2 - x = -(q^2 - y),$$

so fällt sie unter diese Hauptform, und wir setzen daher:

$$p^2 - x = y - q^2 = a.$$

Hieraus folgt:

$$p = (x + a)^{\frac{1}{2}}$$

$$q = (y - a)^{\frac{1}{2}},$$

und daher:

$$z = \frac{2}{3}(x + a)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(y - a)^{\frac{3}{2}} + b,$$

welches das vollständige Integral ist.

Das allgemeine Integral erhält man durch Elimination von a aus

$$z = \frac{2}{3}(x + a)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(y - a)^{\frac{3}{2}} + \chi(a)$$

$$0 = (x + a)^{\frac{1}{2}} - (y - a)^{\frac{1}{2}} + \chi'(a),$$

worin χ eine willkürliche Function ist, und ein singuläres Integral giebt es nicht.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $z^2(p^2 + q^2) = x^2 + y^2.$

(2) $q = xp + p^2.$

(3) $p^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}} = 2x.$

(4) $p^2 - y^3 q = x^2 - y^2.$

3. Aufgabe. Man zeige, dass diese Methode angewendet werden kann auf die Lösung von Gleichungen von der Form:

$$f_1(p_1, x_1) + f_2(p_2, x_2) + f_3(p_3, x_3) = 0$$

und löse hiernach vollständig die Gleichung:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

§. 196.

IV. Hauptform. In dieser Classe sind diejenigen Gleichungen mit partiellen Differentialquotienten enthalten, welche analog sind den zur Clairaut'schen Form gehörigen gewöhnlichen Differentialgleichungen. Für zwei unabhängige Veränderliche werden sie dargestellt durch:

$$z = px + qy + \varphi(p, q),$$

wo φ eine bestimmte Function ist.

Eine Lösung hiervon ist:

$$z = ax + by + \varphi(a, b),$$

was unmittelbar verificirt werden kann. Da sie zwei willkürliche Constanten enthält, so ist sie das vollständige Integral; das allgemeine Integral wird in der üblichen Weise gefunden und in der Regel existirt auch ein singuläres Integral.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $z = px + qy + pq,$

(2) $z = px + qy + (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}},$

(3) $z = px + qy + (\alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma)^{\frac{1}{2}},$

(4) $z = px + qy + 3p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{3}},$

und bestimme in jedem Falle sowohl das singuläre wie das vollständige Integral.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $z = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + f(p_1, p_2, p_3),$

(2) $z = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} p_\mu x_\mu + (n+1)(p_1 p_2 \ldots p_n)^{\frac{1}{n+1}},$

und bestimme das singuläre Integral in jedem Falle.

Dualitätsprincip.

§. 197.

Es besteht bei den partiellen Differentialgleichungen eine bemerkenswerthe Dualität, vermöge deren jede Gleichung mit einer anderen derselben Ordnung durch **Relationen von vollkommen reciprokem Charakter** verbunden ist. Wir werden hier nur Gleichungen **erster** Ordnung betrachten.

Betrachten wir nur den Fall von zwei unabhängigen Veränderlichen, so setzen wir als unsere neue abhängige Veränderliche:

$$Z = px + qy - z,$$

und daher:

$$dZ = x\,dp + y\,dq.$$

Als neue unabhängige Veränderlichen nehmen wir nun p und q, die wir der Symmetrie wegen mit X und Y bezeichnen, so dass

$$X = p \text{ und } Y = q$$

ist, und haben dann:

$$x = \frac{\partial Z}{\partial p} = \frac{\partial Z}{\partial X} = P$$

$$y = \frac{\partial Z}{\partial q} = \frac{\partial Z}{\partial Y} = Q,$$

und somit:

$$z = PX + QY - Z,$$

so dass die Relationen zwischen den Veränderlichen, wie oben behauptet, reciprok sind.

Wenn wir nun eine Gleichung von der Form haben:

$$\psi\,(x, y, z, p, q) = 0,$$

so transformiren sie die obigen Relationen in:

$$\psi\,(P, Q, PX + QY - Z, X, Y) = 0.$$

Ist also das Integral der einen von diesen bekannt, so kann das der anderen durch einen algebraischen Eliminationsprocess gefunden werden. Ist z. B. eine Lösung der zweiten gegeben oder ableitbar in der Form:

$$\varphi\,(Z, X, Y) = 0,$$

so haben wir:

$$P\frac{\partial\varphi}{\partial Z}+\frac{\partial\varphi}{\partial X}=0=Q\frac{\partial\varphi}{\partial Z}+\frac{\partial\varphi}{\partial Y},$$

d. i.:

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial Z}+\frac{\partial\varphi}{\partial X}=0$$

$$y\frac{\partial\varphi}{\partial Z}+\frac{\partial\varphi}{\partial Y}=0$$

und:

$$-z\frac{\partial\varphi}{\partial Z}=Z\frac{\partial\varphi}{\partial Z}+X\frac{\partial\varphi}{\partial X}+Y\frac{\partial\varphi}{\partial Y}.$$

Die Elimination von X, Y, Z aus diesen vier Gleichungen wird eine Gleichung in x, y, z ergeben, welche eine Lösung sein wird von

$$\psi(x, y, z, p, q)=0.$$

1. Aufgabe. Das einfachste Beispiel einer Gleichung, welche nach dieser Methode behandelt werden kann, ist die, welche unter die Hauptform IV (§. 196) fällt. Da die Gleichung ist:

$$z=px+qy+f(p,q),$$

so ist die transformirte Gleichung keine Differentialgleichung, sondern eine algebraische Gleichung, nämlich:

$$-Z=f(X, Y).$$

Betrachten wir insbesondere die Gleichung:

$$z=px+qy+p^2+q^2,$$

so ist die transformirte Gleichung:

$$-Z=X^2+Y^2.$$

Daher:

$$x=\frac{\partial Z}{\partial X}=-2X \text{ und } y=\frac{\partial Z}{\partial Y}=-2Y,$$

und:

$$z=X\frac{\partial Z}{\partial X}+Y\frac{\partial Z}{\partial Y}-Z=-(X^2+Y^2).$$

Eliminiren wir daher die Grössen X, Y, Z, so erhalten wir:

$$-4z=x^2+y^2,$$

die, wie leicht zu sehen, die singuläre Lösung von

$$z=px+qy+p^2+q^2$$

ist.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $(xp + yq)(z - px - qy) + pq = 0.$

(2) $z + 1 - x(x + p) - y(y + q) = 0.$

(3) $p^2(x^2 - x) + 2pqxy + q^2(y^2 - y) - 2pxz - 2qyz + z^2 = 0.$

(4) $(px + qy - z)(p^2 x + q^2 y)^{\frac{1}{2}} = pq.$

3. Aufgabe. Man zeige, dass die Gleichungen

(1) $x f_1(z - px - qy, p, q) + y f_2(z - px - qy, p, q) = f_3(z - px - qy, p, q),$

(2) $F(z - px - qy, x, y) = 0$

durch die vorhergehenden Substitutionen sich auf Hauptformen zurückführen lassen.

4. Aufgabe. Man zeige, dass die Gleichung

$$x f_1(y, p, z - px) + q f_2(y, p, z - px) = f_3(y, p, z - px)$$

auf die Lagrange'sche Form reducirbar ist, wenn man die Veränderlichen so ändert, dass p und y die neuen unabhängigen Veränderlichen sind und $z - px$ die neue abhängige Veränderliche wird.

Hiernach löse man die Gleichung:

$$q(y - b)^2 + 2pxz = z^2 + xp^2(x + 1).$$

5. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$(z - px - qy)^2 = 1 + p^2 + q^2.$$

§. 198.

Das im vorigen Paragraphen dargestellte Verfahren der Herleitung einer Differentialgleichung aus einer anderen ist in Wirklichkeit nur eine Uebertragung des geometrischen Princips der Dualität zwischen Flächen in die Analysis. Wenn wir eine feste Oberfläche zweiter Ordnung annehmen, die mit Σ bezeichnet sein möge, so ist mit jeder Fläche S eine andere Fläche S' verbunden, welche ihre reciproke Polare heisst und die Enveloppe der Polarebenen der Punkte der Fläche S mit Bezug auf Σ ist; und umgekehrt ist die Fläche S die reciproke Polare von S', da sie die Enveloppe der Polarebenen der Punkte von S' mit Bezug auf Σ ist.

Die reciproke Polare einer Fläche hängt von der Hülfsfläche zweiter Ordnung Σ ab und ist verschieden für verschiedene solche Flächen. Die am häufigsten gewählte Oberfläche zweiter Ordnung (wegen der geometrischen Einfachheit) ist die Kugel, deren Centrum der Anfangspunkt der Inversion ist.

Als Hülfsfläche zweiter Ordnung wollen wir nicht die

Kugel, sondern ein Rotationsparaboloid betrachten, dessen Gleichung ist:

$$x^2 + y^2 = 2z.$$

Der Tangentialebene im Punkte A der Fläche S entspricht ein Punkt A' der Fläche S', und dem Punkte A entspricht die Tangentialebene an S' im Punkte A'. Es seien x, y, z, p, q die zum Punkte A gehörigen und X, Y, Z, P, Q die zu A' gehörigen entsprechenden Grössen.

Die Tangentialebene im Punkte x, y, z der gegebenen Fläche S wird dargestellt durch:

$$\zeta - z = p\,(\xi - x) + q\,(\eta - y),$$

(wo ξ, η, ζ laufende Coordinaten sind) und die Polarebene des Punktes X, Y, Z mit Bezug auf die angenommene Fläche zweiter Ordnung wird gegeben durch:

$$X\xi + Y\eta - \zeta - Z = 0.$$

Da aber die beiden Flächen S und S' reciproke Polaren sind, so sind diese beiden Ebenen dieselben; eine Vergleichung ihrer Gleichungen giebt:

$$X = p, \quad Y = q, \quad Z = px + qy - z.$$

Nimmt man ebenso die Tangentialebene der Fläche S' im Punkte X, Y, Z und beachtet man, dass sie die Polarebene des Punktes x, y, z in Bezug auf die Fläche zweiter Ordnung ist, so müssen wir die Gleichungen haben:

$$x = P, \quad y = Q, \quad z = PX + QY - Z.$$

Diese beiden Reihen von Gleichungen sind dieselben, wie die, welche wir bei der vorhergehenden Methode angewandt haben.

Es können noch andere Beziehungen abgeleitet werden, wenn man eine andere Hülfsoberfläche zweiter Ordnung, in Bezug auf welche die Inversion ausgeführt werden soll, annimmt; die vorstehenden scheinen aber die einfachsten, welche man finden kann.

§. 199.

Das allgemeine Integral einer Differentialgleichung enthält eine willkürliche Function. Es könnte auch erforderlich werden, ein Integral zu suchen, welches gewissen Bedingungen genügt; dieses letztere wird man dann erhalten, wenn man die willkürliche Function richtig bestimmt.

Das Verfahren ist analog demjenigen, welches man bei gewöhnlichen Differentialgleichungen einschlägt, wenn man darin die willkürlichen Constanten durch eine oder mehrere besondere Beziehungen zwischen speciellen Werthen der Veränderlichen bestimmt.

Bei jedem besonderen Problem wird die willkürliche Function mit Hülfe der speciellen Bedingungen bestimmt.

1. Aufgabe. Bekanntlich drückt die Gleichung

$$ap + bq = 1$$

aus, dass die Normale der durch die Integralgleichung dargestellten Fläche senkrecht steht zu einer Linie, deren Richtungscosinusse zu a, b, 1 proportional sind. Es ist dies die Eigenschaft einer cylindrischen Fläche, deren Achse dieser Linie parallel ist. Das entweder nach der Lagrange'schen Methode oder nach der auf die Hauptform I angewandten Methode erhaltene Integral ist:

$$x - az = \varphi(y - bz),$$

wo φ willkürlich ist. Wir nehmen an, dass man die Gleichung eines Cylinders haben wolle, dessen Achse parallel zu der Linie $(a, b, 1)$ ist und der durch die in der xy-Ebene liegende Curve $x^2 - y^2 = 1$ hindurchgeht. Den Schnitt der obigen Fläche mit der xy-Ebene erhält man, wenn man $z = 0$ setzt; derselbe ist also dargestellt durch

$$x = \varphi(y).$$

Den angenommenen Bedingungen zufolge müsste sein:

$$x^2 = 1 + y^2.$$

Eine Vergleichung beider Gleichungen zeigt, dass

$$\varphi(y) = (1 + y^2)^{1/2}$$

und somit

$$\varphi(y - bz) = \{1 + (y - bz)^2\}^{1/2}$$

ist. Mithin ist die gesuchte Gleichung

$$x - az = \{1 + (y - bz)^2\}^{1/2}$$

oder, von den Wurzelgrössen befreit:

$$(x - az)^2 - (y - bz)^2 = 1.$$

2. Aufgabe. Man beweise, dass die Gleichung

$$p(x - a) + q(y - b) = z - c$$

eine Schaar von Kegeln darstellt, welche den festen Punkt (a, b, c) zur

Spitze haben, und zeige, dass diejenige Fläche der Schaar, welche durch den in der xy-Ebene liegenden Kreis

$$x^2 + y^2 = 1$$

hindurchgeht, die Gleichung hat:

$$(az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = (z - c)^2.$$

3. Aufgabe. Man bestimme das Integral der Gleichung

$$p(ny - mz) + q(lz - nx) = mx - ly$$

derart, dass der Schnitt der dadurch dargestellten Fläche mit der xy-Ebene ein Kegelschnitt mit der numerischen Excentricität e ist, dessen Mittelpunkt auf der Linie

$$e^2 + (1 - e^2)(lx + my) = 0$$

liegt.

Allgemeine Auflösungsmethode.

§. 200.

Wir gehen nun zur Betrachtung einer allgemeineren Auflösungsmethode über, die man theils Lagrange, theils Charpit verdankt; sie ist anwendbar auf die allgemeine Gleichung, welche dargestellt sein möge durch

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

und ihr Erfolg hängt, wie man sehen wird, ab von der Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Wenn wir ausser der vorstehenden Beziehung noch eine andere zwischen den Veränderlichen und den Differentialquotienten haben, so können wir die beiden als ein Paar simultaner Gleichungen betrachten, welche, im Falle sie gelöst sind, p und q als explicite Functionen von x, y und z ergeben. Werden die so erhaltenen Werthe in die Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

eingesetzt, so wird dieselbe dadurch entweder unmittelbar oder nach Multiplication mit einem gewissen Factor integrirbar werden, und das Integral wird eine Lösung der ursprünglichen Gleichung sein, da die Werthe von p und q, welche aus ihr sich ergeben, durch den umgekehrten Process aus dieser Gleichung erhalten worden sind. Eine andere Beziehung zwischen den Grössen möge durch

$$\Phi(x, y, z, p, q) = 0$$

dargestellt werden; können wir dann die Form von Φ finden, so werden wir uns dieses Auflösungsverfahrens bedienen können.

§. 201.

Nun ergiebt das Integral der Gleichung z (und daher auch p und q) als Function von x und y; was für Functionen dieses auch sein mögen, sie werden, in die Gleichungen $F = 0$ und $\Phi = 0$ eingesetzt, beide identisch erfüllen. Denkt man sich die Werthe von z, p, q (die bis jetzt unbekannt sind) eingesetzt, so werden die partiellen Differentialquotienten der linken Seiten von beiden Gleichungen, genommen nach x und y, sämmtlich verschwinden, und somit ist:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p + \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} q + \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Eliminirt man $\frac{\partial p}{\partial x}$ aus den ersten beiden Gleichungen, so erhält man

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + p \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + \frac{\partial q}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial \Phi}{\partial q}\right) = 0,$$

und eliminirt man $\frac{\partial q}{\partial y}$ aus den letzten beiden, so wird:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + q \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + \frac{\partial p}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial \Phi}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) = 0.$$

Nun ist aber:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial p}{\partial y};$$

es verschwinden daher, wenn wir die letzten beiden Gleichungen, so wie sie dastehen, addiren, die mit diesen Grössen behafteten Glieder aus dem Resultat, und dieses kann geordnet und in der Form geschrieben werden:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\,\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p} + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\,\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial q}$$

$$+\left(-p\,\frac{\partial F}{\partial p} - q\,\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left(-\frac{\partial F}{\partial p}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left(-\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0.$$

Diese Gleichung können wir als eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung zur Bestimmung von Φ ansehen. Die auf diese Gleichung anwendbare Methode ist daher die bei der Lagrange'schen Gleichung benutzte; wir schreiben die Gleichungen nieder (§. 189):

$$\frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x} + p\,\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y} + q\,\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{dz}{-p\,\frac{\partial F}{\partial p} - q\,\frac{\partial F}{\partial q}}$$

$$= \frac{dx}{-\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{-\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{d\Phi}{0},$$

und bestimmen deren Integrale. Damit diese Gleichungen bestehen können, muss

$$d\Phi = 0$$

oder

$$\Phi = A$$

sein, wo A eine willkürliche Constante ist. Kann man ein anderes Integral finden, indem man irgend zwei der ersten fünf Brüche gleichsetzt, so lässt sich dasselbe in der Form schreiben:

$$u = B.$$

Nach dem Zusatze in §. 189 ist $u = B$ eine Lösung der Differentialgleichung, welche Φ bestimmt. Nun ist aber $\Phi = 0$ die Relation zwischen x, y, z, p, q, welche wir suchen, und je einfacher diese Relation ist, um so leichter wird die Ableitung der Werthe von p und q aus $\Phi = 0$ und $F = 0$ sein. Wir können daher als die gesuchte Relation die Gleichung

$$u = B$$

nehmen, d. h. wir können jedes beliebige Integral des obigen Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen nehmen, vorausgesetzt,

dass entweder p oder q oder beide darin vorkommen. Haben wir ein solches Integral gefunden, so verbinden wir es mit $F = 0$ und wenden das im vorhergehenden Paragraphen angegebene Verfahren an.

§. 202.

Der folgende **Satz** ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Verfahren des vorigen Paragraphen, oder er kann als eine blosse Wiederholung des dort erhaltenen Resultats betrachtet werden.

Wenn zwei Gleichungen erster Ordnung, welche dargestellt werden durch

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$
$$\Phi(x, y, z, p, q) = 0,$$

so beschaffen sind, dass sie der Relation

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$$
$$+ p\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + q\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = 0$$

identisch genügen, und wenn dieselben als zwei simultane Gleichungen betrachtet werden, durch welche sich p und q als Functionen von x, y, z bestimmen lassen, so werden die aus ihnen abgeleiteten Werthe von p und q, in den Ausdruck

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

eingesetzt, denselben zu einem vollständigen Differential machen.

Der Relation kann man noch eine andere Form geben. Setzt man:

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}$$
$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}$$

und analog für Φ, so lässt sich die Gleichung leicht auf die Form bringen:

$$F_x\frac{\partial \Phi}{\partial p} - \Phi_x\frac{\partial F}{\partial p} + F_y\frac{\partial \Phi}{\partial q} - \Phi_y\frac{\partial F}{\partial q} = 0.$$

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$p^2 + q^2 - 2px - 2qy + 2xy = 0.$$

Bildet man die Hülfsgleichungen, so erhält man unter anderen:

$$\frac{dp}{2y - 2p} = \frac{dq}{2x - 2q} = \frac{dx}{-2p + 2x} = \frac{dy}{-2q + 2y},$$

somit:

$$dp + dq = dx + dy,$$

und daher:

$$p - x + q - y = a.$$

Verbindet man dies mit der ursprünglichen Gleichung, welche in der Form

$$(p - x)^2 + (q - y)^2 = (x - y)^2$$

geschrieben werden kann, so finden wir:

$$2(p - x) = a + \{2(x - y)^2 - a^2\}^{1/2}$$
$$2(q - y) = a - \{2(x - y)^2 - a^2\}^{1/2}.$$

Daher geht die Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

über in:

$$2\,dz = (2x + a)\,dx + (2y + a)\,dy + (dx - dy)\{2(x - y)^2 - a^2\}^{1/2},$$

deren Integral lautet:

$$2z - b = x^2 + ax + y^2 + ay + \frac{x - y}{2^{3/2}}\{2(x - y)^2 - a^2\}^{1/2}$$
$$- \frac{a^2}{2^{3/2}} \log[2^{1/2}(x - y) + \{2(x - y)^2 - a^2\}^{1/2}],$$

und zwar ist dies das vollständige Integral. Das allgemeine Integral kann auf dem gewöhnlichen Wege abgeleitet werden und ein singuläres Integral existirt nicht.

Die obige Gleichung kann jedoch, ohne dass man zu dieser Methode seine Zuflucht nimmt, gelöst werden, indessen sind erst einige Transformationen und Substitutionen erforderlich. Wir nehmen die Gleichung in der Form:

$$(p - x)^2 + (q - y)^2 = (x - y)^2$$

und setzen:

$$Z = z - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2,$$

so dass

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = p - x \text{ und } \frac{\partial Z}{\partial y} = q - y$$

ist. Aendert man die unabhängigen Veränderlichen vermittelst der Gleichungen:

$$x - y = 2^{1/2} X \quad \text{und} \quad x + y = 2^{1/2} Y,$$

so ist:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \left(\frac{\partial Z}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial Y}\right) 2^{-1/2} = 2^{-1/2} (P + Q)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \left(-\frac{\partial Z}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial Y}\right) 2^{-1/2} = 2^{-1/2} (Q - P),$$

und daher:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 = P^2 + Q^2,$$

und die Gleichung geht über in:

$$P^2 + Q^2 = 2 X^2,$$

und ist somit von der Form der III. Hauptform. Hat man das Integral gefunden und ersetzt man die neuen Veränderlichen durch die alten, so wird man sehen, dass es mit dem früheren übereinstimmt.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen

$$(1) \quad p^2 + q^2 - 2px - 2qy + 1 = 0,$$

$$(2) \quad 2(pq + py + qx) + x^2 + y^2 = 0$$

mittelst der Charpit'schen Methode.

Ebenso reducire man die beiden auf die eine oder andere von den Hauptformen und integrire sie, und zeige, dass die durch die beiden Methoden erhaltenen Integrale übereinstimmen.

§. 203.

In diesen speciellen Beispielen ist die Charpit'sche Methode weniger mühevoll als die andere; dies ist jedoch keineswegs immer der Fall. Es trifft sich oft, dass eine Gleichung, welche ein einfaches Beispiel für diese Regel bietet, noch leichter integrirbar ist, weil sie in der einen oder anderen von den obigen Hauptformen enthalten ist, und dies ist die Ursache, weshalb diese Methode weniger gebräuchlich ist als es sonst der Fall sein würde. Sie ist jedoch allgemeiner als jede der anderen, und Gleichungen, welche sich durch irgend eine der anderen Methoden integriren lassen, sind auch durch diese Methode integrirbar; sie ist ausserdem wichtig für die allgemeine Theorie, da sie eine Methode angiebt, wie man eine Lösung der Differentialgleichung, ohne dass der Form der letzteren irgend eine Einschränkung auferlegt wird, erhalten kann.

Die Grenzen, innerhalb deren diese Methode in der Praxis von Erfolg ist, hängen ab von der Integration der Hülfsgleichungen. Diese besonderen Grenzen sind gerade von solcher Beschaffenheit, dass sie zu den für die verschiedenen Hauptformen angewandten Methoden führen, und in Wirklichkeit zeigen sie die bei diesen benutzte Classification an. In der That sind alle Hauptformen in der Charpit'schen Form enthalten und die Integration mittelst der letzteren ist immer möglich, wenn sie sich nach irgend einer der anderen Methoden ausführen lässt.

§. 204.

Wir wollen z. B. zunächst die Lagrange'sche Form betrachten, welche lautet:

$$R - Pp - Qq = 0,$$

worin P, Q, R Functionen von x, y, z allein sind und nicht p und q enthalten. In diesem Falle ist:

$$F = R - Pp - Qq,$$

daher:

$$-\frac{\partial F}{\partial p} = P, \quad -\frac{\partial F}{\partial q} = Q$$

$$-p\frac{\partial F}{\partial p} - q\frac{\partial F}{\partial q} = pP + qQ = R.$$

Demnach sind zwei der Charpit'schen Gleichungen:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

Gleichungen, von denen gerade die Integration der Lagrange'schen Form abhängt. Indessen ist zu beachten, dass dies kein Beweis der Lagrange'schen Methode für lineare Differentialgleichungen ist, vielmehr ist das Resultat derselben bereits bei der Ableitung der Charpit'schen Gleichungen vorausgesetzt worden.

§. 205.

Wir betrachten nun die typische Gleichung der ersten Hauptform, nämlich:

$$\psi(p, q) = 0,$$

so dass also

$$F = \psi(p, q)$$

ist, wobei x, y, z nicht explicit auftreten. Alsdann ist:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Die Hülfsgleichungen sind nun:

$$\frac{dp}{0} = \frac{dq}{0} = \frac{dx}{-\frac{\partial \psi}{\partial p}} = \cdots,$$

so dass wir $p = a$ und $q = b$ erhalten, wo a und b dem Anschein nach willkürliche Constanten sind. Der Regel zufolge müssen wir indessen irgend ein Integral mit der ursprünglichen Gleichung verbinden, so dass wir erhalten:

$$\psi(a, q) = 0,$$

und somit, wenn $q = b$ ist:

$$\psi(a, b) = 0.$$

Mithin:

$$\begin{aligned} dz &= p\,dx + q\,dy \\ &= a\,dx + b\,dy, \end{aligned}$$

eine Gleichung, deren Integral ist

$$z = ax + by + c,$$

wo a und b obiger Bedingung genügen müssen.

§. 206.

Wir gehen ferner zur typischen Gleichung der **zweiten Hauptform** über, welche lautet:

$$\psi(z, p, q) = 0,$$

eine Gleichung, in welcher x und y nicht explicit vorkommen.

Dann haben wir:

$$F = \psi(z, p, q)$$

und daher:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Die aus dem ersten Paar der Charpit'schen Brüche abgeleitete Gleichung giebt:

$$\frac{dp}{p\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{dq}{q\frac{\partial F}{\partial z}},$$

und somit:

$$p = mq.$$

Verbindet man dies mit $\psi = 0$, so kann man p und q ausgedrückt durch z erhalten; es sei $f(z)$ der Werth von p und daher $mf(z)$ der von q. Substituirt man diese in

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

so wird:

$$\frac{dz}{f(z)} = dx + m\,dy,$$

oder:

$$\int \frac{dz}{f(z)} + C = x + my,$$

was mit dem früheren Resultat übereinstimmt.

§. 207.

Gehen wir weiter zur **dritten** Hauptform über, bei welcher

$$F = \varphi(x, p) - \psi(y, q) = 0,$$

also

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial \varphi}{\partial p}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = -\frac{\partial \psi}{\partial q}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

ist, so erhalten wir aus den Hülfsgleichungen:

$$\frac{dp}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{dx}{-\frac{\partial \varphi}{\partial p}},$$

oder:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p}\,dp + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx = 0,$$

also:

$$\varphi(x, p) = a,$$

und somit aus der ursprünglichen Gleichung:

$$\psi(y, q) = a.$$

Löst man diese respective nach p und q auf, so erhält man:

$$p = \vartheta_1(x, a), \quad q = \vartheta_2(y, a),$$

und der Regel zufolge ist:

$$dz = \vartheta_1(x, a)\,dx + \vartheta_2(y, a)\,dy,$$

und hiervon ist das Integral:

$$z + c = \int \vartheta_1(x, a)\, dx + \int \vartheta_2(y, a)\, dy.$$

1. Aufgabe. Man leite nach der Charpit'schen Methode das Integral der Differentialgleichung von derjenigen Form her, welche der Clairaut'schen Form für gewöhnliche Differentialgleichungen analog ist.

2. Aufgabe. Man suche nach der Charpit'schen Methode eine Lösung der Gleichung:

$$px + qy = f(p, q),$$

worin $f(p, q)$ eine homogene Function $n$ten Grades von p und q ist.

Man löse ebenso die Gleichung:

$$xp^2 + yq^2 = 2pq.$$

Jacobi's Methode für die allgemeine Differentialgleichung mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen.

§. 208.

Es ist in §. 189 angegeben worden, dass die bei der linearen partiellen Differentialgleichung von der Lagrange'schen Form benutzte Methode sich anwenden lässt auf den Fall, wo die Anzahl der Veränderlichen n beträgt. Wir gehen nun dazu über, die von Jacobi angegebene Methode der Lösung der allgemeinen partiellen Differentialgleichung, in welcher n unabhängige Veränderliche auftreten, darzulegen. Diese allgemeine Gleichung möge dargestellt sein durch:

$$\Phi(z, p_1, p_2, \ldots, p_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

worin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die unabhängigen Veränderlichen und die p's die partiellen Differentialquotienten von z nach den x sind.

§. 209.

Wir werden zeigen, dass, wenn in dieser Gleichung die abhängige Veränderliche **explicit** vorkommt (und dies wird gewöhnlich der Fall sein, da die Gleichung vollkommen allgemein ist), die Gleichung $\Phi = 0$ durch eine andere mit einer **neuen abhängigen** Veränderlichen ersetzt werden kann, in welcher die abhängige Veränderliche **nicht**

explicit enthalten und die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen um eine Einheit vergrössert ist.

Die Differentialgleichung $\Phi = 0$ hat irgend eine Lösung; wird dieselbe dargestellt durch:

$$u = f(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

worin f bis jetzt noch eine unbekannte Function ist, so erhalten wir:

$$\frac{\partial u}{\partial x_r} + \frac{\partial u}{\partial z} p_r = 0$$

für alle Werthe des Index von $r = 1$ bis $r = n$. Werden diese Werthe der p in die ursprüngliche Gleichung eingesetzt, so geht dieselbe über in:

$$\Phi \left(z, -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial z}}, -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_2}}{\frac{\partial u}{\partial z}}, \ldots, -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_n}}{\frac{\partial u}{\partial z}}, x_1, x_2, \ldots, x_n \right) = 0,$$

und diese kann in der Form geschrieben werden:

$$\Psi \left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0.$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung; die abhängige Veränderliche u kommt nicht explicit darin vor, und es sind $n + 1$ unabhängige Veränderliche $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ vorhanden. Damit ist der Satz bewiesen.

Das Integral dieser Gleichung führt zu dem Integral der ursprünglichen Gleichung; wir werden beweisen, dass man das Integral der Gleichung $\Psi = 0$ in der Form erhalten kann:

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

in welcher $a_1, a_2, \ldots, a_n$ willkürliche Constanten sind.

Ist dieses Integral bekannt, so ist das vollständige Integral der Gleichung $\Phi = 0$ dargestellt durch:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0,$$

in welcher z nunmehr die abhängige Veränderliche ist und die ursprünglichen n unabhängigen Veränderlichen vorkommen.

Denn es ist $u = f$ das Integral von $\Psi = 0$ und Ψ ist bloss eine andere Form von $\Phi = 0$, so dass die letztere befriedigt wird durch $u = f$ und daher:

$$\Phi\left(z, -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \ldots, -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0.$$

Da aber $f = 0$ ist, so haben wir:

$$\frac{\partial f}{\partial x_r} + \frac{\partial f}{\partial z} p_r = 0,$$

also:

$$p_r = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_r}}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

und dies gilt für alle Werthe des Index r von $r = 1$ bis $r = n$. Wir erhalten somit:

$$\Phi(z, p_1, p_2, \ldots, p_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

welches die ursprüngliche Differentialgleichung ist.

§. 210.

Wir brauchen daher nur Differentialgleichungen zu betrachten, in denen die abhängige Veränderliche nicht explicit vorkommt. Käme sie in irgend einer gegebenen Gleichung explicit vor, so könnte man sie in der angegebenen Weise fortschaffen und eine Gleichung $\Psi = 0$ herstellen, deren Integral zu dem gesuchten Integral führen würde. Wir können daher die allgemeine Gleichung in der Form schreiben:

$$F(p_1, p_2, \ldots, p_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Haben wir ausser $F = 0$ noch $n - 1$ andere Gleichungen von der Form:

$$F_1 = a_1, F_2 = a_2, \ldots, F_r = a_r, \ldots, F_{n-1} = a_{n-1},$$

worin $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ Functionen von $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (oder einiger von ihnen) und möglicherweise (und in der Regel wird dies der Fall sein) von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind, und worin $a_1, a_2, \ldots, a_n$ willkürliche Constanten bedeuten, so können wir aus diesen n Gleichungen Werthe von $p_1, p_2, \ldots, p_n$ bestimmen als Functionen der x und der a. Werden diese Werthe in

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n$$

eingesetzt und sind dieselben von der Art, dass für sie dieser Ausdruck ein vollständiges Differential wird, so ist das Integral davon das vollständige Integral von $F = 0$. Denn es ist ein Integral, weil die Werthe von $p_1, p_2, \ldots, p_n$ aus den n Gleichungen abgeleitet sind, deren eine $F = 0$ ist, und es wird in seinem Ausdruck n willkürliche Constanten enthalten, nämlich die Constanten $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ und die Integrationsconstante. Ueberdies ist das Integral von der Form:

$$z = \chi\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) + a_n,$$

welche die abhängige Veränderliche explicit darstellt, und daher die Annahme rechtfertigt, welche wir über die Form des Integrals von $\Psi = 0$ gemacht haben.

Die $n - 1$ Functionen F müssen so beschaffen sein, dass für die Werthe der Grössen p der obige Ausdruck ein vollständiges Differential ist, und die nothwendigen Bedingungen hierfür, nämlich dass

$$\frac{\partial p_r}{\partial x_s} = \frac{\partial p_s}{\partial x_r}$$

sei für alle Werthe von r und s, werden zur Bestimmung dieser Functionen dienen.

§. 211.

Man nehme an, dass die n Gleichungen

$$F = 0, \quad F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2, \ldots, F_{n-1} = a_{n-1}$$

aufgelöst seien, so dass sie die Werthe von $p_1, p_2, \ldots, p_n$ als Functionen der Veränderlichen x darstellen; diese Werthe werden, wieder in die Gleichungen substituirt, jede derselben identisch erfüllen. Wird diese Substitution in irgend zwei solchen Gleichungen, z. B. in $F_r = a_r$ und $F_s = a_s$, ausgeführt, so erhält man:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_r}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_r}{\partial p_1}\dfrac{\partial p_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_r}{\partial p_2}\dfrac{\partial p_2}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial F_r}{\partial p_n}\dfrac{\partial p_n}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial F_s}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_s}{\partial p_1}\dfrac{\partial p_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_s}{\partial p_2}\dfrac{\partial p_2}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial F_s}{\partial p_n}\dfrac{\partial p_n}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_r}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_r}{\partial p_1}\dfrac{\partial p_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_r}{\partial p_2}\dfrac{\partial p_2}{\partial x_2} + \cdots + \dfrac{\partial F_r}{\partial p_n}\dfrac{\partial p_n}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial F_s}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_s}{\partial p_1}\dfrac{\partial p_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_s}{\partial p_2}\dfrac{\partial p_2}{\partial x_2} + \cdots + \dfrac{\partial F_s}{\partial p_n}\dfrac{\partial p_n}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

und zwar giebt es insgesammt n Paare von solchen Gleichungen; jedes Paar enthält die nach derselben unabhängigen Veränderlichen genommenen Differentialquotienten von F_r und F_s, nachdem in diesen die Werthe der p substituirt sind.

Wird aus dem ersten Paare der Werth von $\frac{\partial p_1}{\partial x_1}$ eliminirt, so ergiebt sich die Gleichung:

$$\left[\frac{F_r, F_s}{x_1, p_1}\right] + \left[\frac{F_r, F_s}{p_2, p_1}\right] \frac{\partial p_2}{\partial x_1} + \left[\frac{F_r, F_s}{p_3, p_1}\right] \frac{\partial p_3}{\partial x_1} + \cdots + \left[\frac{F_r, F_s}{p_n, p_1}\right] \frac{\partial p_n}{\partial x_1} = 0,$$

worin

$$\left[\frac{F_r, F_s}{u,\ v}\right] = \frac{\partial F_r}{\partial u}\frac{\partial F_s}{\partial v} - \frac{\partial F_r}{\partial v}\frac{\partial F_s}{\partial u} = -\left[\frac{F_r, F_s}{v,\ u}\right] = -\left[\frac{F_s, F_r}{u,\ v}\right] = \left[\frac{F_s, F_r}{v,\ u}\right]$$

ist.

Eliminirt man ebenso $\frac{\partial p_2}{\partial x_2}$ aus dem zweiten Paare, so ergiebt sich:

$$\left[\frac{F_r, F_s}{x_2, p_2}\right] + \left[\frac{F_r, F_s}{p_1, p_2}\right] \frac{\partial p_1}{\partial x_2} + \left[\frac{F_r, F_s}{p_3, p_2}\right] \frac{\partial p_3}{\partial x_2} + \cdots + \left[\frac{F_r, F_s}{p_n, p_2}\right] \frac{\partial p_n}{\partial x_2} = 0$$

u. s. w., indem jedes Paar zu einer Gleichung von dieser Form führt.

Es mögen nun alle linken Seiten dieser Gleichungen addirt werden; dann wird der Coefficient von $\frac{\partial p_{s'}}{\partial x_{r'}}$ $\left(\text{welches gleich } \frac{\partial p_{r'}}{\partial x_{s'}} \text{ ist}\right)$ bestehen aus der Summe zweier Glieder, nämlich des Gliedes

$$\left[\frac{F_r, F_s}{p_{s'}, p_{r'}}\right]$$

aus der r'ten Gleichung und des Gliedes

$$\left[\frac{F_r, F_s}{p_{r'}, p_{s'}}\right]$$

aus der s'ten Gleichung. Die Summe dieser beiden Glieder ist aber gleich Null, daher verschwindet das Glied mit $\frac{\partial p_{s'}}{\partial x_{r'}}$, welches auch

die Werthe von r' und s' sein mögen. Die resultirende Gleichung ist daher:

$$\left[\frac{F_r, F_s}{x_1, p_1}\right] + \left[\frac{F_r, F_s}{x_2, p_2}\right] + \left[\frac{F_r, F_s}{x_3, p_3}\right] + \cdots + \left[\frac{F_r, F_s}{x_n, p_n}\right] = 0.$$

Wird die linke Seite mit

$$(F_r, F_s)$$

bezeichnet, so ist die Gleichung:

$$(F_r, F_s) = 0,$$

und diese muss erfüllt sein, welches auch immer die Indices r und s sein mögen.

Es kann daher die Gesammtheit der Gleichungen, welche von diesen Functionen befriedigt werden müssen, dargestellt werden in der Form:

$$0 = (F_i, F) = (F_i, F_1) = (F_i, F_2) = \cdots = (F_i, F_{i-1})$$

für alle Werthe des Index i von $i = 1$ bis $i = n - 1$.

§. 212.

Von diesen Bedingungen, welche **nothwendig** sind für die Integrabilität der Gleichung

$$dz = \Sigma p\, dx,$$

muss nun bewiesen werden, dass sie **auch hinreichend** sind; dies wird dadurch geschehen, dass wir zeigen, dass, wenn die Functionen F den obigen Gleichungen genügen, alsdann

$$\frac{\partial p_{r'}}{\partial x_{s'}} = \frac{\partial p_{s'}}{\partial x_{r'}}$$

ist für alle Werthe von r' und s'.

Die n Gleichungen, welche aus den n auf irgend zwei gegebene Functionen F_r und F_s bezüglichen Paaren von Gleichungen abgeleitet sind, gelten immer; addirt man sie sämmtlich, so erhält man:

$$(F_r, F_s) + \Sigma\Sigma \left[\frac{F_r, F_s}{p_{r'}, p_{s'}}\right] \left(\frac{\partial p_{r'}}{\partial x_{s'}} - \frac{\partial p_{s'}}{\partial x_{r'}}\right) = 0,$$

wobei sich die doppelte Summation auf alle ganzen Werthe von r' und s' von 1 bis n erstreckt, aber ausschliesslich gleicher Werthe dieser Indices, da für je zwei gleiche Werthe das betreffende Glied

verschwindet. Wenn aber die Functionen die nothwendigen Bedingungen erfüllen, so haben wir:

$$(F_r, F_s) = 0,$$

und daher:

$$\Sigma\,\Sigma \left[\frac{F_r, F_s}{p_{r'}, p_{s'}}\right] \left(\frac{\partial p_{r'}}{\partial x_{s'}} - \frac{\partial p_{s'}}{\partial x_{r'}}\right) = 0,$$

welche Gleichung gilt für alle die Werthe von r und s, welche durch die verschiedenen Functionen geliefert werden, und jede Combination von zwei Functionen wird eine solche Gleichung ergeben. Die Gesammtzahl dieser Combinationen ist $\frac{1}{2}\, n\,(n - 1)$, und daher ist die Anzahl solcher Gleichungen gleich $\frac{1}{2}\, n\,(n - 1)$.

Nun ist jede Gleichung linear in den Grössen:

$$\frac{\partial p_{r'}}{\partial x_{s'}} - \frac{\partial p_{s'}}{\partial x_{r'}},$$

und solcher Grössen giebt es $\frac{1}{2}\, n\,(n - 1)$, d. h. ebenso viel, wie Gleichungen vorhanden sind. Da jede rechte Seite Null ist, so folgt entweder, dass jede von diesen Grössen

$$\frac{\partial p_{r'}}{\partial x_{s'}} - \frac{\partial p_{s'}}{\partial x_{r'}}$$

Null ist, oder dass die aus den Coefficienten dieser Grössen gebildete Determinante verschwindet.

Dass das letzte nicht der Fall sein kann, ergiebt sich wie folgt: Bezeichnet $\varDelta$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p_1}, & \frac{\partial F}{\partial p_2}, & \dots, & \frac{\partial F}{\partial p_n} \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_1}, & \frac{\partial F_1}{\partial p_2}, & \dots, & \frac{\partial F_1}{\partial p_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial p_1}, & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial p_2}, & \dots, & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

so ist jeder der Ausdrücke

$$\left[\frac{F_r, F_s}{p_{r'}, p_{s'}}\right]$$

das Complement einer zweiten Unterdeterminante von $\varDelta$, und solcher

giebt es im Ganzen $\frac{1}{4} n^2 (n - 1)^2$. Bezeichnet ferner Θ die von ihnen gebildete Determinante, so dass also Θ gerade die Determinante ist, welche nach Voraussetzung verschwindet, und ist Θ' die Determinante, welche aus den Complementen der Elemente von Θ in der Determinante Δ gebildet ist, so erhalten wir, wenn wir Θ und Θ' multipliciren:

$$\Theta \Theta' = \Delta^{\frac{1}{2} n (n-1)}.$$

Nun ist aber Θ' nicht unendlich; wenn demnach Θ verschwindet, so müssen wir haben:

$$\Delta = 0.$$

Dies würde aber aussagen, dass aus den n Gleichungen von der Form $F = 0$ die n Grössen p eliminirt werden könnten, d. h. dass diese Gleichungen nicht ausreichen würden, um die Grössen p als Functionen der unabhängigen Veränderlichen zu bestimmen. Dies widerspricht der Annahme, dass die Functionen F von einander unabhängig seien. Mithin ist Θ nicht gleich Null.

Hieraus folgt, dass jede der $\frac{1}{2} n (n - 1)$ Grössen

$$\frac{\partial p_{r'}}{\partial x_{s'}} - \frac{\partial p_{s'}}{\partial x_{r'}}$$

verschwindet, und daher auch, dass die Bedingungen ausreichend sind, um uns zu versichern, dass

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n$$

ein vollständiges Differential ist.

§. 213.

Wir können daher die erhaltenen **Resultate** wie folgt zusammenfassen:

Um das vollständige Integral irgend einer gegebenen Gleichung $F = 0$ zu finden, bestimme man zunächst ein Integral $F_1 = a_1$ der Gleichung:

$$(F_1, F) = 0,$$

sodann suche man ein gemeinschaftliches Integral $F_2 = a_2$ der beiden Gleichungen:

$$(F_2, F) = (F_2, F_1) = 0,$$

ferner ein gemeinschaftliches Integral $F_3 = a_3$ der drei Gleichungen:

$$(F_3, F) = (F_3, F_1) = (F_3, F_2) = 0$$

u. s. w., so dass man auf diese Weise $n - 1$ neue Gleichungen erhält, in deren jeder eine willkürliche Constante vorkommt. Diese n Gleichungen, welche die n Grössen p enthalten, löse man auf, so dass man die Werthe der p's als Functionen der unabhängigen Veränderlichen und der willkürlichen Constanten erhält, und substituire diese Werthe in die Gleichung:

$$dz = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \cdots + p_n\,dx_n.$$

Dann giebt dieselbe, integrirt, das vollständige Integral der Gleichung:

$$F = 0.$$

Jede der Gleichungen, welche irgend eine der Functionen F_r bestimmen, ist linear in den partiellen Differentialquotienten von F_r; wir haben daher eine Methode zu suchen, um das gemeinschaftliche Integral eines Systems von simultanen linearen partiellen Differentialgleichungen zu bestimmen.

Aufgabe. Man beweise, dass, wenn die Gleichungen

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$$
$$F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$$

derart aufgelöst werden, dass man $p_1, p_2, \ldots, p_n$ als Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ erhält, alsdann die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass

$$dz = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \cdots + p_n\,dx_n$$

ein genaues Differential sei, darin bestehen, dass das System von Gleichungen erfüllt sein muss:

$$0 = \left(\frac{F_i, F_1}{x, \; p}\right) + \left\{\frac{F_i, F_1}{z, \; p}\right\} = \left(\frac{F_i, F_2}{x, \; p}\right) + \left\{\frac{F_i, F_2}{z, \; p}\right\} = \cdots$$
$$= \left(\frac{F_i, F_{i-1}}{x, \; p}\right) + \left\{\frac{F_i, F_{i-1}}{z, \; p}\right\},$$

wobei

$$\left(\frac{F_i, F_k}{x, \; p}\right) = \left[\frac{F_i, F_k}{x_1, \; p_1}\right] + \left[\frac{F_i, F_k}{x_2, \; p_2}\right] + \cdots + \left[\frac{F_i, F_k}{x_n, \; p_n}\right]$$

und

$$\left\{\frac{F_i, F_k}{z, \; p}\right\} = p_1\left[\frac{F_i, F_k}{z, \; p_1}\right] + p_2\left[\frac{F_i, F_k}{z, \; p_2}\right] + \cdots + p_n\left[\frac{F_i, F_k}{z, \; p_n}\right]$$

gesetzt ist.

§. 214.

Es ist zweckmässig, an dieser Stelle den Beweis eines **wichtigen Hülfssatzes** zu geben, der bei der Betrachtung über die Integration von simultanen Gleichungen von Vortheil sein wird.

Sind A, B, C irgend drei Functionen von $2n$ unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, und bezeichnet man die Function (B, C) mit α und die Function (A, α) mit

$$[A, (B, C)],$$

so wird die Gleichung

$$[A, (B, C)] + [B, (C, A)] + [C, (A, B)] = 0$$

identisch erfüllt sein.

Betrachten wir die linke Seite dieser Gleichung; dieselbe besteht aus der Summe einer gewissen Anzahl von Gliedern derselben Form, deren jedes das Product von zwei ersten Differentialquotienten von zweien der Grössen A, B, C und einem zweiten Differentialquotienten der dritten von ihnen ist. Sie ist ferner eine cyklisch symmetrische Function von A, B, C und daher werden, wenn die Glieder mit dem zweiten Differentialquotienten irgend einer Function, z. B. von C, verschwinden, sämmtliche Glieder verschwinden, und es wird demnach die Gleichung erfüllt sein.

Bezeichnet man die Grösse

$$\frac{\partial B}{\partial x_r}\frac{\partial C}{\partial p_r} - \frac{\partial B}{\partial p_r}\frac{\partial C}{\partial x_r}$$

mit $\varDelta_r BC$, so dass $\varDelta_r$ als ein Operationssymbol betrachtet werden kann, so können wir schreiben:

$$(B, C) = (\varDelta_1 + \varDelta_2 + \cdots + \varDelta_n) BC,$$

da die Operationszeichen offenbar dem distributiven Gesetze gehorchen:

$$(\varDelta_r + \varDelta_s) BC = \varDelta_r BC + \varDelta_s BC.$$

Alsdann ist zufolge dieser Bezeichnung:

$$[A, (B, C)] = (\varDelta_1 + \varDelta_2 + \cdots + \varDelta_n) A (\varDelta_1 + \varDelta_2 + \cdots + \varDelta_n) BC,$$

und daher ist $[A, (B, C)]$ die Summe einer Reihe von Gliederpaaren wie

$$\varDelta_r A \varDelta_s BC + \varDelta_s A \varDelta_r BC$$

für alle Werthe von r und s von 1 bis n inclusive; in dem Falle, wo r und s denselben Werth haben, kommt an Stelle eines solchen Gliederpaares nur ein einziges Glied in Betracht.

Entwickelt man die Functionen, welche auf diese Weise symbolisch dargestellt sind, so findet man, dass die von den zweiten Differentialquotienten von C abhängigen Glieder sind:

$$\frac{\partial A}{\partial x_r}\frac{\partial B}{\partial x_s}\frac{\partial^2 C}{\partial p_r \partial p_s} - \frac{\partial A}{\partial x_r}\frac{\partial B}{\partial p_s}\frac{\partial^2 C}{\partial p_r \partial x_s} - \frac{\partial A}{\partial p_r}\frac{\partial B}{\partial x_s}\frac{\partial^2 C}{\partial p_s \partial x_r} + \frac{\partial A}{\partial p_r}\frac{\partial B}{\partial p_s}\frac{\partial^2 C}{\partial x_r \partial x_s}$$

aus dem ersten Gliede des obigen Paares, und

$$\frac{\partial A}{\partial x_s}\frac{\partial B}{\partial x_r}\frac{\partial^2 C}{\partial p_r \partial p_s} - \frac{\partial A}{\partial x_s}\frac{\partial B}{\partial p_r}\frac{\partial^2 C}{\partial p_s \partial x_r} - \frac{\partial A}{\partial p_s}\frac{\partial B}{\partial x_r}\frac{\partial^2 C}{\partial p_r \partial x_s} + \frac{\partial A}{\partial p_s}\frac{\partial B}{\partial p_r}\frac{\partial^2 C}{\partial x_r \partial x_s}$$

aus dem zweiten Gliede.

Sucht man in derselben Weise aus $[B, (C, A)]$ das entsprechende Paar symbolischer Glieder aus und betrachtet in ihnen die Glieder, welche zweite Differentialquotienten von C enthalten, so findet man resp.:

$$\frac{\partial B}{\partial x_r}\frac{\partial A}{\partial p_s}\frac{\partial^2 C}{\partial p_r \partial x_s} - \frac{\partial B}{\partial x_r}\frac{\partial A}{\partial x_s}\frac{\partial^2 C}{\partial p_r \partial p_s} - \frac{\partial B}{\partial p_r}\frac{\partial A}{\partial p_s}\frac{\partial^2 C}{\partial x_r \partial x_s} + \frac{\partial B}{\partial p_r}\frac{\partial A}{\partial x_s}\frac{\partial^2 C}{\partial p_s \partial x_r}$$

und:

$$\frac{\partial B}{\partial x_s}\frac{\partial A}{\partial p_r}\frac{\partial^2 C}{\partial p_s \partial x_r} - \frac{\partial B}{\partial x_s}\frac{\partial A}{\partial x_r}\frac{\partial^2 C}{\partial p_r \partial p_s} - \frac{\partial B}{\partial p_s}\frac{\partial A}{\partial p_r}\frac{\partial^2 C}{\partial x_r \partial x_s} + \frac{\partial B}{\partial p_s}\frac{\partial A}{\partial x_r}\frac{\partial^2 C}{\partial p_r \partial x_s}.$$

Der Ausdruck $[C, (A, B)]$ wird keine zweiten Differentialquotienten von C enthalten.

Daher ist in

$$[A, (B, C)] + [B, (A, C)] + [C, (A, B)]$$

der Coefficient des Gliedes, welches mit $\frac{\partial^2 C}{\partial p_r \partial p_s}$ multiplicirt ist, gleich der Summe der Coefficienten in den entsprechenden Gliedern

der obigen Ausdrücke und somit gleich Null; ebenso verschwinden auch die Coefficienten derjenigen Glieder, welche

$$\frac{\partial^2 C}{\partial p_r \partial x_s}, \frac{\partial^2 C}{\partial p_s \partial x_r}, \frac{\partial^2 C}{\partial x_r \partial x_s}$$

enthalten.

Sind r und s einander gleich, so brauchen wir nur die erste und dritte von den obigen Reihen von Gliedern zu betrachten und darin $r = s$ zu setzen; man wird ohne Weiteres erkennen, dass die Glieder, welche mit

$$\frac{\partial^2 C}{\partial p_r^2}, \frac{\partial^2 C}{\partial p_r \partial x_r}, \frac{\partial^2 C}{\partial x_r^2}$$

behaftet sind, sämmtlich sich aufheben.

Da dies gilt, welches auch die Zahlen r und s sein mögen, so folgt, dass alle diejenigen Glieder, welche zweite Differentialquotienten von C enthalten, sich gegenseitig aufheben, und daher verschwindet, wegen der Symmetrie, der ganze Ausdruck.

Lösung der Hülfsgleichungen.

§. 215.

Wir gehen nunmehr dazu über, die Werthe von $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ aus den verschiedenen Differentialgleichungen, denen sie genügen müssen, zu bestimmen.

Um F_1 zu bestimmen, haben wir:

$$(F, F_1) = 0$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial F_1}{\partial p_1} - \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial F_1}{\partial p_2} - \frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \cdots$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial F_1}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial F_1}{\partial x_n} = 0.$$

Da diese Gleichung linear ist in den Differentialquotienten von F_1, so können wir ein Integral derselben finden, wenn wir als Hülfsgleichungen (§. 189) die verallgemeinerte Form der Lagrange'schen Gleichungen anwenden. Wird ein Integral des Systems

$$\text{(A)}\quad \begin{aligned} &\frac{d x_1}{-\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{d x_2}{-\frac{\partial F}{\partial p_2}} = \cdots = \frac{d x_n}{-\frac{\partial F}{\partial p_n}} \\ &= \frac{d p_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} = \frac{d p_2}{\frac{\partial F}{\partial x_2}} = \cdots = \frac{d p_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n}} \end{aligned}$$

dargestellt durch

$$f_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = a_1,$$

wo a_1 eine willkürliche Constante ist, so ist $F_1 = f_1 = a_1$ ein Integral der ursprünglichen Gleichung $(F, F_1) = 0$.

§. 216.

Wir haben nun eine Function F_2 zu suchen, welche den Gleichungen

$$(F, F_2) = 0, \quad (F_1, F_2) = (f_1, F_2) = 0$$

genügt. Die erste derselben, welche eine Gleichung zur Bestimmung von F_2 ist, ist in ihrer Form identisch mit derjenigen, durch welche sich F_1 bestimmte; wir werden daher dieselben Hülfsgleichungen erhalten. Ist

$$\varphi (x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = const$$

ein Integral der Gleichungen (A), welches verschieden ist von $f_1 = a_1$, so ist $(F, \varphi) = 0$.

Ist φ eine Function , welche der Gleichung

$$(f_1, \varphi) = 0$$

genügt, so können wir

$$F_2 = \varphi = a_2$$

als gemeinsames Integral der beiden Gleichungen nehmen, durch welche F_2 bestimmt wird.

Genügt φ der Gleichung aber nicht, so werden wir erhalten:

$$(f_1, \varphi) = \varphi_1.$$

Die Substitution von φ_1 kann wiederholt werden und so unbeschränkt weiter, so dass wir eine Reihe von Functionen φ erhalten, welche bestimmt werden durch:

$$(f_1, \varphi_1) = \varphi_2, (f_1, \varphi_2) = \varphi_3, \ldots, (f_1, \varphi_{i-1}) = \varphi_i, \ldots$$

Diese Functionen genügen nun sämmtlich, für F_2 substituirt, der Gleichung:

$$(F, F_2) = 0.$$

Setzt man in der Identität

$$[A, (B, C)] + [B, (C, A)] + [C, (A, B)] = 0$$

F für A und f_1 für B, so ergiebt sich:

$$[C, (A, B)] = [C, (F, f_1)] = (C, 0) = 0,$$

und daher:

$$[F, (f_1, C)] = [f_1, (F, C)],$$

was auch immer C sein möge.

Es sei zunächst $C = \varphi$, dann geht die Gleichung über in:

$$[F, (f_1, \varphi)] = [f_1, (F, \varphi)] = (f_1, 0) = 0,$$

so dass

$$(f_1, \varphi) = \varphi_1 = F_2$$

eine Lösung ist von:

$$(F, F_2) = 0.$$

Ist sodann $C = \varphi_1$, so erhält man:

$$[F, (f_1, \varphi_1)] = [f_1, (F, \varphi_1)] = (f_1, 0) = 0,$$

so dass

$$(f_1, \varphi_1) = \varphi_2 = F_2$$

ebenfalls eine Lösung ist von

$$(F, F_2) = 0;$$

u. s. f. durch die ganze Reihe der Functionen φ, deren jede eine Lösung ist der ersten der beiden Gleichungen, welche F_2 bestimmen, und daher auch, einer Constanten gleichgesetzt, eine Lösung ist der Hülfsgleichungen (A).

Nun haben diese Hülfsgleichungen höchstens nur $2n - 1$ von einander unabhängige Integrale. Die Functionen φ_i, welche aus der unbeschränkt oft wiederholten Substitution in (f_1, φ_{i-1}) entstehen, können nicht sämmtlich von einander unabhängig sein, und daher müssen wir, wenn die Reihe der Functionen nicht aufhört, schliesslich zu einer Function gelangen, welche sich durch die bereits gefundenen ausdrücken lässt.

§. 217.

Es sind daher drei Fälle zu betrachten:

1) Eine Function φ_i der Reihe kann identisch Null sein.

2) Eine Function φ_i der Reihe ist veränderlich, aber ausdrückbar mittelst der vorhergehenden Functionen der Reihe.

3) Eine Function φ_i der Reihe kann eine bestimmte Constante c sein.

Wir werden diese Fälle der Reihe nach betrachten.

§. 218.

Erster Fall. Ist $\varphi_i = 0$, so wird $\varphi_{i-1} = a_2$ das gesuchte Integral sein; denn sie gehört zu der Reihe der Functionen und ist daher eine Lösung von $(F, F_2) = 0$. Ferner ist:

$$(F_1, \varphi_{i-1}) = (f_1, \varphi_{i-1}) = \varphi_i = 0,$$

und somit ist φ_{i-1} eine Lösung von $(F_1, F_2) = 0$. Demnach ist es ein gemeinsames Integral der beiden Gleichungen, welche F_2 bestimmen, und giebt somit die zweite der gesuchten Gleichungen, nämlich:

$$\varphi_{i-1} = F_2 = a_2.$$

§. 219.

Zweiter Fall. Ist φ_i darstellbar durch die vorhergehenden Functionen der Reihe, so setze man:

$$\varphi_i = \vartheta\,(F, f_1, \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{i-1}),$$

worin ϑ eine bestimmte Function bedeutet. Geht man nun zu φ_{i+1} weiter, so hat man:

$$\begin{aligned}\varphi_{i+1} &= (f_1, \varphi_i) \\ &= (f_1, F)\frac{\partial \vartheta}{\partial F} + (f_1, f_1)\frac{\partial \vartheta}{\partial f_1} + (f_1, \varphi)\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} + (f_1, \varphi_1)\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi_1} + \cdots,\end{aligned}$$

wenn man den Werth von φ_i substituirt. Es ist aber:

$$(f_1, F) = -(F, f_1) = 0,$$

da f_1 eine Lösung der Gleichungen ist, und (f_1, f_1) verschwindet identisch, so dass diese Gleichung wird:

$$\varphi_{i+1} = \varphi_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} + \varphi_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi_1} + \cdots + \varphi_{i-1} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi_{i-2}} + \varphi_i \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi_{i-1}}.$$

Nun ist aber jeder der Differentialquotienten von ϑ eine Function der vorher erhaltenen Grössen φ, somit ist dies auch mit φ_{i+1} der Fall.

Es ergiebt sich daher, dass φ_i und alle Functionen φ der Reihe, welche auf φ_i folgen, ausdrückbar sind durch diejenigen, welche φ_i vorangehen.

Wir wollen nun eine Function dieser Grössen zu erhalten suchen, welche den Gleichungen

$$(F, F_2) = 0 \quad \text{und} \quad (F_1, F_2) = (f_1, F_2) = 0$$

genügt. Ist dieselbe:

$$F_2 = \psi\,(F, f_1, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}),$$

und wird dieser Werth substituirt, so geht die erste Gleichung über in:

$$0 = (F, F)\frac{\partial \psi}{\partial F} + (F, f_1)\frac{\partial \psi}{\partial f_1} + (F, \varphi)\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \cdots + (F, \varphi_{i-1})\frac{\partial \psi}{\partial \varphi_{i-1}},$$

welche identisch erfüllt ist, da jede Function φ eine Lösung ist von

$$(F, F_2) = 0,$$

und die zweite Gleichung wird wie vorher:

$$0 = (f_1, F_2) = \varphi_1 \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \varphi_2 \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1} + \varphi_3 \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_2} + \cdots + \varphi_i \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_{i-1}}.$$

Die letzte Gleichung ist daher die einzige, welcher ψ genügen muss, und da keine Differentialquotienten nach F oder f_1 in ihr vorkommen, so können wir uns dieselben durch ihre respectiven Werthe 0 und a_1 ersetzt denken. Jedes Integral des Systems

$$\frac{d\varphi}{\varphi_1} = \frac{d\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{d\varphi_2}{\varphi_3} = \cdots = \frac{d\varphi_{i-1}}{\varphi_i}$$
$$= \frac{d\varphi_{i-1}}{\vartheta}$$

von der Form $\Phi = a_2$ wird eine Lösung der Gleichung in ψ sein, und daher können wir setzen:

$$F_2 = \Phi = a_2,$$

und werden so das gesuchte gemeinschaftliche Integral der beiden Gleichungen, durch welche F_2 bestimmt wird, erhalten.

§. 220.

Dritter Fall. Ist φ_i eine bestimmte Constante c, welche nur von den Coefficienten der ursprünglichen Differentialgleichung abhängen wird, so hört damit die Reihe der Functionen auf, da keine Function mehr zu substituiren ist. Wir verfahren dann wie in dem letzten Falle, um eine Function der vorhergehenden Grössen φ zu

finden, welche eine gemeinsame Lösung der beiden Gleichungen ist. Ist dieselbe:

$$F_2 = \chi\,(F, f_1, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}),$$

und substituirt man diese in $(F, F_2) = 0$, so wird die Gleichung identisch erfüllt; substituirt man sie in $(f_1, F_2) = 0$, so ist die resultirende Gleichung gerade so wie vorher:

$$0 = \varphi_1 \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} + \varphi_2 \frac{\partial \chi}{\partial \varphi_1} + \cdots + \varphi_{i-1} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi_{i-2}} + \varphi_i \frac{\partial \chi}{\partial \varphi_{i-1}},$$

worin wir φ_i durch c ersetzen können. Ein Integral derselben wird gegeben durch:

$$\frac{d\,\varphi_{i-2}}{\varphi_{i-1}} = \frac{d\,\varphi_{i-1}}{c},$$

welche durch Integration giebt:

$$\varphi_{i-1}^2 - 2\,c\,\varphi_{i-2} = const,$$

und daher können wir, wie im letzten Falle, setzen:

$$F_2 = \varphi_{i-1}^2 - 2\,c\,\varphi_{i-2} = a_2$$

als das gesuchte gemeinschaftliche Integral.

Diese Lösung ist ausreichend, vorausgesetzt, dass $i > 1$ ist.

Nun kann i nicht Null sein, da φ als eine Function der Veränderlichen bestimmt ist. Die einzige zu betrachtende Ausnahme ist daher der Fall $i = 1$, in welchem

$$\varphi_1 \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = c \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = 0$$

ist, so dass also χ unabhängig von φ ist. Nun ist:

$$F_2 = \chi\,(F, f_1, \varphi)$$

und F und f_1 lassen sich ersetzen respective durch 0 und a_1; wenn also χ unabhängig von φ ist, so hört es auf eine Function der Veränderlichen zu sein, und es giebt daher keine den beiden Gleichungen gemeinsame Lösung, welche aus diesen Functionen abgeleitet wäre.

Sollte dies der Fall sein, so kehren wir zu den Hülfsgleichungen (A) zurück und bestimmen ein neues Integral, welches von den bereits erhaltenen, nämlich von

$$F_1 = f_1 = a_1, \quad \varphi = const$$

verschieden ist. Ist dasselbe:

$$\vartheta\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = const,$$

so nehmen wir zunächst mit der Function ϑ alle die Operationen

vor, die wir vorher mit der Function φ vorgenommen hatten; dann werden wir das gesuchte gemeinschaftliche Integral

$$F_2 = a_2$$

erhalten, ausgenommen den einzigen Fall, wo wir

$$(f_1, \vartheta) = \vartheta_1 = c'$$

erhalten, wobei c' eine bestimmte Constante ist.

Aus der Combination dieser respectiven Ausnahmefälle, welches die einzigen sind, in denen das gemeinschaftliche Integral nicht erhalten worden ist, können wir ein gemeinschaftliches Integral F_2 herstellen. Denn setzt man

$$F_2 = f_2(\varphi, \vartheta)$$

in $(F, F_2) = 0 = (f_1, F_2)$ ein, so gehen diese Gleichungen über in:

$$0 = (F, \varphi)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + (F, \vartheta)\frac{\partial f_2}{\partial \vartheta}$$

$$0 = (f_1, \varphi)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + (f_1, \vartheta)\frac{\partial f_2}{\partial \vartheta}.$$

Die erste Gleichung ist aber identisch befriedigt, da φ und ϑ beides Integrale der Hülfsgleichungen (A) sind, während die letzte Gleichung wegen

$$(f_1, \varphi) = \varphi_1 = c$$

und

$$(f_2, \vartheta) = \vartheta_1 = c'$$

übergeht in:

$$c\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + c'\frac{\partial f_2}{\partial \vartheta} = 0.$$

Dieser wird genügt durch

$$f_2 = \Theta(c'\varphi - c\vartheta),$$

und somit ist

$$F_2 = \Theta(c'\varphi - c\vartheta) = a_2,$$

worin Θ eine willkürliche Function bezeichnet (die nach Belieben von einer einfachen Form gewählt werden kann), das gesuchte Integral.

Es kann daher in jedem Falle das gemeinsame Integral der Gleichungen, durch welche F_2 bestimmt wird, gefunden werden; zur Bequemlichkeit bezeichnen wir dasselbe durch:

$$F_2 = f_2 = a_2.$$

§. 221.

Wir gehen nun weiter zur Bestimmung von F_3; dasselbe muss sein ein gemeinschaftliches Integral der Gleichungen:

$$(F, F_3) = 0 = (f_1, F_3) = (f_2, F_3).$$

Um ein solches zu erhalten, suchen wir nach der vorhergehenden Methode ein den beiden Gleichungen

$$(F, F_3) = 0 = (f_1, F_3)$$

gemeinschaftliches Integral, welches verschieden ist von $f_2 = a_2$. Dasselbe wollen wir darstellen durch:

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = const.$$

Bilden wir dann wie vorher die Reihe von Functionen:

$$(f_2, \lambda) = \lambda_1, \quad (f_2, \lambda_1) = \lambda_2, \ldots, (f_2, \lambda_{i-1}) = \lambda_i, \ldots,$$

so sind sämmtliche Functionen λ dieser Reihe gemeinschaftliche Integrale der ersten beiden von den Gleichungen, aus denen λ sich bestimmt. Denn in der Identität

$$[A, (B, C)] + [B, (C, A)] + [C, (A, B)] = 0$$

sei $A = F$ und $B = f_2$; dann erhalten wir wegen $(F, f_2) = 0$:

$$[F, (f_2, C)] = [f_2, (F, C)].$$

Und substituiren wir in derselben Identität $A = f_1$ und $B = f_2$ und erinnern wir uns, dass $(f_1, f_2) = 0$ ist, so erhalten wir:

$$[f_1, (f_2, C)] = [f_2, (f_1, C)].$$

Diese Gleichungen gelten, was immer auch C sein möge. Ist nun $C = \lambda$, so wird:

$$[F, (f_2, \lambda)] = [f_2, (F, \lambda)],$$

oder:

$$(F, \lambda_1) = (f_2, 0) = 0,$$

und:

$$[f_1, (f_2, \lambda)] = [f_2, (f_1, \lambda)],$$

oder:

$$(f_1, \lambda_1) = (f_2, 0) = 0.$$

Demnach ist λ_1 ein gemeinschaftliches Integral der Gleichungen:

$$(F, F_3) = 0 = (f_1, F_3).$$

In analoger Weise würde die Substitution von λ_1 für C zeigen, dass λ_2 ein gemeinschaftliches Integral dieser Gleichungen ist, und so fort für die ganze Reihe von Functionen.

Da wie in dem früheren Falle die Anzahl der gemeinschaftlichen Integrale eine begrenzte ist, so werden wir in der Reihe auf ein Integral λ_k kommen, welches ebenso wie die auf dasselbe folgenden ausdrückbar ist mit Hülfe der ihm vorhergehenden $F, f_1, f_2, \lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$. Es treten auch dieselben drei Fälle auf, und der Werth von F_3, des gemeinschaftlichen Integrals, bestimmt sich in jedem einzelnen Falle ebenso wie vorher. Der einzige Ausnahmefall wird entweder umgangen durch die Wahl eines neuen von λ verschiedenen Integrals, oder es werden, falls sich auch dieses als Ausnahmefall ausweist, diese beiden Ausnahmefälle mit einander so verbunden, dass sie ein gemeinschaftliches Integral liefern. Auf diese Weise erhalten wir unser drittes gemeinschaftliches Integral, welches wir darstellen können durch:

$$F_3 = f_3 = a_3.$$

§. 222.

Die noch übrigen Functionen $F_4, \ldots, F_{n-1}$ können auf dieselbe Weise abgeleitet werden wie die vorigen; auf diese Weise werden wir zusammen mit $F = 0$ im Ganzen n Gleichungen erhalten zur Bestimmung der Werthe der p durch die unabhängigen Veränderlichen und $n - 1$ willkürliche Constanten, und diese Werthe werden, in den Ausdruck

$$dz = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \cdots + p_n\,dx_n$$

eingesetzt, denselben integrirbar machen. Das Integral desselben ist das vollständige Integral der ursprünglichen Gleichung.

Die anderen beiden Integrale werden aus ihm nach den Resultaten in §§. 179, 180 abgeleitet.

§. 223.

Das Vorhergehende ist eine Darlegung der Jacobi'schen Integrationsmethode in ihrer einfachsten Form; es giebt jedoch Entwickelungen und Vereinfachungen und daraus sich ergebende Methoden zur Vermeidung der Ausnahmefälle, die wir hier nicht behandeln können. In Bezug hierauf und auf die ganze Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung müssen wir verweisen auf die Hauptquellen, welche sind: Jacobi, „Vorlesungen über Dynamik" (Ges. Werke Supplbd., S. 248 bis 269); Jacobi, „*Nova methodus . . . integrandi*" (Crelle's J. Bd. LX, S. 1 bis 181);

eine sehr werthvolle Abhandlung von Imschenetsky in Grunert's Archiv der Mathematik und Physik, Bd. L, Seite 278 bis 474; eine Abhandlung von Graindorge in den *Mémoires de la société Royale des sciences de Liège,* II. Serie, Bd. V, und ein Lehrbuch von Mansion „*Théorie des équations aux dérivées partielles*", wird sich von grossem Nutzen erweisen. Weitere Hinweise auf die Originalquellen wird man in dem letzteren Werke finden.

Die Gleichungen (A) sind, wenn man jeden Bruch gleich dt setzt, von der Form:

$$\frac{d x_r}{d t} = -\frac{\partial F}{\partial p_r}, \quad \frac{d p_r}{d t} = \frac{\partial F}{\partial x_r}.$$

Es sind dies die kanonischen Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems materieller Punkte; eine weitere Discussion derselben findet man bei Imschenetsky. (Siehe auch Routh „*Rigid Dynamics*".)

Wir gehen nun zur Betrachtung einiger **Beispiele** über.

1. Aufgabe. Es soll die Gleichung

$$z = f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

gelöst werden, in welcher f die unabhängigen Veränderlichen nicht explicit enthält. Wir müssen die Gleichung zunächst so transformiren, dass die abhängige Veränderliche nicht explicit darin vorkommt. Ist

$$\psi\ (x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$$

die Lösung der Gleichung, wobei die Form von ψ noch zu bestimmen ist, und bezeichnet man $\frac{\partial \psi}{\partial x_r}$ mit P_r und $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ mit P_{n+1}, so hat man:

$$P_r + P_{n+1}\, p_r = 0,$$

und daher ist die Gleichung:

$$z = f\left(-\frac{P_1}{P_{n+1}}, -\frac{P_2}{P_{n+1}}, \ldots, -\frac{P_n}{P_{n+1}}\right),$$

in welcher die abhängige Veränderliche ψ nicht vorkommt. Hieraus ergiebt sich für unsere allgemeine Formel:

$$F = f\left(-\frac{P_1}{P_{n+1}}, -\frac{P_2}{P_{n+1}}, \ldots, -\frac{P_n}{P_{n+1}}\right) - z,$$

und die Hülfsgleichungen geben:

$$\frac{d P_1}{0} = \frac{d P_2}{0} = \cdots = \frac{d P_n}{0} = \frac{d P_{n+1}}{-1}.$$

Aus diesen erhält man:

$$P_1 = \alpha_1,\ P_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ P_n = \alpha_n,$$

und diese ergeben n Integrale; aus der Gleichung $F = 0$ erhält man sodann:

$$z = f\left(-\frac{\alpha_1}{P_{n+1}},\ -\frac{\alpha_2}{P_{n+1}},\ \ldots,\ -\frac{\alpha_n}{P_{n+1}}\right).$$

Löst man diese Gleichung nach P_{n+1} auf, so ergiebt sich:

$$P_{n+1} = \chi(z),$$

worin χ die n Constanten α enthält, und daher:

$$\begin{aligned} d\psi &= P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 + \cdots + P_n\,dx_n + P_{n+1}\,dz \\ &= \alpha_1\,dx_1 + \alpha_2\,dx_2 + \cdots + \alpha_n\,dx_n + \chi(z)\,dz. \end{aligned}$$

Das Integral hiervon ist:

$$\psi + \alpha = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n + \int \chi(z)\,dz,$$

worin α eine willkürliche Constante ist, die man sich in ψ aufgenommen denken kann. Nun ist aber das Integral der gegebenen Differentialgleichung $\psi = 0$; daher lautet das Integral von

$$z = f(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n)$$

folgendermaassen:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \int \chi(z)\,dz,$$

wo χ gegeben wird durch die Gleichung:

$$z = f\left(\frac{\alpha_1}{\chi},\ \frac{\alpha_2}{\chi},\ \ldots,\ \frac{\alpha_n}{\chi}\right).$$

2. Aufgabe. Der Fall, wo f eine homogene Function μter Ordnung in den p ist, lässt sich leicht auf eine der bereits in §. 191 betrachteten Formen zurückführen. Wir können nämlich die abhängige Veränderliche z in ξ umändern, wobei

$$\xi = \frac{\mu}{\mu - 1}\, z^{\frac{\mu-1}{\mu}}$$

ist, und die Gleichung wird dann:

$$1 = f(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n),$$

worin $\xi_r = \dfrac{\partial \xi}{\partial x_r}$ ist. Das Integral derselben ist:

$$\frac{\mu}{\mu - 1}\, z^{\frac{\mu-1}{\mu}} = \xi = c + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n,$$

vorausgesetzt, dass

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$$

ist.

3. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $z^2 + z p_3 = p_1^2 + p_2^2$.

(2) $z + 2 p_3 = (p_1 + p_2)^2$.

(3) $(p_1 - z)(p_2 - z)(p_3 - z) = p_1 p_2 p_3$.

4. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$F = (x_2 p_1 + x_1 p_2) x_3 + a p_3 (p_1 - p_2) - 1 = 0.$$

Die Hülfsgleichungen sind:

$$\frac{-d x_1}{x_2 x_3 + a p_3} = \frac{-d x_2}{x_1 x_3 - a p_3} = \frac{-d x_3}{a (p_1 - p_2)} = \frac{d p_1}{x_3 p_2}$$
$$= \frac{d p_2}{x_3 p_1} = \frac{d p_3}{x_2 p_1 + x_1 p_2}.$$

Aus der Gleichheit des ersten, zweiten, vierten und fünften Bruches erhalten wir:

$$-\frac{d x_1 + d x_2}{(x_2 + x_1) x_3} = \frac{d p_1 + d p_2}{(p_1 + p_2) x_3},$$

und dies, integrirt, führt zu

$$(p_1 + p_2)(x_1 + x_2) = a_1.$$

Wir setzen daher (mit Benutzung der Bezeichnung des vorhergehenden Paragraphen):

$$F_1 = (p_1 + p_2)(x_1 + x_2),$$

und haben zu bestimmen eine Lösung $F_2 = a_2$ der Hülfsgleichungen, welche der Gleichung

$$(F_1, F_2) = 0$$

genügt. Aus der Gleichheit des vierten und fünften Bruches ergiebt sich:

$$p_1 d p_1 = p_2 d p_2,$$

und daher können wir setzen:

$$\varphi = p_1^2 - p_2^2 = const.$$

Nun ist:

$$(F_1, \varphi) = (p_1 + p_2) 2 p_1 + (p_1 + p_2)(- 2 p_2)$$
$$= 2 \varphi = \varphi_1;$$

das fortgesetzte Einsetzen in die Gleichung

$$(F_1, \varphi_{i-1}) = \varphi_i$$

würde daher nicht zu einer Function, wie sie gesucht wird, führen. Wir kehren daher zu den ursprünglichen Hülfsgleichungen zurück, um ein von $F_1 = a_1$ und $\varphi = const.$ verschiedenes Integral zu suchen. Ein solches kann man herleiten aus der Gleichheit des dritten, vierten und fünften Bruches, welche giebt:

$$\frac{d p_1 - d p_2}{x_3 (p_1 - p_2)} = \frac{d x_3}{a (p_1 - p_2)},$$

und daher setzen wir:

$$\psi = a (p_1 - p_2) - \frac{1}{2} x_3^2 = const.$$

Nun ist:

$$(F_1, \psi) = (p_1 + p_2) a + (p_1 + p_2)(- a) = 0;$$

somit genügt ψ den beiden Gleichungen, und es ist demnach:

$$F_2 = a (p_1 - p_2) - \frac{1}{2} x_3^2 = a_2.$$

Wir lösen nun die Gleichungen

$$F = 0, \quad F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2$$

nach p_1, p_2, p_3 auf und erhalten:

$$p_1 = \frac{1}{2} \frac{a_1}{x_1 + x_2} + \frac{a_2}{2 a} + \frac{1}{4 a} x_3^2,$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \frac{a_1}{x_1 + x_2} - \frac{a_2}{2 a} - \frac{1}{4 a} x_3^2,$$

$$p_3 = \frac{2 - a_1 x_3}{2 a_2 + x_3^2} + \frac{1}{2 a} (x_1 - x_2) x_3.$$

Mithin:

$$d z = \frac{1}{2} a_1 d \log (x_1 + x_2) + \frac{1}{2 a} \left\{ \left(a_2 + \frac{1}{2} x_3^2 \right) (d x_1 - d x_2) \right.$$
$$\left. + (x_1 - x_2) x_3 \, d x_3 \right\} + \frac{2 - a_1 x_3}{2 a_2 + x_3^2} d x_3,$$

so dass das vollständige Integral der Differentialgleichung ist:

$$z + A = \frac{1}{2} a_1 \log (x_1 + x_2) + \frac{1}{2 a} (x_1 - x_2) \left(a_2 + \frac{1}{2} x_3^2 \right)$$
$$- \frac{1}{2} a_1 \log (x_3^2 + 2 a_2) + \left(\frac{2}{a_2} \right)^{1/2} arc\,tang \left\{ \frac{x_3}{(2 a_2)^{1/2}} \right\},$$

wobei A, a_1, a_2 die willkürlichen Constanten sind.

(Imschenetsky.)

5. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $p_1 x_1^2 = p_2^2 + a p_3^2.$

(2) $x_1 p_1^2 + x_2 p_2^2 + x_3 p_3^2 = p_1 p_2 p_3.$

(3) $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_3^2.$

(4) $p_1 + \frac{1}{2} p_2^2 + p_2 x_1 x_3 + p_3 x_1 x_2 = 0.$

(5) $p_1 p_2 p_3 = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3.$

Es ist bereits (in den §§. 189 bis 196) angegeben worden, dass einige der Formen, in denen nur zwei unabhängige Veränderliche vorkommen und die eine unmittelbare Integration gestatten, ohne dass man die Charpit'schen Hülfsgleichungen benutzte, derart verallgemeinert werden können, dass sie die Fälle in sich schliessen, in denen die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen grösser als zwei ist.

6. Aufgabe. In dem Falle, wo eine gegebene Differentialgleichung in der Form

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_r, p_1, p_2, \ldots, p_r) = f_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n, p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots, p_n)$$

geschrieben werden kann, ist das vollständige Integral das gemeinschaftliche Integral der Gleichungen:

$$f_1 = \alpha = f_2,$$

in denen α willkürlich ist. Denn die Hülfsgleichungen sind:

$$\frac{d x_1}{-\frac{\partial f_1}{\partial p_1}} = \frac{d p_1}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}} = \cdots = \frac{d x_r}{-\frac{\partial f_1}{\partial p_r}} = \frac{d p_r}{\frac{\partial f_1}{\partial x_r}}$$

$$= \frac{d x_{r+1}}{\frac{\partial f_2}{\partial p_{r+1}}} = \frac{d p_{r+1}}{\frac{\partial f_2}{\partial x_{r+1}}} = \cdots$$

Aus den ersten erhalten wir:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial p_1} d p_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_r} d x_r + \frac{\partial f_1}{\partial p_r} d p_r = 0,$$

und daher:

$$f_1 = \alpha$$
$$= f_2$$

zufolge der gegebenen Gleichung.

Als ein Beispiel hierzu wollen wir nehmen:

$$x_2 p_1 + x_1 p_2 + (p_1 - p_2)(p_3 + x_4)(p_4 + x_3) = 1.$$

Hier können wir setzen:

$$(p_3 + x_4)(p_4 + x_3) = \alpha$$
$$x_2 p_1 + x_1 p_2 + \alpha(p_1 - p_2) = 1,$$

wobei α eine willkürliche Constante ist. Das Integral der ersten Gleichung ist:

$$z + x_3 x_4 = A x_3 + \frac{\alpha}{A} x_4 + C,$$

worin A und C willkürliche Constanten sind. Das Integral der letzteren Gleichung kann man nach der Charpit'schen Methode erhalten. Die Hülfsgleichungen sind:

$$\frac{-dx_1}{x_2 + \alpha} = \frac{-dx_2}{x_1 - \alpha} = \frac{dp_1}{p_2} = \frac{dp_2}{p_1}.$$

Hieraus erhalten wir:

$$\frac{dp_1 + dp_2}{p_1 + p_2} + \frac{dx_1 + dx_2}{x_1 + x_2} = 0,$$

und daher:

$$(p_1 + p_2)(x_1 + x_2) = A_1 + 1.$$

Verbinden wir dies mit der Gleichung, deren Integral wir suchen, so erhalten wir:

$$(x_2 + \alpha) p_1 + (x_1 - \alpha) p_2 = 1$$
$$(x_1 - \alpha) p_1 + (x_2 + \alpha) p_2 = A_1,$$

und diese geben:

$$p_1 \{(x_1 - \alpha)^2 - (x_2 + \alpha)^2\} = A_1(x_1 - \alpha) - (x_2 + \alpha)$$
$$p_2 \{(x_1 - \alpha)^2 - (x_2 + \alpha)^2\} = x_1 - \alpha - A_1(x_2 + \alpha).$$

Demnach:

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2$$
$$= A_1\, d\, log \{(x_1 - \alpha)^2 - (x_2 + \alpha)^2\} + \frac{1}{2} d\, log \frac{1 + \frac{x_2 + \alpha}{x_1 - \alpha}}{1 - \frac{x_2 + \alpha}{x_1 - \alpha}},$$

und daher:

$$z = A_1 log \{x_1 - \alpha)^2 - (x_2 + \alpha)^2\} + \frac{1}{2} log \frac{(x_1 - \alpha) + (x_2 + \alpha)}{(x_1 - \alpha) - (x_2 + \alpha)} + C_1.$$

Das vollständige Integral der ursprünglichen Gleichung ist somit:

$$z + x_3 x_4 = A x_3 + \frac{\alpha}{A} x_4 + A_1 log \{(x_1 - \alpha)^2 - (x_2 + \alpha)^2\}$$
$$+ B + \frac{1}{2} log \frac{(x_1 - \alpha) + (x_2 + \alpha)}{(x_1 - \alpha) - (x_2 + \alpha)},$$

wobei A, A_1, B, α willkürliche Constanten sind.

7. Aufgabe. Man integrire die Gleichung:

$$(x_2 p_1 + x_1 p_2) x_3 + p_3 (p_1 - p_2) \{p_4^2 + (p_5 + x_4)(p_5 + x_6) p_6\} = a.$$

(Imschenetsky.)

Simultane partielle Differentialgleichungen*).

§. 224.

Anstatt dass nur eine einzige partielle Differentialgleichung zur Bestimmung der abhängigen Veränderlichen gegeben ist, kann eine Anzahl simultaner Gleichungen gegeben sein. Wenn die abhängige Veränderliche explicit in jeder von ihnen vorkommt, so können diese sämmtlich wie in §. 209 derart transformirt werden, dass sie daraus verschwindet. Alsdann können die Gleichungen von der Form angenommen werden:

$$F_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0.$$
$$F_2 (x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_m (x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0.$$

Ist m grösser als n, so können die Gleichungen nicht unabhängig von einander sein; denn die n ersten der Gleichungen lassen sich algebraisch auflösen, so dass sich die Werthe der p durch die Veränderlichen x ausdrücken, und diese Werthe müssen, wenn sie in die übrig bleibenden $m-n$ Gleichungen eingesetzt werden, dieselben identisch befriedigen, da sonst Beziehungen zwischen den unabhängigen Veränderlichen bestehen würden. Es können daher in der That nur höchstens n simultane Gleichungen gegeben sein, und wir können somit m entweder gleich n oder kleiner als n annehmen.

§. 225.

I. Es sei $m = n$. Wir haben dann also n Gleichungen, welche die Werthe der n Grössen p als Functionen der Veränderlichen bestimmen. Werden diese Werthe in den Ausdruck

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n$$

---

*) Diese Theorie verdankt man Bour; siehe die in §. 223, S. 386 erwähnten Quellenschriften. Anmerk. d. Verf.

eingesetzt, so muss derselbe ein vollständiges Differential werden, wenn das gegebene System eine gemeinschaftliche Lösung haben soll. Die Bedingungen hierfür bestehen darin, dass

$$\frac{\partial p_r}{\partial x_s} = \frac{\partial p_s}{\partial x_r}$$

sein muss für alle Paare von Werthen der Indices, und diese führen wie in §. 211 zu Gleichungen von der Form:

$$(F_r, F_s) = 0.$$

Es müssen daher die gegebenen Functionen sämmtlichen Gleichungen für die verschiedenen Combinationen der Indices genügen; alsdann wird das gemeinschaftliche vollständige Integral erhalten durch Integration von

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n$$

und enthält daher eine willkürliche Constante.

Es kann indessen vorkommen, dass die Functionen F nicht unabhängig von einander sind; in diesem Falle ist die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1}, & \frac{\partial F_1}{\partial p_2}, & \ldots, & \frac{\partial F_1}{\partial p_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_n}{\partial p_1}, & \frac{\partial F_n}{\partial p_2}, & \ldots, & \frac{\partial F_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

gleich Null, und es wird dann eine identische Relation von der Form bestehen:

$$\Phi(F_1, F_2, \ldots, F_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Für die Integration ist aber $F_1 = F_2 = \cdots = F_n = 0$, es wird daher diese Gleichung:

$$\Phi(0, 0, \ldots, 0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Wäre dies keine Identität, so würde sie eine Relation darstellen zwischen den unabhängigen Veränderlichen, was unmöglich ist; es folgt dann, dass die gegebenen Gleichungen mit einander im Widerspruch stehen und kein gemeinschaftliches Integral besitzen. Ist es aber eine Identität, so ist die Anzahl der gegebenen von einander unabhängigen Gleichungen kleiner als die Anzahl der Grössen p; diese können daher nicht aus den gegebenen Gleichungen allein bestimmt werden; wir müssen daher zu der Methode unsere Zuflucht nehmen, welche in dem Falle, wo $m < n$ ist, angewendet wird.

Sind z. B. vier unabhängige Veränderliche vorhanden und vier Gleichungen $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 0$ gegeben, so können dieselben kein gemeinschaftliches Integral besitzen, wenn etwa zwischen ihnen eine Relation besteht von der Form:

$$F_4 = (x_1 - x_2)\, F_1 + (x_2 - x_3)\, F_2 + x_1\, x_2\, x_3\, x_4;$$

besteht dagegen eine Relation von der Form:

$$F_4 = (x_1 - x_2)\, F_3 + (x_2 - x_3)\, F_1 + (x_3 - x_1)\, F_2,$$

so sind nur drei unabhängige Gleichungen vorhanden.

§. 226.

II. Es sei nun m kleiner als n. Wir können annehmen, dass die Gleichungen auf eine solche Anzahl reducirt sind, dass sie sämmtlich von einander unabhängig sind, selbst wenn sie es in der Form, in welcher sie zuerst gegeben waren, nicht sind. Es wird ferner vorausgesetzt, dass es ein gemeinschaftliches Integral giebt, so lange die algebraischen Relationen, welche die abhängigen Functionen vermittelst der anderen ausdrücken, darauf hinweisen. Dies wird der Fall sein, wenn diese Gleichungen sich identisch auf Null reduciren, wenn man in ihnen von den Gleichungen $F_1 = 0, \ldots, F_m = 0$ Gebrauch macht.

Erster Fall. Die Functionen $F_1 = 0 = \cdots = F_m$ mögen den Gleichungen

$$(F_r,\, F_s) = 0$$

genügen für alle Werthe $1, 2, \ldots, m$ von r und s; alsdann sind sie gleichzeitig integrirbar. Um die Werthe der Grössen p zu bestimmen, muss man nach der Jacobi'schen Methode $n - m$ andere Gleichungen suchen, welche $n - m$ willkürliche Constanten enthalten werden. Aus diesen Gleichungen und den gegebenen m Gleichungen können die Werthe der p abgeleitet und in

$$dz = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \cdots + p_n\, dx_n$$

eingesetzt werden. Das Integral hiervon ist das gemeinschaftliche vollständige Integral der ursprünglichen Gleichungen und enthält $n - m + 1$ willkürliche Constanten.

Zweiter Fall. Es ist möglich, dass sich (F_r, F_s) für eine oder für einige Combinationen der Indices aus der Reihe $1, 2, \ldots, m$ als eine Function der unabhängigen Veränderlichen allein oder als eine bestimmte Constante herausstellt. In keinem dieser Fälle

könnte (F_r, F_s) zu Null werden. Alsdann sind die Bedingungen dafür, dass die Gleichungen gleichzeitig integrirbar sein sollen, nicht erfüllt, und es giebt daher auch kein gemeinschaftliches Integral der vorgelegten Gleichungen.

Dritter Fall. Es kann vorkommen, dass sich für eine oder für mehrere Combinationen der Indices aus der Reihe 1, 2, ..., m Resultate von der Form ergeben:

$$(F_r, F_s) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

worin f nicht identisch Null wird, wenn man die gegebenen Gleichungen darauf anwendet. Giebt es l solcher Combinationen, wo $m + l$ nicht grösser sein darf als n, so sind für alle anderen Combinationen ausser für diese l die Gleichungen

$$(F_r, F_s) = 0$$

befriedigt. Wir setzen nun:

$$0 = F_{m+1} = f_1,\ 0 = F_{m+2} = f_2, \ldots, 0 = F_{m+l} = f_l$$

und substituiren dies in die Functionen

$$(F_r, F_s),$$

in denen mindestens entweder r oder s grösser als m sein muss.

Wenn dann diese Functionen sämmtlich verschwinden, so haben wir $m + l$ Gleichungen, welche simultan integrirbar sind, und bestimmen nach der Jacobi'schen Methode die $n - m - l$ übrigen Gleichungen, welche nothwendig sind, um das vollständige Integral darzustellen, das demnach $n - m - l + 1$ willkürliche Constanten enthalten wird.

Wenn für irgend eine Combination (F_{m-i}, f_k) oder für eine (f_i, f_k) die Function eine bestimmte Constante oder eine Function der unabhängigen Veränderlichen allein ist, so sind die Gleichungen nicht simultan integrirbar und sie besitzen kein gemeinschaftliches Integral.

Wenn wir für irgend eine Combination (F_{m-i}, f_k) oder für eine (f_i, f_k) eine Function $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$, welche mit Berücksichtigung der bereits erhaltenen Gleichungen nicht verschwindet, erhalten, so verfahren wir mit den Functionen φ gerade so, wie wir es vorher mit den Functionen f gethan haben. Schliesslich werden wir zu einer endlichen Anzahl (nicht mehr als n) von unabhängigen Gleichungen gelangen, welche simultan integrirbar sind, und sodann auf dem gewöhnlichen Wege das gemeinschaftliche Integral erhalten; oder wir werden ein Resultat erhalten,

welches die Unmöglichkeit einer simultanen Integration anzeigt, in welchem Falle es kein gemeinschaftliches Integral geben wird.

1. Aufgabe. Man suche (falls ein solches existirt) ein gemeinschaftliches Integral der simultanen Gleichungen:

$$F_1 = p_1 p_2 - x_3 x_4 = 0$$
$$F_2 = p_3 p_4 - x_1 x_2 = 0.$$

Wir erhalten:

$$(F_1, F_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - p_3 x_3 - p_4 x_4,$$

worin die rechte Seite auch mit Berücksichtigung von $F_1 = F_2 = 0$ nicht verschwindet. Wir setzen daher:

$$F_3 = p_1 x_1 + p_2 x_2 - p_3 x_3 - p_4 x_4 = 0.$$

Auf diese Weise wird:

$$(F_1, F_2) = 0$$
$$(F_1, F_3) = -2 p_1 p_2 + 2 x_3 x_4 = 0$$
$$(F_2, F_3) = 2 p_3 p_4 - 2 x_1 x_2 = 0;$$

es sind daher die drei Gleichungen mit einander verträglich. Ist F_4 die andere gesuchte Function, so dass sie also bestimmt wird als ein gemeinschaftliches Integral der Gleichungen

$$(F_4, F_3) = 0 = (F_4, F_2) = (F_4, F_1)$$

und betrachten wir sie als ein Integral von:

$$(F_4, F_3) = 0;$$

so haben wir die Gleichungen:

$$-\frac{dx_1}{x_1} = -\frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_3} = \frac{dx_4}{x_4} = \frac{dp_1}{p_1} = \frac{dp_2}{p_2} = -\frac{dp_3}{p_3} = -\frac{dp_4}{p_4},$$

von denen ein Integral ist:

$$p_1 = a x_3,$$

worin a willkürlich ist. Wir setzen daher versuchsweise:

$$F_4 = \frac{p_1}{x_3} = a,$$

und finden dann:

$$(F_4, F_1) = 0$$

und:

$$(F_4, F_2) = \frac{x_2}{x_3} - \frac{p_1}{x_3^2} p_4.$$

Löst man nun die Gleichungen

$$F_1 = 0 = F_2 = F_3,\ F_4 = a,$$

so findet man:

$$p_1 = a x_3,\ p_2 = \frac{1}{a}\, x_4,\ p_3 = a x_1,\ p_4 = \frac{1}{a}\, x_2,$$

und daher:

$$p_1 p_4 = x_2 x_3,$$

folglich:

$$(F_4,\ F_2) = 0.$$

Hieraus erhalten wir die gemeinschaftliche Lösung in der Form:

$$p_1 = a x_3.$$

Um das vollständige gemeinschaftliche Integral zu erhalten, haben wir:

$$dz = a\,(x_3\,dx_1 + x_1\,dx_3) + \frac{1}{a}\,(x_4\,dx_2 + x_2\,dx_4),$$

und somit ist das gemeinschaftliche Integral:

$$z = a x_1 x_3 + \frac{1}{a}\, x_2 x_4 + b,$$

worin a und b willkürliche Constanten sind.

2. Aufgabe. Man bestimme andere Integrale in der Form:

$$(1)\quad z = a x_1 x_4 + \frac{1}{a}\, x_2 x_3 + b.$$

$$(2)\quad z = 2\,\{x_2 x_4 (x_1 x_3 - a)\}^{1/2} + b.$$

$$(3)\quad z = 2\,\{x_1 x_3 (x_2 x_4 - a)\}^{1/2} + b.$$

3. Aufgabe. Man suche gemeinsame vollständige Integrale für die simultanen Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} p_1 + (x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_4)\,p_4 + (x_2 + x_4 - 3\,x_1)\,p_3 = 0 \\ p_2 + (x_1 x_3 x_4 + x_2 - x_1 x_2)\,p_4 + (x_3 x_4 - x_2)\,p_3 = 0. \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} 2\,x_5 p_4 + x_1^2 p_5 = 0 \\ x_1^2 p_1 - 2\,x_5 p_2 + (x_1^2 x_4 - 2\,x_5)\,p_3 - 2\,x_1 x_4 p_4 = 0. \end{cases}$$

(Imschenetsky und Graindorge.)

Vermischte Aufgaben.

1. Man integrire die Gleichungen:

$$(1)\quad \{m\,(x+y) - n\,(x+z)\}\,p + \{n\,(y+z) - l\,(y+x)\}\,q = l\,(z+x) - m\,(z+y).$$

$$(2)\quad p\,(z + e^x) + q\,(z + e^y) = z^2 - e^{x+y}$$

$$(3)\quad x^2 (y-z)\,p + y^2 (z-x)\,q = z^2 (x-y).$$

2. Man bilde die Differentialgleichung, deren vollständiges Integral lautet:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z,$$

wobei $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a^2$ ist und a eine gegebene Constante bedeutet, während α, β, γ sonst willkürlich sind. Man bilde ferner aus der Differentialgleichung das singuläre Integral und erläutere den Zusammenhang zwischen dem vollständigen, allgemeinen und singulären Integral durch eine geometrische Interpretation eines jeden.

3. Man integrire die Gleichung:

$$x^2 p + y^2 q = z^2,$$

und suche die Gleichung des Kegels zweiter Ordnung, welcher dieser Gleichung genügt und durch den Punkt (1, 2, 3) geht.

4. Man integrire die Gleichung:

$$(y - z)\, X^{1/2} \frac{\partial v}{\partial x} + (z - x)\, Y^{1/2} \frac{\partial v}{\partial y} + (x - y)\, Z^{1/2} \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

worin X, Y, Z dieselben quadratischen Functionen respective von x, y, z sind.

Man integrire die Gleichung auch, wenn diese Functionen vom vierten Grade oder wenn sie vom sechsten Grade sind. (Richelot.)

5. Man beweise, dass, wenn

$$u = e^{h \frac{d^2}{dx^2}} e^{k x^2}$$

ist, die Gleichung gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial h} = 4 k^2 \frac{\partial u}{\partial k} + 2 k u,$$

und hieraus, dass

$$u = (1 - 4hk)^{-1/2} e^{\frac{k x^2}{1 - 4hk}}$$

ist.

Man zeige ferner, dass man hat:

$$e^{h \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}} e^{k x y} = (1 - hk)^{-1} e^{\frac{k x y}{1 - hk}}.$$

Analog beweise man, dass

$$e^{h \frac{d^2}{d x^2}} \{x e^{-k x^2}\} = \frac{x}{(1 + 4hk)^{3/2}}\, e^{-\frac{k x^2}{1 + 4hk}}$$

ist.

6. Man löse die Gleichung:

$$(X_1 - x_1 X_3) p_1 + (X_2 - x_2 X_3) p_2 = 1,$$

worin

$$X_\mu = a_{\mu,1} x_1 + a_{\mu,2} x_2 + a_{\mu,3}$$

ist. (Hesse.)

7. Man löse die Gleichungen:

(1) $p^2 + q^2 = x^2 + xy + y^2.$

(2) $pq = px + qy.$

(3) $pq = py + qx.$

(4) $$p_1 p_2 p_3 + x_1 x_2 x_3 (x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) = x_2 x_3 p_2 p_3 + x_3 x_1 p_3 p_1 + x_1 x_2 p_1 p_2.$$

8. Man bestimme die Gleichung einer Fläche, welche zugleich zu den durch die Gleichung $py - qx = 0$ definirten Rotationsflächen und zu den durch die Gleichung $px + qy = z$ definirten conischen Flächen gehört.

9. Wenn $z = f(x, y)$ irgend eine Lösung der Gleichung

$$p^2 - q^2 + 2pqz = c^2 (1 + z^2)^{5/2}$$

ist, so bilden die durch die Gleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2f(x,y)\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

dargestellten Curven ein orthogonales System von solcher Art, dass das Product der Krümmungen in jedem Punkte constant ist.

Wenn $f(x, y)$ nicht y enthält, so wird die Form der Function bestimmt durch:

$$f(x) = tang\, \vartheta\, (2 + tg^2 \vartheta)^{1/2},$$

worin

$$cx = 2^{3/2} E(2^{-1/2}, \vartheta) - 2^{1/2} F(2^{-1/2}, \vartheta)$$

ist, und F und E das elliptische Integral erster und zweiter Art mit dem Modulus $2^{-1/2}$ bedeuten.

10. Man suche die Oberfläche, welche alle Kugeln unter rechtem Winkel schneidet, die durch einen gegebenen Punkt gehen und ihre Mittelpunkte auf einer gegebenen durch diesen Punkt gehenden Linie haben.

11. Man suche die Oberfläche, bei welcher die Coordinaten der Punkte, in denen die Normale die xy-Ebene trifft, proportional sind zu den Coordinaten der entsprechenden Punkte der Oberfläche.

12. Man bestimme das Flächensystem, welches zu den Curven

$$cosh\, x : cosh\, y : cosh\, z = a : b : c$$

orthogonal ist.

13. Man zeige, dass eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

lautet:

$$u = \begin{vmatrix} \varphi_y, & \varphi_z \\ \psi_y, & \psi_z \end{vmatrix}, \quad v = \begin{vmatrix} \varphi_z, & \varphi_x \\ \psi_z, & \psi_x \end{vmatrix}, \quad w = \begin{vmatrix} \varphi_x, & \varphi_y \\ \psi_x, & \psi_y \end{vmatrix},$$

worin φ und ψ willkürliche Functionen von x, y, z sind.

Man beweise ferner, dass dies die allgemeine Lösung ist.

14. Man zeige, dass, wenn die simultanen Gleichungen

$$X \frac{\partial u}{\partial x} + Y \frac{\partial u}{\partial y} + Z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$X' \frac{\partial u}{\partial x} + Y' \frac{\partial u}{\partial y} + Z' \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

eine von $u = const$ verschiedene Lösung haben, alsdann

$$(YZ' - Y'Z)\,dx + (ZX' - XZ')\,dy + (XY' - X'Y)\,dz = 0$$

auf eine exacte Differentialgleichung reducirbar ist, aus deren Integral eine gemeinschaftliche Lösung hergeleitet werden kann.

Haben die Gleichungen

$$yz \frac{\partial u}{\partial x} + zx \frac{\partial u}{\partial y} + xy \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$(y - z) \frac{\partial u}{\partial x} + (z - x) \frac{\partial u}{\partial y} + (x - y) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

eine gemeinschaftliche Lösung ausser $u = const$?

15. Man löse nach der Jacobi'schen Methode die Gleichung:

$$p_1 + (3x_2 + 2x_3)p_2 + (4x_2 + 5x_3)p_3 + \{x_4 + x_5(p_2 - p_3)\}p_5 + \frac{x_5}{p_4} p_5^2 = 0.$$

(Imschenetsky.)

Man zeige, dass man durch Verallgemeinerung der Formeln, welche in dem Falle zweier unabhängiger Veränderlichen der analytische Ausdruck des Princips der Dualität sind, diese Gleichung in eine andere transformiren kann, welche linear ist in den partiellen Differentialquotienten der neuen Veränderlichen, und integrire hiernach die obige Gleichung.

16. Man löse nach der Jacobi'schen Methode die Gleichung:

$$x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 - 2x_1 z - b \log p_2 + 2b \log x_1 = a.$$

(Ampère und Graindorge.)

17. Man bestimme das vollständige gemeinsame Integral der simultanen Gleichungen:

$$\begin{cases} 2x_2 x_4^2 p_1 + x_3^2 x_4 p_4 - x_3^2 = 0 \\ 2x_2 p_2 - x_4 p_4 - 1 = 0 \\ x_2 x_4^2 p_3 + x_1 x_3 x_4 p_4 - x_1 x_3 = 0. \end{cases}$$

(Collet.)

18. Man bestimme das vollständige gemeinsame Integral von:

$$(\alpha)\begin{cases} (x_4^2 - x_3^2)p_1 + (x_1 x_3 - x_2 x_4)p_3 + (x_2 x_3 - x_1 x_4)p_4 = 0 \\ (x_4^2 - x_3^2)p_2 + (x_2 x_3 - x_1 x_4)p_3 + (x_1 x_3 - x_2 x_4)p_4 = 0, \end{cases}$$

sowie das von:

$$(\beta)\begin{cases} x_1 p_1 - x_2 p_2 + x_3 p_3 - x_4 p_4 = 0 \\ x_3 p_1 + x_4 p_2 - x_1 p_3 - x_2 p_4 = 0. \end{cases}$$

(Collet.)

Zehntes Capitel.

Partielle Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung.

§. 227.

Es wird durch das ganze gegenwärtige Capitel hindurch angenommen, dass nur zwei unabhängige Veränderliche vorhanden sind; ferner soll die bereits benutzte Bezeichnung für die partiellen Differentialquotienten erster Ordnung beibehalten werden, und es wird zweckmässig sein, analoge Bezeichnungen r, s, t für diejenigen zweiter Ordnung einzuführen, die demnach definirt werden durch:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Eine Gleichung wird von der zweiten Ordnung genannt, wenn sie wenigstens einen der Differentialquotienten r, s, t, aber keinen von höherer Ordnung enthält. Die Grössen p und q können ebenfalls in der Gleichung vorkommen, so dass die allgemeine Form derselben sein wird:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Das **vollständige Integral** der Gleichung ist die allgemeinste Relation zwischen x, y, z, welche es giebt, von der Art, dass, wenn man den aus ihr sich ergebenden Werth von z und die betreffenden aus diesem abgeleiteten Differentialquotienten in die Differentialgleichung substituirt, dieselbe identisch erfüllt wird. Der Definition ist keine Bedingung auferlegt in Bezug auf die Form des vollständigen Integrals, welches in seinem Ausdruck entweder willkürliche Constanten oder willkürliche Functionen oder beides enthalten kann.

Ein **Zwischenintegral** ist eine Beziehung in der Form einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, von der Beschaffenheit, dass aus ihr die gegebene Differentialgleichung wieder abgeleitet werden kann. Es braucht nicht nothwendig von dem vollständigen Integral verschieden und aus ihm unmittelbar durch blosse Differentiation ableitbar zu sein. Wenn man jedoch ein solches Integral erhalten hat, so wird die Anwendung der Methode des vorigen Capitels ein Integral geben, welches wirklich das vollständige Integral oder auch bloss ein besonderer Fall desselben sein kann.

§. 228.

Bis heute ist man nur **in besonderen** Fällen im Stande, die allgemeine Gleichung zu integriren. Der wichtigste von diesen Fällen ist der, wo die Differentialquotienten der zweiten Ordnung nur im ersten Grade vorkommen, so dass die Gleichung linear ist. Ihre allgemeinste Form ist dann:

$$Rr + Ss + Tt = V,$$

worin R, S, T, V Functionen von x, y, z, p und q sind. Diese Gleichung soll nun discutirt werden; bevor wir aber die Methoden angeben, die man zu ihrer Integration benutzt hat, ist es wünschenswerth, einige specielle Formen zu betrachten, welche einfach sind und sich unmittelbar lösen lassen; wir werden dann später diese Fälle bei der allgemeinen Discussion ausschliessen können.

Einer der einfachsten Fälle ist:

$$r = f(x),$$

so dass

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \int f(x)\, dx + \varphi(y),$$

worin φ eine willkürliche Function ist; eine nochmalige Integration giebt:

$$z = \int\int f(x)\, dx^2 + x\varphi(y) + \psi(y),$$

worin sowohl φ als ψ willkürlich ist.

1. Aufgabe. Man integrire die Gleichung:

$$s = const.$$

In analoger Weise können wir die Gleichung integriren:

$$r + Mp = N,$$

worin M und N Functionen respective von x und y sind. Dieselbe kann geschrieben werden in der Form:

$$\frac{dp}{dx} + Mp = N,$$

da y in Bezug auf Differentiation und Integration nach x constant ist. Demnach ist:

$$p = e^{-\int M dx}[\int e^{\int M dx} N dx + \varphi(y)],$$

wobei φ eine willkürliche Function bedeutet, und daher:

$$z = \int dx e^{-\int M dx}[\int e^{\int M dx} N dx + \varphi(y)] + \psi(y),$$

wo ψ eine willkürliche Function ist.

2. Aufgabe. Man integrire die Gleichungen:

$$(1) \quad s + Mp = N.$$
$$(2) \quad s + Mq = N.$$

Die Methode von Monge zur Integration der Gleichung: $Rr + Ss + Tt = V$.

§. 229.

Das Monge'sche Verfahren besteht in einem gewissen Processe zur Ermittelung eines oder zweier Zwischenintegrale von der Form

$$u = f(v),$$

wo u und v Functionen von x, y, z, p, q sind und f eine willkürliche Function bezeichnet; es wird daher bei dieser Methode stillschweigend die Annahme gemacht, dass die Differentialgleichung ein solches Integral zulässt. Es ist somit an erster Stelle zu untersuchen, ob diese Annahme in dem allgemeinen Falle gerechtfertigt ist, und, wenn es sich zeigen sollte, dass dem nicht so ist, anzugeben, wie die allgemeine Gleichung zu beschränken sei, damit diese Annahme unbedenklich gemacht werden könne. Zu diesem Zwecke brauchen wir nur von dem angenommenen Zwischenintegral auszugehen und die entsprechende Differentialgleichung aufzustellen.

§. 230.

Da $u = f(v)$ ist und u und v Functionen von x, y, z, p, q sind, so erhalten wir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} + r\frac{\partial u}{\partial p} + s\frac{\partial u}{\partial q}$$
$$= \frac{df}{dv}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} + r\frac{\partial v}{\partial p} + s\frac{\partial v}{\partial q}\right)$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} + s\frac{\partial u}{\partial p} + t\frac{\partial u}{\partial q}$$
$$= \frac{df}{dv}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z} + s\frac{\partial v}{\partial p} + t\frac{\partial v}{\partial q}\right).$$

Eliminiren wir die Grösse $\frac{df}{dv}$ aus diesen beiden Gleichungen, so finden wir als die entsprechende von der willkürlichen Function freie Differentialgleichung:

$$(1) \qquad rR_1 + sS_1 + tT_1 + U_1(rt - s^2) = V_1,$$

worin R_1, S_1, T_1, U_1, V_1 gegeben werden durch die Relationen:

$$R_1 = \left(\frac{u, v}{p, y}\right) + q\left(\frac{u, v}{p, z}\right)$$
$$S_1 = \left(\frac{u, v}{q, y}\right) + q\left(\frac{u, v}{q, z}\right) + \left(\frac{u, v}{x, p}\right) + p\left(\frac{u, v}{z, p}\right)$$
$$T_1 = \left(\frac{u, v}{x, q}\right) + p\left(\frac{u, v}{z, q}\right)$$
$$U_1 = \left(\frac{u, v}{p, q}\right)$$
$$V_1 = q\left(\frac{u, v}{z, x}\right) + p\left(\frac{u, v}{y, z}\right) + \left(\frac{u, v}{y, x}\right).$$

Hierin bezeichnen die Symbole $\left(\frac{u, v}{x, y}\right)$, ··· wie gewöhnlich die Ausdrücke $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$, ···

Soll dann diese Differentialgleichung zweiter Ordnung dieselbe sein wie die ursprüngliche Gleichung, so müssen wir haben:

$$U_1 = 0$$

und

$$\frac{R_1}{R} = \frac{S_1}{S} = \frac{T_1}{T} = \frac{V_1}{V},$$

was im Ganzen vier Gleichungen sind. Wenn nun

$$(2) \qquad Rr + Ss + Tt = V$$

als die zu lösende Gleichung betrachtet wird, so werden diese vier soeben erhaltenen Gleichungen befriedigt werden durch die Grössen u und v, aus denen das Zwischenintegral von (2) gebildet werden kann. Da aber nur zwei Gleichungen erforderlich sind, um die abhängigen Veränderlichen u und v als Functionen ihrer unabhängigen Veränderlichen zu bestimmen, so kann man sich diese Grössen u und v aus irgend zwei von diesen Gleichungen bestimmt denken, wenn auch ihre Auflösung in der Praxis grosse Schwierigkeiten bereiten könnte. Werden diese Werthe in die anderen beiden Gleichungen eingesetzt, so müssen die letzteren identisch erfüllt werden, und sie werden in diesem Zustande die Functionen R, S, T und V der ursprünglichen Differentialgleichung enthalten. Mithin wird es zwischen diesen Functionen von x, y, z, p, q zwei Relationen geben, welche identisch befriedigt sein müssen, wenn die Differentialgleichung (2) ein Zwischenintegral von der Form

$$u = f(v)$$

besitzen soll.

§. 231.

Eine wichtige Folgerung hieraus ist zu bemerken, obwohl dieselbe unseren gegenwärtigen Zweck nicht berührt; es würde unnütz sein, ein Integral von der vorausgesetzten Zwischenform zu suchen für irgend eine Differentialgleichung, welche nicht von der Form ist:

$$Rr + Ss + Tt + U(rt - s^2) = V.$$

Und gerade wie in dem bereits betrachteten speciellen Falle, wo $U = 0$ ist, lässt sich beweisen, dass eine Differentialgleichung von dieser Form nur dann ein Zwischenintegral von der angenommenen Form besitzen kann, wenn zwischen den Coefficienten R, S T, U, V zwei identische Relationen bestehen.

Aufgabe. Sind drei unabhängige Veränderliche gegeben, so können dieselben zweckmässig durch x_1, x_2, x_3 und die entsprechenden Differentialquotienten von z durch p_1, p_2, p_3 bezeichnet werden. Man beweise, dass, wenn jede erste Unterdeterminante der Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}, & \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}, & \frac{\partial\varphi}{\partial p_3} \\ \frac{\partial\psi}{\partial p_1}, & \frac{\partial\psi}{\partial p_2}, & \frac{\partial\psi}{\partial p_3} \\ \frac{\partial\chi}{\partial p_1}, & \frac{\partial\chi}{\partial p_2}, & \frac{\partial\chi}{\partial p_3} \end{vmatrix}$$

(in welcher φ, ψ, χ Functionen von z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3 sind) verschwindet, alsdann die Gleichung

$$F(\varphi, \psi, \chi) = 0,$$

in welcher F eine willkürliche Function ist, zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form führt:

$$R_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + R_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + R_3 \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} + R_{12} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + R_{23} \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} + R_{31} \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_1} = V,$$

in welcher R_1, R_2, ..., R_{31}, V Functionen der Veränderlichen und der ersten Differentialquotienten von z allein sind, und dass die Coefficienten R der Bedingung genügen:

$$R_1 R_{23}^2 + R_2 R_{31}^2 + R_3 R_{12}^2 - 4 R_1 R_2 R_3 - R_{12} R_{23} R_{31} = 0.$$

Belehrung über diese Classe von Gleichungen wird man finden bei Euler, Inst. Calc. Int. Vol. III, p. 448 und Legendre, Mémoires de l'Académie des Sciences 1787, p. 323.

§. 232.

Es ergiebt sich daher, dass wir als allgemeinsten Fall die Gleichung betrachten können:

$$Rr + Ss + Tt + U(rt - s^2) = V.$$

Die lineare Gleichung ist in dieser enthalten, da sie aus ihr für den besonderen Werth $U = 0$ entsteht.

Wir nehmen nun an, dass die Beziehungen zwischen den Grössen R, S, T, U, V, welche erforderlich sind, wenn die Gleichung ein Zwischenintegral von der vorausgesetzten Form besitzen soll, erfüllt seien, und gehen dazu über, dieses Integral zu bestimmen.

Wir haben stets:

$$dp = r dx + s dy$$
$$dq = s dx + t dy.$$

Werden die aus diesen Gleichungen abgeleiteten Werthe von r und t in die obige allgemeine Gleichung substituirt, so nimmt sie die Form an:

$$R dp dy + T dq dx + U dp dq - V dx dy$$
$$= s(R dy^2 - S dx dy + T dx^2 + U dp dx + U dq dy).$$

Sind nun

$$u = a \quad \text{und} \quad v = b$$

(wo a und b willkürliche Constanten sind) zwei Integrale der Gleichungen:

$$R\,dp\,dy + T\,dq\,dx + U\,dp\,dq - V\,dx\,dy = 0$$
$$R\,dy^2 + T\,dx^2 + U\,dp\,dx + U\,dq\,dy = S\,dx\,dy$$
$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

so dass u und v Functionen von x, y, z, p, q sind, so erhalten wir:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right)dy + \frac{\partial u}{\partial p}dp + \frac{\partial u}{\partial q}dq = 0$$

und

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right)dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right)dy + \frac{\partial v}{\partial p}dp + \frac{\partial v}{\partial q}dq = 0,$$

und diese müssen den Gleichungen, deren Integrale $u = a$ und $v = b$ sind, äquivalent sein. Löst man nun diese nach dp und dq auf und benutzt die Bezeichnungen des §. 230, so findet man:

$$-U_1\,dp = T_1\,dx + \left\{\left(\frac{u,v}{y,q}\right) + \left(\frac{u,v}{z,q}\right)q\right\}dy$$
$$-U_1\,dq = R_1\,dy + \left\{\left(\frac{u,v}{p,x}\right) + \left(\frac{u,v}{p,z}\right)p\right\}dx,$$

und daher:

$$-U_1\,dp\,dx - U_1\,dq\,dy$$
$$= T_1\,dx^2 + R_1\,dy^2 + \left\{\left(\frac{u,v}{y,q}\right) + \left(\frac{u,v}{z,q}\right)q + \left(\frac{u,v}{p,x}\right) + \left(\frac{u,v}{p,z}\right)p\right\}dx\,dy$$
$$= T_1\,dx^2 + R_1\,dy^2 - S_1\,dx\,dy,$$

und analog erhält man:

$$(U_1\,dp + T_1\,dx)(U_1\,dq + R_1\,dy) = (U_1\,V_1 + R_1\,T_1)\,dx\,dy$$

oder:

$$R_1\,dp\,dy + T_1\,dq\,dx + U_1\,dp\,dq - V_1\,dx\,dy = 0.$$

Da diese identisch sind mit den früheren Gleichungen, so ergiebt sich:

$$\frac{R_1}{R} = \frac{T_1}{T} = \frac{U_1}{U} = \frac{V_1}{V} = \frac{S_1}{S},$$

und daher wird die zu lösende Gleichung:

$$R_1 r + S_1 s + T_1 t + U_1(rt - s^2) = V_1.$$

Die Lösung dieser Gleichung kennen wir aber bereits, da sie aus einem Zwischenintegral abgeleitet war, und dieses Integral ist:

$$u = f(v).$$

Es ist dies somit ein Zwischenintegral, wie es gesucht wird.

Wir erhalten daher das Integral, indem wir die eine der aus den beiden Hülfsgleichungen abgeleiteten Functionen zu einer willkürlichen Function der anderen machen.

§. 233.

Betrachten wir insbesondere den Fall der linearen Gleichung, in welchem $U = 0$ ist, so haben wir die Hülfsgleichungen:

$$R\,dy^2 + T\,dx^2 - S\,dx\,dy = 0$$
$$R\,dp\,dy + T\,dq\,dx = V\,dx\,dy.$$

Da die erste von diesen vom zweiten Grade ist, so lässt sie sich im Allgemeinen zerlegen in zwei verschiedene Gleichungen ersten Grades; jede von diesen wird sodann, wenn man sie mit der letzten Gleichung und, wenn nothwendig, mit

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

verbindet, zu einem Integralsystem führen, welches u und v bestimmen wird.

Man erhält auf diese Weise zwei Zwischenintegrale von der Form:

$$u_1 = f(v_1), \quad u_2 = f(v_2),$$

ausser in dem Falle, wo $S^2 = 4\,R\,T$ ist, in welchem sich nur ein einziges Integral von dieser Form ergiebt.

§. 234.

Gehen wir nun zu dem allgemeineren Falle über, in welchem U **nicht gleich** Null ist, so können wir beweisen, dass sich aus den Hülfsgleichungen im Allgemeinen **zwei** Zwischenintegrale ableiten lassen. Multipliciren wir die Hülfsgleichung, welche V enthält, mit einer bisher noch unbestimmten Grösse λ und addiren sie dann zu einander, so ist das Resultat:

$$R\,dy^2 + T\,dx^2 - (S + \lambda V)\,dx\,dy + U\,dp\,dx + U\,dq\,dy$$
$$+ \lambda R\,dp\,dy + \lambda T\,dq\,dx + \lambda U\,dp\,dq = 0.$$

Dasselbe lässt sich nun zerlegen in zwei lineare Factoren von der Art, dass es äquivalent ist zu:

$$(R\,dy + k\,T\,dx + m\,U\,dp)\left(dy + \frac{1}{k}\,dx + \frac{\lambda}{m}\,dq\right) = 0,$$

vorausgesetzt, dass die Grössen k, m, λ so beschaffen sind, dass die Coefficienten der verschiedenen Glieder des entwickelten Products dieselben sind wie zuvor. Damit dieses der Fall sei, müssen diese Grössen den folgenden Beziehungen genügen:

$$kT + \frac{1}{k} R = -(S + \lambda V)$$

$$\frac{1}{m} \lambda R = U$$

$$k \frac{\lambda}{m} T = \lambda T$$

$$mU = \lambda R$$

$$\frac{m}{k} U = U.$$

Dieselben werden sämmtlich befriedigt durch:

$$m = k = \lambda \frac{R}{U},$$

wenn man λ durch die Gleichung bestimmt:

$$\lambda^2 (RT + UV) + \lambda US + U^2 = 0.$$

Die beiden Werthe von λ, welche diese Gleichung liefert, seien λ_1 und λ_2; dieselben werden verschieden sein, ausser wenn

$$S^2 = 4(RT + UV)$$

ist. Die beiden Hülfsgleichungen können ersetzt werden durch die beiden Gleichungen, deren jede in lineare Factoren zerlegbar ist, sobald man die Werthe von k, m, λ in ihnen substituirt. Diese beiden Gleichungen können nach einer kleinen Vereinfachung geschrieben werden:

$$(Udy + \lambda_1 Tdx + \lambda_1 Udp)(Udx + \lambda_1 Rdy + \lambda_1 Udq) = 0$$
$$(Udy + \lambda_2 Tdx + \lambda_2 Udp)(Udx + \lambda_2 Rdy + \lambda_2 Udq) = 0.$$

Um die Functionen u und v, aus denen ein Zwischenintegral hergestellt werden kann, zu finden, müssen wir paarweise einen Factor der ersten Gleichung mit einem Factor der zweiten verbinden. Indessen sind von den vier möglichen Combinationen zwei auszuschliessen, nämlich die, welche man durch Verbindung der beiden ersten Factoren dieser Gleichungen erhalten würde, da diese zu einem Resultate

$$Udy = 0$$

führen würde, welches augenscheinlich keine Lösung liefern könnte, und die, welche man durch Verbindung der beiden zweiten Factoren dieser Gleichungen erhielte, da diese zu einem Resultat

$$U dx = 0$$

führen würde, welches ebenfalls augenscheinlich keine Lösung liefern würde. Daher können die Gleichungen durch die beiden Paare von Gleichungen ersetzt werden:

$$\begin{cases} U dy + \lambda_1 T dx + \lambda_1 U dp = 0 \\ U dx + \lambda_2 R dy + \lambda_2 U dq = 0 \end{cases}$$

und:

$$\begin{cases} U dx + \lambda_1 R dy + \lambda_1 U dq = 0 \\ U dy + \lambda_2 T dx + \lambda_2 U dp = 0. \end{cases}$$

Aus jedem Paare erhalten wir zwei Integrale von der Form $u = a$ und $v = b$, und finden somit auch aus jedem Paare ein Zwischenintegral. Diese beiden Integrale, welche wie vorher durch

$$u_1 = f(v_1), \; u_2 = \varphi(v_2)$$

dargestellt sein mögen, sind Zwischenintegrale der ursprünglichen Differentialgleichung, und sie sind verschieden, ausser wenn

$$S^2 = 4(RT + UV)$$

ist, in welchem Falle nur ein einziges Zwischenintegral gefunden werden kann.

§. 235.

Wir können nun weiter fortfahren in der Integration, sei es der linearen Gleichung oder der allgemeineren Form. Betrachtet man eins von den Zwischenintegralen in den betreffenden allgemeinen Fällen (oder in den Ausnahmefällen, in denen die Relation zwischen den in der Gleichung als Coefficienten auftretenden Functionen besteht, das eine) als das einzige erhaltene Zwischenintegral, so erhalten wir eine Differentialgleichung erster Ordnung; das vollständige Integral derselben (und die anderen damit verbundenen Integrale) kann nach den Methoden von Capitel IX gefunden werden und dieses Integral wird das schliessliche Integral der ursprünglichen Gleichung sein.

§. 236.

In den allgemeinen Fällen können wir einen (jetzt zu beweisenden) wichtigen Satz zur Anwendung bringen, durch welchen die

weitere Mühe, dieses schliessliche Integral zu erhalten, beträchtlich abgekürzt wird. Dieser **Satz** kann folgendermaassen ausgesprochen werden:

Wenn wir zwei Zwischenintegale von der Form

$$u_1 = f(v_1),\ u_2 = f(v_2)$$

gefunden haben und wir betrachten dieselben als simultane Gleichungen zur Bestimmung von p und q als Functionen von x, y, z, so werden die durch diese Gleichungen gelieferten Werthe von p und q so beschaffen sein, dass der Ausdruck

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

sich integriren lässt.

Nimmt man diesen Satz als bewiesen an, so hat man also nur die beiden Zwischenintegrale als simultane Gleichungen in p und q aufzulösen, sodann die hieraus abgeleiteten Werthe von p und q in

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

einzusetzen und zu integriren. Das Resultat wird das schliessliche Integral sein.

§. 237.

Wir wollen nun jetzt den oben ausgesprochenen Satz beweisen. Man bezeichne diese Integrale bezüglich mit $F = 0$ und $\Phi = 0$, so dass $F = u_1 - f(v_1)$ und $\Phi = u_2 - \varphi(v_2)$ ist, und es sei zunächst $F = 0$ eine Lösung der Gleichung:

$$Rr + Ss + Tt + U(rt - s^2) = V.$$

Wir haben nur die eine Gleichung $F = 0$ und diese ist nicht ausreichend, um uns in den Stand zu setzen, r, s und t als Functionen von x, y, z, p, q auszudrücken; wir können nur zwei von ihnen durch die dritte und durch Grössen ausdrücken, welche explicit unabhängig von ihnen sind. Werden diese Werthe in die Differentialgleichung substituirt, so wird die letztere eine Reihe von Gliedern enthalten, welche mit diesem zweiten Differentialquotienten der abhängigen Veränderlichen behaftet sind, und eine andere Reihe, welche denselben nicht enthält, und die Gleichung muss ohne Rücksicht auf diesen Differentialquotienten identisch erfüllt sein. Da nun $F = 0$ ist, so haben wir:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial p} r + \frac{\partial F}{\partial q} s = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q + \frac{\partial F}{\partial p} s + \frac{\partial F}{\partial q} t = 0.$$

Setzen wir der Kürze halber:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} = F_x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} = F_y,$$

so geben dieselben:

$$\frac{\partial F}{\partial p} r = - \frac{\partial F}{\partial q} s - F_x$$

$$\frac{\partial F}{\partial q} t = - \frac{\partial F}{\partial p} s - F_y.$$

Werden diese Werthe von r und t in die Differentialgleichung substituirt, so geht dieselbe über in:

$$R F_x \frac{\partial F}{\partial q} + T F_y \frac{\partial F}{\partial p} + V \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial q} - U F_x F_y$$

$$+ \left\{ R \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2 - S \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial q} + T \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2 - U F_y \frac{\partial F}{\partial q} - U F_x \frac{\partial F}{\partial p} \right\} s = 0.$$

Diese Gleichung muss identisch befriedigt sein ohne Rücksicht auf den Werth von s, und daher muss der Coefficient von s sowie das von s unabhängige Glied verschwinden. Wäre dies nicht der Fall, so würde diese Gleichung s und somit auch r und t als Functionen von x, y, z, p, q bestimmen — ein Resultat, welches, wie bekannt, nicht aus der einen Gleichung $F = 0$ abgeleitet werden kann.

Wir haben daher:

$$R F_x \frac{\partial F}{\partial q} + T F_y \frac{\partial F}{\partial p} + V \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial q} - U F_x F_y = 0$$

$$R \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2 - S \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial q} + T \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2 - U F_y \frac{\partial F}{\partial q} - U F_x \frac{\partial F}{\partial p} = 0.$$

Dieselben Gleichungen werden bestehen, wenn wir F durch Φ ersetzen; wir können daher F und Φ als die Lösungen der Gleichungen betrachten:

$$R\Theta_x \frac{\partial \Theta}{\partial q} + T\Theta_y \frac{\partial \Theta}{\partial p} + V \frac{\partial \Theta}{\partial p}\frac{\partial \Theta}{\partial q} - U\Theta_x \Theta_y = 0$$

$$R\left(\frac{\partial \Theta}{\partial q}\right)^2 - S\frac{\partial \Theta}{\partial p}\frac{\partial \Theta}{\partial q} + T\left(\frac{\partial \Theta}{\partial p}\right)^2 - U\Theta_y \frac{\partial \Theta}{\partial q} - U\Theta_x \frac{\partial \Theta}{\partial p} = 0.$$

§. 238.

Wir müssen nun zwei Fälle betrachten.

1) Die lineare Gleichung, falls $U = 0$ ist.

Sind alsdann ξ_1 und ξ_2 die Wurzeln der Gleichung:

$$R\xi^2 - S\xi + T = 0,$$

so geht die zweite Gleichung über in:

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial q} - \xi_1 \frac{\partial \Theta}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial q} - \xi_2 \frac{\partial \Theta}{\partial p}\right) = 0,$$

und wir können daher setzen:

$$\frac{\partial F}{\partial q} - \xi_1 \frac{\partial F}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q} - \xi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0,$$

indem wir so ξ_1 mit F und ξ_2 mit Φ verbinden. Die erste Gleichung wird, wenn wir sie durch $\frac{\partial \Theta}{\partial p}$ dividiren:

$$R\xi\Theta_x + T\Theta_y + V\xi \frac{\partial \Theta}{\partial p} = 0,$$

und daher:

$$R\xi_1 F_x + TF_y + V\xi_1 \frac{\partial F}{\partial p} = 0.$$

Da aber $T = R\xi_1 \xi_2$ ist, so kann die letzte Gleichung geschrieben werden:

$$F_x + \xi_2 F_y + \frac{V}{R}\frac{\partial F}{\partial p} = 0.$$

Analog ist:

$$\Phi_x + \xi_1 \Phi_y + \frac{V}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0.$$

Aus den letzten beiden erhalten wir:

$$F_x \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \Phi_x \frac{\partial F}{\partial p} = \xi_1 \Phi_y \frac{\partial F}{\partial p} - \xi_2 F_y \frac{\partial \Phi}{\partial p} = \Phi_y \frac{\partial F}{\partial q} - F_y \frac{\partial \Phi}{\partial q},$$

und daher:

$$F_x \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \Phi_x \frac{\partial F}{\partial p} + F_y \frac{\partial \Phi}{\partial q} - \Phi_y \frac{\partial F}{\partial q} = 0.$$

Dies ist aber die Bedingung (§. 202), welche von den Functionen F und Φ befriedigt werden muss, wenn für die aus $F = 0 = \Phi$ als simultanen Gleichungen abgeleiteten Werthe von p und q der Ausdruck

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

integrirbar sein soll. Damit ist der Satz für den Fall $U = 0$ bewiesen.

2) Die allgemeine Form, in welcher U nicht gleich Null ist.

Wir verfahren genau so wie in §. 234. Die erste Gleichung für Θ multiplicire man mit einer Grösse λ, welche durch die Gleichung

$$\lambda^2 (RT + UV) + \lambda US + U^2 = 0$$

bestimmt wird, und addire sie dann zur zweiten; die resultirende Gleichung zerlege man in Factoren für jeden der beiden Werthe von λ und combinire die linearen Factoren zu je zweien; von diesen Paaren sind nur zwei beizubehalten. Dieselben sind, wenn λ_1 und λ_2 die beiden Wurzeln sind:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 T \frac{\partial F}{\partial p} &= \lambda_1 U F_x + U \frac{\partial F}{\partial q} \\ \lambda_2 R \frac{\partial F}{\partial q} &= \lambda_2 U F_y + U \frac{\partial F}{\partial p} \end{aligned}\right\}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \lambda_2 T \frac{\partial \Phi}{\partial p} &= \lambda_2 U \Phi_x + U \frac{\partial \Phi}{\partial q} \\ \lambda_1 R \frac{\partial \Phi}{\partial q} &= \lambda_1 U \Phi_y + U \frac{\partial \Phi}{\partial p} \end{aligned}\right\}.$$

Aus der ersten und dritten von diesen Gleichungen erhalten wir:

$$F_x \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \Phi_x \frac{\partial F}{\partial p} = \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial \Phi}{\partial q} - \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial \Phi}{\partial p}$$

und aus der zweiten und vierten:

$$F_y \frac{\partial \Phi}{\partial q} - \Phi_y \frac{\partial F}{\partial q} = - \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial \Phi}{\partial q} + \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial \Phi}{\partial p},$$

mithin:

$$F_x \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \Phi_x \frac{\partial F}{\partial p} + F_y \frac{\partial \Phi}{\partial q} - \Phi_y \frac{\partial F}{\partial q} = 0.$$

Dies beweist, dass, wenn für die allgemeine Form der Gleichung $F = 0 = \Phi$ als simultane Gleichungen betrachtet werden, die daraus sich ergebenden Werthe von p und q so beschaffen sind, dass für sie

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

integrirbar ist.

Damit ist der Satz allgemein bewiesen. Werden diese Werthe von p und q substituirt, so ist das Integral der resultirenden Gleichung das schliessliche Integral der vorgelegten Differentialgleichung; dasselbe wird in seinem Ausdruck entweder implicit oder explicit die beiden willkürlichen Functionen enthalten, welche in den beiden Zwischenintegralen auftreten.

§. 239.

Es wird daher die Auflösungsmethode, wie sie sich aus der vorhergehenden Untersuchung ergeben hat, durch die folgenden Regeln näher angegeben:

I. Regel. Wenn die Gleichung

$$Rr + Ss + Tt = V$$

nach dieser Regel integrirbar ist, so transformiren wir sie vermittelst der Gleichungen

$$dp = r\,dx + s\,dy$$
$$dq = s\,dx + t\,dy$$

in:

$$R\,dp\,dy + T\,dq\,dx - V\,dx\,dy = s\,(R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2)$$

und zerlegen die Gleichung

$$R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0$$

in die beiden:

$$dy - \xi_1\,dx = 0$$
$$dy - \xi_2\,dx = 0.$$

Aus der ersten von diesen linearen Gleichungen und aus der Gleichung

$$R\,dp\,dy + T\,dq\,dx - V\,dx\,dy = 0$$

in Verbindung noch, wenn es nöthig ist, mit $dz = p\,dx + q\,dy$, erhalten wir zwei Integrale $u_1 = a_1$, $v_1 = b_1$. Alsdann ist

$$u_1 = f_1(v_1),$$

worin f_1 eine willkürliche Function bedeutet, ein Zwischenintegral.

Aus der zweiten linearen Gleichung, in Verbindung mit denselben Gleichungen, finden wir ein anderes Paar von Integralen $u_2 = a_2$, $v_2 = b_2$, und es ist

$$u_2 = f_2(v_2),$$

wo f_2 eine willkürliche Function bezeichnet, ein anderes Zwischenintegral.

Um nun das schliessliche Integral zu erhalten, können wir jedes dieser Zwischenintegrale, welches Differentialgleichungen erster Ordnung sind, integriren und müssen diese Integration wirklich durchführen, falls die beiden Werthe ξ_1 und ξ_2 einander gleich sind. Wenn aber die Werthe von ξ_1 und ξ_2 nicht einander gleich sind, so lösen wir die beiden Zwischenintegrale als Gleichungen für p und q auf und substituiren die Werthe dieser Grössen in

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Diese Gleichung giebt, integrirt, das vollständige Integral.

II. Regel. Wenn die Gleichung

$$Rr + Ss + Tt + U(rt - s^2) = V$$

auf diese Weise integrirbar ist, so suchen wir zwei Integrale $u_1 = a_1$ und $v_1 = b_1$ aus den Gleichungen:

$$\begin{cases} U\,dy + \lambda_1 T\,dx + \lambda_1 U\,dp = 0 \\ U\,dx + \lambda_2 R\,dy + \lambda_2 U\,dq = 0, \end{cases}$$

und zwei Integrale $u_2 = a_2$ und $v_2 = b_2$ aus den Gleichungen:

$$\begin{cases} U\,dx + \lambda_1 R\,dy + \lambda_1 U\,dq = 0 \\ U\,dy + \lambda_2 T\,dx + \lambda_2 U\,dp = 0, \end{cases}$$

worin λ_1 und λ_2 die Wurzeln der Gleichung sind:

$$\lambda^2(RT + UV) + \lambda US + U^2 = 0.$$

Alsdann sind $u_1 = f_1(v_1)$ und $u_2 = f_2(v_2)$, worin f_1 und f_2 willkürliche Functionen sind, zwei Zwischenintegrale. Von hier aus verfahren wir dann genau so wie in Regel I.

§. 240.

Es kann jedoch der Fall eintreten, dass es nicht möglich ist, aus den beiden Zwischenintegralen Werthe von p und q zu finden, welche sich zur Substitution in

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

eignen; alsdann können wir, um das schliessliche Integral zu er-

halten, eins der Zwischenintegrale integriren, zu welchem Zwecke wir die Charpit'sche Methode, wie sie in §. 201 angegeben worden ist, benutzen. Ohne aber die Rechnung, welche bei dieser Methode erforderlich ist, um die zwischen p und q und den Veränderlichen anzunehmende zweite Relation zu bestimmen, wirklich durchzuführen, genügt es, wenn wir als eine solche zweite Relation irgend ein particuläres Integral des allgemeinen Systems nehmen, welches von dem durch directe Integration erhaltenen verschieden ist. So können wir z. B. nehmen:

$$u_1 = f(v_1) \quad \text{und} \quad u_2 = a,$$

wo a eine willkürliche Constante ist. Da eine willkürliche Constante ein specieller Fall einer willkürlichen Function ist, so werden die aus diesen Gleichungen abgeleiteten Werthe von p und q so beschaffen sein, dass sich für sie

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

integriren lässt, und zwar wird das Integral eine willkürliche Function f und zwei willkürliche Constanten enthalten, nämlich die Constante a und die Integrationsconstante. Dieses Resultat bildet das vollständige Integral des Zwischenintegrals; das allgemeine Integral kann nach der Vorschrift von Lagrange (§. 180) erhalten werden, wenn man eine der willkürlichen Constanten in eine willkürliche Function der anderen verwandelt und diese übrigbleibende Constante eliminirt aus der so transformirten Gleichung und aus derjenigen, welche aus ihr durch Differentiation nach dieser Constanten entsteht.

§. 241.

Diese Methode führt jedoch nicht mehr zum Ziele in dem Falle, wo die Wurzeln der quadratischen Gleichung in λ einander gleich sind; es giebt dann nur ein System von Integralen, welches durch $u_1 = a$ und $v_1 = b$ dargestellt wird, und daher giebt es auch nur ein Zwischenintegral, welches gegeben wird durch

$$u_1 = f(v_1),$$

und dieses ist zu integriren. Gerade so wie vorher können wir die Anwendung der allgemeinen Methode zur Integration einer Gleichung erster Ordnung umgehen, indem wir das allgemeine und ein particuläres erstes Integral

$$u_1 = f(v_1), \quad v_1 = b$$

mit einander verbinden. Die hieraus sich ergebenden Werthe von

p und q werden offenbar den Bedingungen des §. 202 genügen und daher, wenn sie in die Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

eingesetzt werden, ein anderes Integral von der Form

$$w_1 = c$$

liefern.

Kommen p und q in w_1 vor, so kann man sie mit Hülfe der früheren Gleichungen $v_1 = b$ und $u_1 = f(b)$ eliminiren, so dass

$$w_1 = c$$

ein vollständiges Integral der Gleichung ist, da es zwei willkürliche Constanten b und c enthält. Um das allgemeine Integral zu finden, müssen wir c zu einer willkürlichen Function von b machen und b aus der so entstehenden Gleichung und derjenigen, welche sich aus ihr durch Differentiation nach b ergiebt, eliminiren.

Wir gelangen daher sowohl in dem Falle, wo die Wurzeln der quadratischen Gleichung ungleich sind, als auch in dem, wo sie gleich sind, zu einem allgemeinen Integral, in dessen Ausdruck zwei willkürliche Functionen vorkommen.

Es mag bemerkt werden, dass die vorhergehende Schlussreihe in gleicher Weise Anwendung findet, wenn man an Stelle des particulären Integrals

$$u_2 = a$$

irgend ein anderes particuläres Integral, z. B.

$$ku_2 + lv_2 = a$$

(wo k und l disponible Constanten sind) nimmt. Dieses particuläre Integral kann man in der That so annehmen, dass die nachfolgende Integration so leicht wie möglich wird.

Beispiele hierzu wird man weiter unten finden.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$r = a^2 t.$$

Substituirt man für r und t die Ausdrücke in s, so erhält man:

$$dp\,dy - a^2 dx\,dq = s(dy^2 - a^2 dx^2),$$

so dass die Hülfsgleichungen sind:

$$dy^2 - a^2 dx^2 = 0$$

$$dp\,dy - a^2 dx\,dq = 0.$$

Die erste lässt sich zerlegen in die beiden:

$$dy - a\,dx = 0 \quad \text{und} \quad dy + a\,dx = 0,$$

deren Integrale respective sind:

$$y - ax = A \quad \text{und} \quad y + ax = B.$$

Nimmt man das erste von ihnen und verbindet man dasselbe mit der zweiten von den Hülfsgleichungen, so findet man, dass die letztere übergeht in:

$$dp - a\,dq = 0,$$

und diese giebt, integrirt:

$$p - aq = A'.$$

Demnach ist ein Zwischenintegral:

$$p - aq = \varphi_1(y - ax).$$

Nimmt man die zweite Gleichung $y + ax = B$ und verfährt in derselben Weise, so findet man

$$dp + a\,dq = 0,$$

also:

$$p + aq = B',$$

und daher ist ein zweites Zwischenintegral:

$$p + aq = \varphi_2(y + ax).$$

Unserer Regel zufolge behandeln wir nun diese als simultane Gleichungen zur Bestimmung von p und q und erhalten:

$$\begin{aligned} dz &= \frac{1}{2}\,dx\,\{\varphi_2(y + ax) + \varphi_1(y - ax)\} \\ &+ \frac{1}{2a}\,dy\,\{\varphi_2(y + ax) - \varphi_1(y - ax)\} \\ &= \frac{(dy + a\,dx)\,\varphi_2(y + ax)}{2a} - \frac{(dy - a\,dx)\,\varphi_1(y - ax)}{2a} \end{aligned}$$

was sich integriren lässt. Setzt man:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2a}\int \varphi_2(t)\,dt$$

$$\psi(t) = -\frac{1}{2a}\int \varphi_1(t)\,dt,$$

so ist das Integral:

$$z = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax).$$

Die willkürliche Constante der Integration kann man sich in eine der Functionen φ und ψ aufgenommen denken. Da φ_1 und φ_2 willkürlich sind, so sind φ und ψ ebenfalls willkürlich.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$(b + cq)^2 r - 2(b + cq)(a + cp)s + (a + cp)^2 t = 0.$$

Transformirt man dies mit Hülfe der gewöhnlichen Beziehungen, so findet man, dass die Hülfsgleichungen lauten:

$$(b + cq)^2 dy^2 + 2(b + cq)(a + cp)\,dx\,dy + (a + cp)^2 dx^2 = 0$$
$$(b + cq)^2 dp\,dy + (a + cp)^2 dq\,dx = 0.$$

Die erste von diesen giebt nur die eine Gleichung:

$$(b + cq)\,dy + (a + cp)\,dx = 0,$$

so dass wir nur ein einziges Zwischenintegral der Gleichung, von der wir annehmen, dass sie sich nach dieser Methode integriren lasse, erhalten können. Wird diese Gleichung mit

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

verbunden, so giebt sie:

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0,$$

so dass ein Integral der Hülfsgleichungen ist:

$$ax + by + cz = A.$$

Eliminirt man das Verhältniss $dy:dx$ aus der zweiten Hülfsgleichung und der veränderten Form der ersten, so erhält man:

$$(b + cq)\,dp = (a + cp)\,dq,$$

deren Integral ist:

$$a + cp = B(b + cq),$$

wo B eine willkürliche Constante ist. Hiernach wird das Zwischenintegral:

$$a + cp = (b + cq)\,\varphi(ax + by + cz).$$

Dieses muss nun integrirt werden, und zwar kann man das Lagrange'sche Verfahren für lineare Gleichungen anwenden. Bezeichnet man $\varphi(ax + by + cz)$ mit φ, so erhält man als die Hülfsgleichungen:

$$\frac{dx}{c} = \frac{dy}{-c\varphi} = \frac{dz}{b\varphi - a}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0,$$

also:

$$ax + by + cz = C,$$

und $\varphi = \varphi(ax + by + cz) = \varphi(C)$ ist eine Constante.

Für ein zweites Integral ist also:

$$dy + dx\,\varphi(C) = 0$$
$$y + x\,\varphi(C) = C'.$$

Das schliessliche Integral der Differentialgleichung ist daher:

$$y + x\varphi(ax + by + cz) = \psi(ax + by + cz),$$

worin φ und ψ willkürliche Functionen sind.

Es lässt sich auch darstellen in der Form:

$$z = x\vartheta(ax + by + cz) + y\chi(ax + by + cz),$$

worin ϑ und χ willkürliche Functionen sind.

3. Aufgabe. Man integrire die Gleichungen:

(1) $r + ka^2t = 2as$ [1) wenn k von 1 verschieden ist, 2) wenn $k = 1$ ist].
(2) $x^2r + 2xys + y^2t = 0.$
(3) $q^2r - 2pqs + p^2t = 0.$
(4) $x^2r - y^2t = 0.$
(5) $r - a^2t + 2ab(p + aq) = 0.$

4. Aufgabe. Man integrire die Gleichung:

$$ar + bs + ct + e(rt - s^2) = h,$$

in welcher a, b, c, e, h Constanten sind.

Die Gleichung in λ ist:

$$\lambda^2(ac + eh) + \lambda eb + e^2 = 0,$$

oder, wenn wir $\lambda m + e = 0$ setzen, so ist die Gleichung, welche m bestimmt:

$$m^2 - bm + ac + eh = 0,$$

deren Wurzeln m_1 und m_2 sein mögen. Das erste System von Integralen ist:

$$c\,dx + e\,dp - m_1\,dy = 0$$
$$a\,dy + e\,dq - m_2\,dx = 0,$$

so dass ein Zwischenintegral lautet:

$$cx + ep - m_1y = F(ay + eq - m_2x).$$

Das zweite System von Integralen ist:

$$a\,dy + e\,dq - m_1\,dx = 0$$
$$c\,dx + e\,dp - m_2\,dy = 0,$$

und daher würde ein zweites Zwischenintegral sein:

$$cx + ep - m_2y = \Phi(ay + eq - m_1x).$$

Wenn es möglich wäre, diese Zwischengleichungen aufzulösen,

so dass man p und q ausgedrückt erhielte durch x und y, so würde sich das schliessliche Integral ohne Weiteres ableiten lassen; da dies jedoch nicht der Fall ist, so verbinden wir irgend ein particuläres Integral des zweiten Systems mit dem allgemeinen Integral des ersten. Wir können z. B. setzen:

$$cx + ep - m_2 y = \alpha,$$

und sodann ist:

$$F(ay + eq - m_2 x) = (m_2 - m_1)y + \alpha,$$

so dass wir, wenn Ψ die Umkehrung der Function F und daher eine willkürliche Function ist, erhalten:

$$ay + eq = m_2 x + \Psi\{(m_2 - m_1)y + \alpha\}.$$

Daher wird:

$$edz = -cxdx - aydy + (m_2 y + \alpha)dx$$
$$+ [m_2 x + \Psi\{(m_2 - m_1)y + \alpha\}]dy,$$

und hiervon ist das Integral:

$$ez + \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}ay^2 = m_2 xy + \alpha x + \Theta\{(m_2 - m_1)y + \alpha\} + \beta,$$

wobei Θ eine willkürliche Function (da sie gegeben wird durch

$$(m_2 - m_1)\Theta(z) = \int \Psi(z)dz$$

und Ψ willkürlich ist) und β eine willkürliche Constante ist.

Dies ist das vollständige Integral; um das allgemeine Integral zu erhalten, haben wir α aus den Gleichungen

$$\begin{cases} ez + \frac{1}{2}(cx^2 + ay^2) = m_2 xy + \alpha x + \Theta\{(m_2 - m_1)y + \alpha\} + \chi(\alpha) \\ 0 = x + \frac{1}{m_2 - m_1}\Psi\{(m_2 - m_1)y + \alpha\} + \chi'(\alpha), \end{cases}$$

in denen χ eine willkürliche Function bezeichnet, zu eliminiren.

5. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $s^2 - rt = a^2.$

(2) $qr + (p + x)s + yt = -q + y(s^2 - rt).$

(3) $2pqyr + (p^2 y + qx)s + xpt = p^2 q(rt - s^2) + xy.$

6. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$z(1 + q^2)r - 2pqzs + z(1 + p^2)t - z^2(s^2 - rt) + 1 + p^2 + q^2 = 0.$$

Die Gleichung, welche m bestimmt, ist:

$$m^2 + 2pqzm + p^2q^2z^2 = 0,$$

so dass die beiden Werthe von m einander gleich und zwar gleich $-pqz$ sind und das System von Integralen sich auf eins reducirt, welches bestimmt wird durch:

$$z(1+p^2)\,dx + z^2\,dp + pqz\,dy = 0$$
$$z(1+q^2)\,dy + z^2\,dq + pqz\,dx = 0.$$

Mit Hülfe von

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

giebt die erste nach Division durch z:

$$dx + p\,dz + z\,dp = 0,$$

wovon das Integral ist:

$$x + pz = a.$$

Ebenso führt die zweite zu

$$dy + q\,dz + z\,dq = 0,$$

und hiervon ist das Integral:

$$y + qz = b.$$

Daher ist das Zwischenintegral:

$$F(x+pz,\ y+qz) = 0,$$

wo F eine willkürliche Function bezeichnet.

Geht man weiter, wie in §. 241 angegeben, so hat man:

$$x + pz = a$$
$$y + qz = b,$$

und daher:

$$z\,dz = pz\,dx + qz\,dy$$
$$= (a-x)\,dx + (b-y)\,dy,$$

und hiervon ist das Integral:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = c^2.$$

Ein allgemeines Integral findet man, wie an der erwähnten Stelle auseinandergesetzt wurde, durch Elimination von c aus den Gleichungen:

$$\{x-\varphi(c)\}^2 + \{y-\psi(c)\}^2 + z^2 = c^2$$

und

$$\{x-\varphi(c)\}\,\varphi'(c) + \{y-\psi(c)\}\,\psi'(c) + c = 0,$$

wo φ und ψ willkürliche Functionen sind.

7. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $xqr + ypt + xy(s^2 - rt) = pq.$

(2) $q^2 r + 4pqs + p^2 t + p^2 q^2 (rt - s^2) = 3.$

(3) $(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = (s^2 - rt)(1+p^2+q^2)^{-\frac{1}{2}} - (1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}.$

8. Aufgabe. Man beweise die Umkehrung des vorigen allgemeinen Resultats, nämlich: Ist

$$\varphi(x, y, z, a, b, c) = 0$$

die Gleichung einer Fläche, wobei a, b, c durch zwei Bedingungen von der Form

$$\chi(a, b, c) = 0 = \psi(a, b, c)$$

mit einander verbunden sind, so zeige man, dass die Gleichung ihrer Enveloppe einer partiellen Differentialgleichung von der Form

$$Rr + Ss + Tt + U(rt - s^2) = V$$

genügt, deren Coefficienten die Relation befriedigen:

$$S^2 = 4(RT + UV).$$

Dualitätsprincip.

§. 242.

Dieses Princip, welches, wie (§. 197) gezeigt wurde, dazu dient, um aus der Lösung einer Gleichung erster Ordnung die einer anderen abzuleiten, welche mit der ersten durch Relationen von vollkommen reciprokem Charakter verbunden ist, lässt sich auch auf Gleichungen zweiter Ordnung anwenden. Der analytische Zusammenhang bestand darin, dass man neue Veränderliche einführte, welche sich aus den Gleichungen bestimmen:

$$X = p, \quad Y = q, \quad Z = px + qy - z,$$

aus denen sich die reciproken Gleichungen ergeben:

$$x = P, \quad y = Q, \quad z = PX + QY - Z.$$

Aus diesen erhalten wir:

$$dx = dP = R\,dX + S\,dY$$
$$dy = dQ = S\,dX + T\,dY,$$

und daher:

$$dX = \frac{T\,dx - S\,dy}{RT - S^2}$$

$$dY = \frac{-S\,dx + R\,dy}{RT - S^2}.$$

Nun ist aber:

$$r\,dx + s\,dy = dp = d\,X$$
$$s\,dx + t\,dy = dq = d\,Y,$$

somit erhalten wir durch Gleichsetzung der Coefficienten:

$$r = \frac{T}{R\,T - S^2}, \quad s = \frac{-S}{R\,T - S^2}, \quad t = \frac{R}{R\,T - S^2},$$

folglich:

$$r\,t - s^2 = \frac{1}{R\,T - S^2}.$$

Wendet man diese Substitutionen auf irgend eine Gleichung von der Form

$$\lambda r + \mu s + \nu t + \sigma (rt - s^2) = 0$$

an, in welcher λ, μ, ν, σ Functionen von x, y, z, p, q sind, und bezeichnet man ihre Werthe, nachdem die Transformationen ausgeführt sind, mit $\lambda', \mu', \nu', \sigma'$, so giebt das Resultat der Substitutionen:

$$\lambda' T - \mu' S + \nu' R + \sigma' = 0.$$

Wenn dann die Lösung der früheren Gleichung bekannt ist, so kann man auch die der letzteren finden und umgekehrt.

So sind insbesondere die Lösungen der beiden Gleichungen

$$r\,\varphi(p,q) + s\,\psi(p,q) + t\,\chi(p,q) = 0$$

und

$$r\,\chi(x,y) - s\,\psi(x,y) + t\,\varphi(x,y) = 0$$

aus einander ableitbar.

1. Aufgabe. Aus der Lösung von

$$x^2 r + 2xys + y^2 t = 0$$

leite man die von

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0$$

her.

2. Aufgabe. Man integrire die Gleichungen:

(1) $px + qy - sxy = z.$

(2) $q^2(z - px - qy) = (pt - qs)\,xz.$

(3) $p^2 r + 2pqs + q^2 t = (xp + yq)\,(rt - s^2).$

(4) $(1 + pq)\,(r - t) = (p^2 - q^2)\,s + p^2 t - q^2 r.$

Die Laplace'sche Methode zur Transformation der linearen Gleichung.

§. 243.

Die lineare Differentialgleichung

$$Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = U,$$

in welcher R, S, T, P, Q, Z, U Functionen von x und y allein sind, lässt sich auf einfachere Formen zurückführen. Das Verfahren besteht in der Aenderung der Veränderlichen.

Werden die unabhängigen Veränderlichen x und y in ξ und η, die noch unbestimmt sind, geändert, und bezeichnet man $\frac{\partial z}{\partial \xi}$, $\frac{\partial z}{\partial \eta}$, ... mit p', q', ..., so geht die Gleichung über in:

$$\begin{aligned}
&r'\left\{R\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + S\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + T\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right\}\\
&+ t'\left\{R\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + S\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + T\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right\}\\
&+ s'\left\{2R\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + S\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + 2T\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right\}\\
&+ p'\left\{R\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + S\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + T\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + P\frac{\partial \xi}{\partial x} + Q\frac{\partial \xi}{\partial y}\right\}\\
&+ q'\left\{R\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + S\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + T\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + P\frac{\partial \eta}{\partial x} + Q\frac{\partial \eta}{\partial y}\right\} + Zz = U.
\end{aligned}$$

Sind m und n die Wurzeln der quadratischen Gleichung in k:

$$Rk^2 + Sk + T = 0,$$

und setzen wir zunächst voraus, dass diese Wurzeln ungleich seien, so wählen wir ξ und η so, dass

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = m\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = n\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

ist, welche Gleichungen ξ und η bestimmen. Die Glieder, welche r' und t' enthalten, verschwinden dann; dagegen verschwindet der Coefficient von s', welcher gleich

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \left(4\, T - \frac{S^2}{R}\right)$$

ist, nicht, da die Wurzeln der quadratischen Gleichung von einander verschieden sind.

Wird die Gleichung durch diesen Coefficienten dividirt, so nimmt sie die Form an:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + L \frac{\partial z}{\partial \xi} + M \frac{\partial z}{\partial \eta} + N z = V.$$

§. 244.

In zwei Fällen kann man das Integral dieser Gleichung ohne weitere Transformation erhalten. Wir können dieselbe in der Form schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial z}{\partial \eta} + L z\right) + M\left(\frac{\partial z}{\partial \eta} + L z\right) + z\left(N - L M - \frac{\partial L}{\partial \xi}\right) = V,$$

so dass, falls die Bedingung

$$N - L M - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0$$

erfüllt ist, die Gleichung übergeht in:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + M u = V,$$

wo u für $\frac{\partial z}{\partial \eta} + L z$ gesetzt ist. Hieraus kann man einen allgemeinen Werth von u und sodann aus diesem einen allgemeinen Werth von z finden.

Man kann die Gleichung auch in der Form schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + M z\right) + L\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + M z\right) + z\left(N - L M - \frac{\partial M}{\partial \eta}\right) = V,$$

so dass, wenn die Bedingung

$$N - L M - \frac{\partial M}{\partial \eta} = 0$$

erfüllt ist, die Gleichung übergeht in:

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} + L v = V,$$

wo v für $\frac{\partial z}{\partial \xi} + M z$ gesetzt ist. Hieraus kann man einen allgemeinen Werth von v und aus diesem einen allgemeinen Werth von z finden.

§. 245.

Wenn jedoch keine von diesen Bedingungen zwischen den Coefficienten in der transformirten Gleichung erfüllt ist, so kann sie stets durch eine Aenderung der abhängigen Veränderlichen transformirt werden. Setzen wir zum Beispiel:

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} + Lz = \zeta,$$

so erhalten wir:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + M\zeta + z\left(N - LM - \frac{\partial L}{\partial \xi}\right) = V.$$

Bezeichnen wir

$$LM + \frac{\partial L}{\partial \xi} - N \text{ mit } K,$$

so können wir schreiben:

$$z = \frac{1}{K}\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{M}{K}\zeta - \frac{V}{K}$$

und somit:

$$\zeta = \frac{L}{K}\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{LM}{K}\zeta - \frac{LV}{K} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{K}\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{M}{K}\zeta - \frac{V}{K}\right),$$

und dieses ist äquivalent mit:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \, \partial \eta} + L'\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + M'\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + N'\zeta = V',$$

worin

$$L' = L - \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial \eta}$$

$$M' = M$$

$$N' = LM - K + K\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{M}{K}\right)$$

gesetzt ist, so dass wir wieder dieselbe Form, nur mit veränderten Coefficienten, erhalten haben. Die Gleichung in ihrer neuen Form lässt sich integriren, wenn die entsprechenden Bedingungen zwischen den neuen Coefficienten bestehen. Aus den Werthen von L', M', N' erhalten wir:

$$L'M' - N' = K - \frac{\partial M}{\partial \eta}$$

$$= K - \frac{\partial M'}{\partial \eta},$$

so dass, da K (nach Voraussetzung) nicht gleich Null ist, die Relation

$$L'M' + \frac{\partial M'}{\partial \eta} - N' = 0$$

nicht erfüllt ist. Die andere Bedingung, nach welcher die Gleichung

$$L'M' + \frac{\partial L'}{\partial \xi} - N' = 0$$

erfüllt sein müsste, lautet, in den ursprünglichen Coefficienten ausgedrückt:

$$K + \frac{\partial L}{\partial \xi} - \frac{\partial M}{\partial \eta} - \frac{1}{K}\frac{\partial^2 K}{\partial \eta \, \partial \xi} + \frac{1}{K^2}\frac{\partial K}{\partial \eta}\frac{\partial K}{\partial \xi} = 0.$$

Ist auch diese nicht erfüllt, ebensowenig wie die entsprechende aus der Betrachtung des anderen Ausdrucks

$$LM + \frac{\partial M}{\partial \eta} - N$$

abgeleitete Relation, so kann man das Transformationsverfahren, so oft man will, wiederholen und man wird, wenn an irgend einer Stelle des Processes die gesuchte Bedingung erfüllt sein sollte, die Lösung finden können.

1. Aufgabe. Man beweise, dass für jede Substitution von der Form

$$z = \varphi u,$$

worin u die neue abhängige Veränderliche sein soll und φ eine Function von ξ und η ist, die Grössen

$$LM - N + \frac{\partial M}{\partial \eta} \text{ und } LM - N + \frac{\partial L}{\partial \xi}$$

absolute Invarianten sind, und dass somit eine derartige Transformation für den Zweck einer Lösung von keinem Nutzen ist.

2. Aufgabe. Man beweise, dass, wenn

$$K_r = N_r - L_r M_r - \frac{\partial L_r}{\partial \xi} \text{ und } I_r = N_r - L_r M_r - \frac{\partial M_r}{\partial \eta}$$

(die Functionen der Coefficienten nach r Transformationen) gesetzt wird, alsdann

$$K_{r+1} = \frac{\partial^2 (\log K_r)}{\partial \xi \, \partial \eta} + 2K_r - I_r$$

$$I_{r+1} = K_r$$

ist.

Hiernach löse man die Gleichung:

$$s + xyp = 2yz.$$

(Imschenetsky.)

§. 246.

Wir betrachten jetzt den Fall, wo die Wurzeln der quadratischen Gleichung einander gleich sind, also

$$S^2 - 4RT = 0$$

ist.

Die beiden Gleichungen, welche zur Bestimmung von ξ und η dienten, fallen jetzt zusammen, so dass man aus ihnen nur eine von diesen Grössen finden kann. Ist ξ diese Grösse, welche gegeben wird durch

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = m \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

und nehmen wir an, dass ξ und y die neuen unabhängigen Veränderlichen sind, so ist $\eta = y$ zu setzen. Dann ist in der transformirten Gleichung der Coefficient von r' gleich Null, der von t' ist T und der von s' ist:

$$S \frac{\partial \xi}{\partial x} + 2T \frac{\partial \xi}{\partial y}.$$

Da aber m eine doppelte Wurzel von

$$Rk^2 + Sk + T = 0$$

ist, so haben wir:

$$m = -\frac{S}{2R} = -\frac{2T}{S},$$

so dass also der Coefficient von s' wird:

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}\left(2T - \frac{S^2}{2R}\right),$$

welches gleich Null ist. Daher wird die transformirte Gleichung nach Division durch T:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + L \frac{\partial z}{\partial \xi} + M \frac{\partial z}{\partial y} + Nz = V.$$

Der Fall, welcher sich für die Behandlung mittelst dieser Methode eignet, ist der, in welchem $L = 0$ ist; die Gleichung kann dann als eine gewöhnliche Differentialgleichung in y betrachtet werden, während x als Constante gilt. Die willkürlichen Integrationsconstanten sind sodann durch willkürliche Functionen von x zu ersetzen.

Die Poisson'sche Methode.

§. 247.

Poisson hat gezeigt, wie man ein particuläres Integral einer jeden Differentialgleichung von der Form

$$P = (rt - s^2)^n Q$$

finden könne, wobei P eine Function von p, q, r, s, t ist, die homogen ist in Bezug auf die letzten drei Grössen, und Q irgend eine Function der Veränderlichen x, y, z und der Differentialquotienten von z darstellt, welche endlich bleibt für $rt - s^2 = 0$.

Er setzt:

$$q = \varphi(p)$$

und daher:

$$s = r\varphi'(p) \quad \text{und} \quad t = s\varphi'(p) = r[\varphi'(p)]^2.$$

Für diese Werthe wird

$$rt - s^2 = 0,$$

und daher die Differentialgleichung zurückgeführt auf:

$$P = 0.$$

Da nun P homogen ist in Bezug auf r, s, t, so wird, wenn die vorigen Werthe substituirt werden, überall ein gemeinschaftlicher Factor auftreten, der eine gewisse Potenz von r ist. Wird dieser abgeworfen, so wird die übrigbleibende Gleichung nur $p, \varphi(p)$ und $\varphi'(p)$ enthalten, und diese wird, integrirt, den Werth von $\varphi(p)$ bestimmen und so zu einem Integral der ursprünglichen Gleichung führen. Da dieses Integral von der Form ist:

$$q = \varphi(p),$$

so kann es stets weiter integrirt werden.

Es mag bemerkt werden, dass die Poisson'sche Methode äquivalent ist mit der Auffindung der abwickelbaren Flächen, welche in der gegebenen Differentialgleichung enthalten sind, da

$$q = \varphi(p)$$

die Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen ist.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$r^2 - t^2 = rt - s^2.$$

Verfährt man wie oben, so findet man:

$$1 - \{\varphi'(p)\}^4 = 0,$$

so dass, wenn man nur den reellen Werth beibehält,

$$\varphi'(p) = \pm 1,$$

also

$$q = \varphi(p) = a \pm p$$

ist, wobei a eine willkürliche Constante bedeutet. Das vollständige Integral dieser als partielle Differentialgleichung erster Ordnung betrachteten Gleichung ist:

$$z = ay + \lambda(x \pm y) + \nu,$$

wo λ und ν willkürliche Constanten sind. Das allgemeine Integral ist:

$$z = ay + \varphi(x \pm y),$$

wo φ eine willkürliche Function bezeichnet.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $t + 2ps + (p^2 - a^2)r = 0.$

(2) $(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0.$

Lineare partielle Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten.

§. 248.

Wir gehen nun zur Betrachtung von Gleichungen über, welche linear sind nicht nur in Bezug auf die Differentialquotienten höchster Ordnung, sondern auch in Bezug auf die abhängige Veränderliche und alle ihre Differentialquotienten, und in welchen die verschiedenen Glieder nur mit Constanten multiplicirt sind. Eine derartige Gleichung ist

$$\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) z = V,$$

worin Φ eine rationale ganze algebraische Function ist, deren sämmtliche Coefficienten constant sind. V kann jede beliebige Function der unabhängigen Veränderlichen sein.

Wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen besteht das vollständige Integral aus der Summe zweier Theile, nämlich:

Erstens: Aus dem allgemeinsten Integral von

$$\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) z = 0,$$

Zweitens: Aus irgend einem particulären Integral von

$$\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) z = V.$$

Diese werden gesondert gefunden. Der Kürze wegen mögen $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ respective mit D und D' bezeichnet werden.

§. 249.

Der einfachste Fall der allgemeinen Gleichung ist der, in welchem nur Differentialquotienten $n$ter Ordnung vorkommen, so dass sie geschrieben werden kann:

$$(D^n + A_1 D^{n-1} D' + A_2 D^{n-2} D'^2 + \cdots + A_n D'^n) z = V.$$

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die n Wurzeln von

$$\xi^n + A_1 \xi^{n-1} + A_2 \xi^{n-2} + \cdots + A_{n-1} \xi + A_n = 0,$$

so kann die Gleichung transformirt werden in:

$$(D - \alpha_1 D')(D - \alpha_2 D') \ldots (D - \alpha_n D') z = V.$$

Um die Complementärfunction zu erhalten, setzen wir $V = 0$; alsdann wird eine Lösung von

$$(D - \alpha_r D') z = 0$$

ein Glied in der Complementärfunction sein, und da es n solcher Factoren giebt, so wird es auch n solcher Glieder geben.

Nun ist die Lösung von

$$(D - \lambda) z = 0,$$

wo λ unabhängig von x ist, gegeben durch

$$z = e^{\lambda x} C,$$

wobei C gleichfalls unabhängig von x ist. Die Grösse C kann daher in der Lösung von

$$(D - \alpha D') z = 0$$

zu einer willkürlichen Function von y gemacht werden, und wir erhalten dann:

$$z = e^{\alpha x \frac{d}{dy}} \varphi(y)$$
$$= \varphi(y + \alpha x).$$

Eine solche Lösung giebt es für jeden Werth von α, und die Summe dieser verschiedenen Lösungen ist ebenfalls eine Lösung, so dass die Complementärfunction ist:

$$z = \varphi_1(y + \alpha_1 x) + \varphi_2(y + \alpha_2 x) + \cdots + \varphi_n(y + \alpha_n x),$$

wobei $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ lauter willkürliche Functionen sind.

In dem Falle jedoch, wo zwei Wurzeln α einander gleich sind, hört diese Lösung auf, allgemein zu sein, da die Summe zweier willkürlichen Functionen desselben Arguments nur eine willkürliche Function dieses Arguments ist; die entsprechenden Glieder werden dann gefunden, wie folgt.

Die Lösung von

$$(D - \lambda)^2 z = 0$$

ist:

$$z = e^{\lambda x}(A + Bx),$$

worin A und B unabhängig von x sind. Daher lautet das Integral von

$$(D - \alpha D')^2 z = 0$$

folgendermaassen:

$$z = e^{\alpha x \frac{d}{dy}} \{\varphi(y) + x\psi(y)\}$$
$$= \varphi(y + \alpha x) + x\psi(y + \alpha x),$$

worin φ und ψ willkürlich sind. Die Summe dieser beiden Glieder tritt an die Stelle der Summe der beiden Glieder, welche zu einem verschmolzen waren, und der allgemeine Charakter der Lösung ist wieder hergestellt. Ebenso werden, wenn beliebig viele der Wurzeln α einander gleich sind, die entsprechenden Glieder der Complementärfunction, welche in eins verschmelzen, ersetzt durch eine Reihe von Gliedern, welche in derselben Weise, wie oben, erhalten werden.

§. 250.

Um das particuläre Integral zu erhalten, stellen wir dasselbe symbolisch dar durch:

$$z = \frac{1}{(D - \alpha_1 D')(D - \alpha_2 D') \ldots (D - \alpha_n D')} V$$
$$= \frac{1}{D'^n} \frac{1}{\left(\frac{D}{D'} - \alpha_1\right)\left(\frac{D}{D'} - \alpha_2\right) \cdots \left(\frac{D}{D'} - \alpha_n\right)} V.$$

Um dieses zu berechnen, zerlegen wir den zweiten symbolischen Bruch in die Summe von n symbolischen Partialbrüchen, in deren Nennern nur je eine der Grössen $\frac{D}{D'} - \alpha$ vorkommt. So erhalten wir, wenn

$$\frac{1}{(\xi - \alpha_1)(\xi - \alpha_2) \ldots (\xi - \alpha_n)} = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{N_r}{\xi - \alpha_r}$$

ist:

$$z = \frac{1}{D'^n} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{N_r}{\frac{D}{D'} - \alpha_r} V$$

$$= \frac{1}{D'^{n-1}} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{N_r}{D - \alpha_r D'} V,$$

wobei N_r eine Constante ist und nur allein von den Constanten α abhängt. Ist dann

$$V = \psi(x, y),$$

so erhalten wir wegen

$$(D - \alpha D')^{-1} = e^{\alpha x \frac{\partial}{\partial y}} \int d x \, e^{-\alpha x \frac{\partial}{\partial y}}$$

$$\frac{1}{D - \alpha_1 D'} V = e^{\alpha x \frac{\partial}{\partial y}} \int^x d\xi \, e^{-\alpha \xi \frac{\partial}{\partial y}} \psi(\xi, y)$$

$$= e^{\alpha x \frac{\partial}{\partial y}} \int^x d\xi \, \psi(\xi, y - \alpha\xi)$$

$$= \int^x d\xi \, \psi(\xi, y + \alpha x - \alpha\xi).$$

Daher ist das particuläre Integral der Gleichung:

$$z = \iiint \cdots d y^{n-1} \int^x d\xi \sum_{r=1}^{r=n} [N_r \psi\{\xi, y + \alpha_r (x - \xi)\}].$$

Dies ist der Werth in dem allgemeinsten Falle, der möglich ist; in besonderen Fällen ist die wirkliche Berechnung desselben viel leichter. Ist z. B. V eine Function von x allein, so können wir uns $\{\Phi(D, D')\}^{-1}$ in eine Reihe nach steigenden Potenzen von D' entwickelt denken und dann jedes Glied mit Ausnahme desjenigen, welches D' nicht enthält, weglassen (so lange es nur auf das particuläre Integral abgesehen ist). Entsprechende Vereinfachungen bieten sich bei anderen Beispielen dar.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x. \qquad \text{(Siehe 1. Aufgabe, §. 241.)}$$

Für die Complementärfunction haben wir:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - a \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y}\right) u = 0,$$

und daher:

$$u = e^{ax\frac{\partial}{\partial y}} \varphi(y) + e^{-ax\frac{\partial}{\partial y}} \psi(y)$$
$$= \varphi(y + ax) + \psi(y - ax),$$

worin φ und ψ willkürliche Functionen sind.

Für das particuläre Integral haben wir:

$$u = \frac{1}{D^2 - a^2 D'^2} x$$
$$= \frac{1}{D^2}\left(1 + a^2 \frac{D'^2}{D^2} + \cdots\right) x$$
$$= \frac{1}{D^2} x$$
$$= \frac{x^3}{3!}.$$

Daher ist das vollständige Integral:

$$u = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax) + \frac{x^3}{3!}.$$

2. Aufgabe. Man suche eine Lösung der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

von der Art, dass $y = F(x)$ und $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{d f(x)}{d x}$ ist für $t = 0$, wo $F(x)$ und $f(x)$ gegebene Functionen von x sind.

3. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

(1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \cos mx \cos ny.$

(2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x + y.$

(3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2a \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(y + ax).$

(4) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x^3 y^3.$

(5) $(D - aD')^2 z = \varphi(x) + \psi(y) + \chi(x + by)$

(6) $(D - D')^2 z = x + \varphi(x + y).$

4. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}-3\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

Für die Complementärfunction haben wir:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\omega\frac{\partial}{\partial y}+\omega^2\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\omega^2\frac{\partial}{\partial y}+\omega\frac{\partial}{\partial z}\right)u=0,$$

wo ω eine cubische Wurzel der Einheit ist. Die Lösung von

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda\frac{\partial}{\partial y}+\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)u=0$$

ist:

$$u=e^{-x\left(\lambda\frac{\partial}{\partial y}+\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)}\varphi(y,z)$$
$$=\varphi(y-\lambda x,\ z-\mu x).$$

Daher ist die Complementärfunction:

$$\varphi_1(y-x,z-x)+\varphi_2(y-\omega x,\ z-\omega^2 x)+\varphi_3(y-\omega^2 x,\ z-\omega x),$$

wo φ_1, φ_2, φ_3 willkürliche Functionen sind.

Der Theil des particulären Integrals, welcher x^3 entspricht, ist:

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^3+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^3+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^3-3\frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}}x^3=\frac{1}{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^3}x^3=\frac{x^6}{4.5.6},$$

und ebenso für die anderen Glieder; der vollständige Werth ist:

$$\frac{x^6+y^6+z^6}{4.5.6}+\frac{x^2y^2z^2}{8}.$$

Das vollständige Integral ist die Summe aus der Complementärfunction und dem particulären Integral.

5. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$(1)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=xyz.$$

$$(2)\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}-2\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}-3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial z}-3\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial z^2}$$
$$-2\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial z}+6\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial z^2}+7\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=0.$$

§. 251.

Gehen wir nun zu der allgemeinen Gleichung über, so haben wir zu suchen die Lösung von

$$\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) z = 0,$$

worin Φ von der Form ist:

$$A_0 \frac{\partial^n}{\partial x^n} + A_1 \frac{\partial^n}{\partial x^{n-1} \partial y} + A_2 \frac{\partial^n}{\partial x^{n-2} \partial y^2} + \cdots$$
$$+ B_0 \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} + B_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-2} \partial y} + \cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ K_0 \frac{\partial}{\partial x} + K_1 \frac{\partial}{\partial y} + L.$$

Wir nehmen versuchsweise als Lösung an:

$$z = A e^{hx + ky},$$

wo h und k noch zu bestimmende Constanten sind. Für diesen Werth ist:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = h z \text{ und } \frac{\partial z}{\partial y} = k z,$$

und demnach erhalten wir:

$$\Phi(h, k) z = 0,$$

und diese wird erfüllt sein, wenn h und k so bestimmt werden, dass die Gleichung befriedigt ist:

$$\Phi(h, k) = 0.$$

Durch diese Gleichung wird offenbar die eine der Constanten von der anderen abhängig gemacht; lösen wir sie nach k auf, so werden wir n Resultate von der Form

$$k = \vartheta(h)$$

erhalten. Nehmen wir eines derselben, z. B. $k = \vartheta_1(h)$, so erhalten wir die Lösung in der Form:

$$z = A e^{hx + y \vartheta_1(h)},$$

für alle Werthe von A und h. Da nun die Summe einer beliebigen Anzahl von Lösungen selbst wieder eine Lösung ist, so ist eine andere Lösung dargestellt durch:

$$z = \Sigma A\, e^{hx + y \vartheta_1(h)},$$

wo sich das Summenzeichen auf alle Werthe von h erstreckt; und A, welches eine willkürliche Constante ist, kann als eine willkürliche Function von h angesehen werden, die sich von einem Gliede der Reihe zum anderen ändern kann.

Ebenso wird ein anderer Werth von k, z. B. $\vartheta_2(h)$, zu einer anderen Lösung führen, welche dargestellt werden kann durch:

$$z = \Sigma B e^{h'x + y \vartheta_2(h')},$$

und da jeder Werth von k zu einer entsprechenden Reihe führt, so wird die allgemeine Lösung dargestellt werden können als die Summe von n Reihen in der Form:

$$z = \Sigma \{A e^{hx + y \vartheta_1(h)}\} + \Sigma \{B e^{h'x + y \vartheta_1(h')}\} + \cdots,$$

wobei sich die Summation in jeder Reihe auf die Glieder erstreckt, die sich aus allen möglichen Werthen von h ergeben. Der Umstand, dass der zu jedem einzelnen Gliede gehörige Coefficient als eine willkürliche Function der in diesem Gliede auftretenden Constanten betrachtet werden kann, zeigt, dass jede Reihe in ihrem Ausdruck eine allgemeine willkürliche Function enthält, und daher werden wir in der Complementärfunction n willkürliche Functionen erwarten dürfen.

§. 252.

Dieses allgemeine Resultat in Form einer Summe von n Reihen, deren jede willkürliche Elemente enthält, scheint von geringem Werthe zu sein. Zuweilen wird jedoch durch die Form der Differentialgleichung eine Vereinfachung herbeigeführt, wie sie im nächsten Paragraphen angedeutet wird. Zuweilen auch wird durch die Bedingungen, welche der abhängigen Veränderlichen ausser der, dass die Differentialgleichung befriedigt werden soll, noch auferlegt werden, die Anzahl der Glieder der Reihen beschränkt auf solche, welche specielle Werthe der als Parameter dienenden Constanten enthalten.

So kann zum Beispiel immer, wenn eine Lösung der Gleichung, durch welche k bestimmt wird, von der Form ist:

$$k = \alpha h + \beta,$$

wo α und β bestimmte Constanten sind, die entsprechende Reihe in endlicher Form dargestellt werden. Denn sie ist:

$$e^{\beta y} \Sigma A e^{h(x + \alpha y)},$$

d. h. sie ist (abgesehen von dem vor dem Summenzeichen stehenden Factor) die Summe einer beliebigen Anzahl von willkürlichen

Potenzen von $e^{x+\alpha y}$, deren jede mit einer willkürlichen Constanten multiplicirt ist. Eine solche Summe ist eine willkürliche Function von $e^{x+\alpha y}$ oder, was dasselbe ist, eine willkürliche Function von $x + \alpha y$, und es kann daher die Reihe ersetzt werden durch:

$$e^{\beta y} \varphi (x + \alpha y),$$

worin φ willkürlich ist. Entsprechend den Bedingungen, welche in jedem besonderen Falle die Zahl der in der Reihe vorkommenden Glieder beschränken, wird es analoge Bedingungen geben, durch welche die Form der willkürlichen Function bestimmt wird.

Aufgabe. Man beweise, dass, wenn die Wurzel

$$k = \alpha h + \beta$$

$(r + 1)$ mal vorkommt, der entsprechende Theil der Complementärfunction ist:

$$e^{\beta y}[\varphi_0 (x + \alpha y) + y \varphi_1 (x + \alpha y) + \cdots + y^r \varphi_r (x + \alpha y)],$$

worin $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ sämmtlich willkürlich sind.

§. 253.

Um das particuläre Integral zu finden, wollen wir es darstellen durch:

$$z = \frac{1}{\Phi(D, D')} V.$$

Die Bestimmung des Werthes dieses Ausdrucks wird abhängen von der Form von V. Wäre z. B.

$$V = e^{ax + by},$$

so würden wir erhalten:

$$\frac{1}{\Phi (a, b)} e^{ax + by}$$

als gesuchten Werth von z. Wenn V eine rationale ganze algebraische Function von x und y wäre, so würde man den Ausdruck berechnen können, indem man das umgekehrte Operationssymbol in eine Reihe von steigenden Potenzen von D und D' (wenn dies geht) oder von einer derselben entwickelt. Die Methoden, welche auf die speciellen in §. 46 für den Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen betrachteten Formen angewandt sind, werden auch die entsprechenden Methoden anzeigen, welche hier für die verschiedenen Formen von V in Anwendung zu bringen sind.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 3\frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y} = xy + e^{x+2y}.$$

Zunächst müssen wir, um die Complementärfunction zu finden, die Gleichung lösen:

$$(D - D')(D + D' - 3)z = 0.$$

Substituirt man:

$$z = Ae^{hx+ky},$$

so ist:

$$(h - k)(h + k - 3) = 0,$$

so dass

$$k = h \quad \text{und} \quad k = 3 - h$$

die Relationen zwischen h und k sind. Hieraus ergiebt sich:

$$\begin{aligned} z &= \Sigma A e^{h(x+y)} + e^{3y}\Sigma B e^{h'(x-y)} \\ &= \varphi(x+y) + e^{3y}\psi(x-y), \end{aligned}$$

worin φ und ψ willkürliche Functionen sind.

Der Theil des particulären Integrals, welcher zu e^{x+2y} gehört, ist:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{(D-D')(D+D'-3)} e^{x+2y} \\ &= e^x \frac{1}{(1-D')(D'-2)} e^{2y} \\ &= e^{x+2y} \frac{1}{(1-D'-2)(D'+2-2)} 1 \\ &= -e^{x+2y} \frac{1}{D'(D'+1)} 1 \\ &= -ye^{x+2y}. \end{aligned}$$

Das Resultat zeigt an, dass ein Glied von der Form e^{x+2y} in der Complementärfunction vorkommen wird; dass dies der Fall ist, erhellt aus der Identität:

$$e^{x+2y} = e^{3y}e^{x-y}.$$

Der xy entsprechende Theil des particulären Integrals ist:

$$z = \frac{1}{(D - D')\,(D + D' - 3)}\, x y$$
$$= -\frac{1}{3}\,\frac{1}{D - D'}\left\{1 + \frac{D + D'}{3} + \left(\frac{D + D'}{3}\right)^2\right\} x y$$
$$= -\frac{1}{3D}\left(1 + \frac{D'}{D}\right)\left(x y + \frac{1}{3}\,x + \frac{1}{3}\,y + \frac{2}{9}\right)$$
$$= -\frac{1}{3D}\left(x y + \frac{1}{3}\,x + \frac{1}{3}\,y + \frac{2}{9} + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x\right)$$
$$= -\left(\frac{1}{6}\,x^2 y + \frac{1}{9}\,x^2 + \frac{1}{9}\,x y + \frac{2}{27}\,x + \frac{1}{18}\,x^3\right).$$

Die Entwickelungen sind in jedem Falle nur so weit ausgeführt, als nöthig ist, um nicht verschwindende Glieder zu erhalten. Es könnte vorkommen, dass durch ein verschiedenes Verfahren, z. B. durch Entwickelung nach Potenzen von $\frac{D}{D'}$, ein particuläres Integral von scheinbar verschiedener Form erhalten würde; man würde dann aber finden, dass die beiden in einander transformirt werden könnten mit Hülfe der Complementärfunction.

Das allgemeine Integral ist wie gewöhnlich die Summe der drei vorher angeführten Theile.

§. 254.

Jede Gleichung, in welcher der Coefficient eines Differentialquotienten jeder Ordnung ein constantes Vielfaches der Veränderlichen von demselben Grade ist, lässt sich auf eine Gleichung von der vorigen Form zurückführen.

Eine solche Gleichung wird von der Form sein:

$$\Sigma A_r\, x^r \frac{\partial^r z}{\partial x^r} + \Sigma B_{p\,q}\, x^p y^q \frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p\,\partial y^q} + \Sigma\, C_s\, y^s \frac{\partial^s z}{\partial y^s} = V.$$

Wir können entweder die unabhängigen Veränderlichen in u und v verwandeln, wo $x = e^u$ und $y = e^v$ ist, oder wir können $x\,\frac{\partial}{\partial x}$ durch ϑ und $y\,\frac{\partial}{\partial y}$ durch φ darstellen und erhalten dann:

$$x^r\,\frac{\partial^r z}{\partial x^r} = \vartheta\,(\vartheta - 1)\,(\vartheta - 2)\,\ldots\,(\vartheta - r + 1)\,z$$

$$x^p\,y^q \frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p\,\partial y^q} = \vartheta\,(\vartheta - 1)\ldots(\vartheta - p + 1)\,\varphi\,(\varphi - 1)\ldots(\varphi - q + 1)\,z.$$

In jedem Falle wird die Gleichung auf die bereits betrachtete Form zurückgeführt.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^m y^n.$$

Wir erhalten, wenn wir $u = \log x$ und $v = \log y$ setzen:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} - 1\right) z = e^{mu+nv}.$$

Das Integral hiervon ist:

$$z = e^u F_1(v-u) + f_1(v-u) + \frac{e^{mu+nv}}{(m+n)(m+n-1)}$$

$$= xF\left(\frac{y}{x}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x^m y^n}{(m+n)(m+n-1)},$$

wo F und f willkürlich sind.

2. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$(1) \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xy.$$

$$(2) \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = y \frac{\partial z}{\partial y} - x \frac{\partial z}{\partial x}.$$

3. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$(1) \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + nu = n\left(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}\right) + x^2 + y^2 + x^3.$$

$$(2) \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}n}.$$

$$(3) \quad \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u + n^2 u = 0.$$

4. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$(1-x^2)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(1-x^2)(1-xy) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1-xy)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + n^2 u$$

$$= 2x(1-x^2) \frac{\partial u}{\partial x} + (x + y - 2x^2 y) \frac{\partial u}{\partial y}.$$

5. Aufgabe. Man löse die Gleichungen:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2ab \frac{\partial z}{\partial x} + 2a^2 b \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$(2) \quad mn\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - (m^2 + n^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + mn\left(n \frac{\partial z}{\partial x} - m \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$= \cos(mx + ny) + \cos(kx + ly).$$

6. Aufgabe. Man löse die Gleichung:

$$f(\pi) z = H_n,$$

wo π das Operationssymbol

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + x_m \frac{\partial}{\partial x_m}$$

bezeichnet, f eine rationale ganze algebraische Function von π und H_n eine homogene Function der Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ von n Dimensionen ist.

Vermischte Methoden.

§. 255.

Es giebt verschiedene partielle Differentialgleichungen, welche bei physikalischen Untersuchungen häufig vorkommen: Lösungen von diesen hat man oft nur durch Methoden erhalten, die sich auf andere Gleichungen als die sind, welche dazu Veranlassung gegeben haben, nur selten anwenden lassen.

Die beiden hauptsächlichsten Methoden sind die Integration mittelst bestimmter Integrale und die Integration durch Reihen. Da aber jede Methode nur von specieller Anwendung ist, und da die vorkommenden Verschiedenheiten ihren Ursprung nur den Bedingungen verdanken, welche der Function, deren Werth gesucht wird, auferlegt sind, nicht aber irgend einer Verschiedenheit in den Differentialgleichungen, auf welche sie Anwendung finden, so ist es nicht möglich, hier eine erschöpfende Auseinandersetzung zu geben. Die Discussion soll vielmehr hier nur auf wenige Beispiele beschränkt werden; zur weiteren Belehrung muss man sich an die Lehrbücher über diejenigen Zweige der mathematischen Physik wenden, in denen diese Differentialgleichungen vorkommen.

§. 256.

Wir betrachten zunächst eine Gleichung, welche durch beide Methoden integrirt werden kann.

Eine solche Gleichung ist:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

welche bei Untersuchungen über Wärmeleitung auftritt. Es ist nicht ohne Interesse, die verschiedenen Methoden, welche zu ihrer Lösung führen, anzugeben.

Nach der Methode des §. 249 können wir schreiben:

$$u = e^{a^2 t \frac{d^2}{dx^2}} \varphi(x),$$

worin φ willkürlich ist. Entwickeln wir das Operationssymbol, so erhalten wir:

$$u = \varphi(x) + a^2 t \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{a^4 t^2}{2!} \frac{d^4 \varphi}{dx^4} + \frac{a^6 t^3}{3!} \frac{d^6 \varphi}{dx^6} + \cdots,$$

so dass die Lösung nur eine willkürliche Function enthält. Wir können aber auch so verfahren: die Lösung von

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \lambda^2 u$$

lautet:

$$u = e^{\lambda x} A + e^{-\lambda x} B,$$

worin A und B unabhängig von x sind. Wir können daher die Lösung von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

darstellen in der Form:

$$u = e^{\frac{x}{a}\left(\frac{d}{dt}\right)^{\frac{1}{2}}} \psi(t) + e^{-\frac{x}{a}\left(\frac{d}{dt}\right)^{\frac{1}{2}}} \chi(t),$$

wo ψ und χ willkürliche Functionen sind. Um das Resultat von symbolischen Operationszeichen zu befreien, welche, wenn sie blieben, eine Erläuterung erheischen würden, verwandeln wir die willkürlichen Functionen in f und F, wo

$$f(t) = \psi(t) + \chi(t)$$
$$F(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{\frac{1}{2}} \{\psi(t) - \chi(t)\};$$

alsdann sind, da ψ und χ willkürlich sind, auch f und F willkürlich, welche Erklärung man auch für $\left(\frac{d}{dt}\right)^{\frac{1}{2}}$ geben möge. Wenn die Operationssymbole in der ersten Form der Lösung, welche ψ und χ enthält, entwickelt werden und die Glieder von derselben Ordnung der Differentiation zusammengenommen werden, so wird die Lösung:

$$u = f(t) + \frac{x^2}{2!\,a^2}\frac{df}{dt} + \frac{x^4}{4!\,a^4}\frac{d^2f}{dt^2} + \cdots$$
$$+ \frac{x}{a}F(t) + \frac{x^3}{3!\,a^3}\frac{dF}{dt} + \frac{x^5}{5!\,a^5}\frac{d^2F}{dt^2} + \cdots,$$

und diese enthält zwei willkürliche Functionen.

§. 257.

Es könnte auf den ersten Anblick paradox erscheinen, dass man für die nämliche Differentialgleichung zwei vollkommen allgemeine Lösungen von anscheinend so verschiedenem Charakter erhalten kann. Die Schwierigkeit wird aber gehoben sein, wenn bemerkt wird, dass die Gleichung nur von der ersten Ordnung in Bezug auf t, dagegen von der zweiten Ordnung in Bezug auf x ist. Die frühere Lösung enthält nur **eine einzige willkürliche** Function von x, wie es eben in dem Falle einer Gleichung erster Ordnung zu erwarten ist; die zweite Lösung enthält **zwei willkürliche** Functionen von t, also gerade so viel willkürliche Functionen, als in dem Falle einer Gleichung zweiter Ordnung erwartet werden können.

Wenn wir annehmen, dass die willkürlichen Functionen sämmtlich nach ganzen positiven Potenzen ihres Argumentes entwickelt werden können, so sind wir im Stande, eine von diesen Lösungen in die andere zu transformiren. Denn ist

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_n}{n!}\left(\frac{x}{a}\right)^n,$$

worin der Coefficient A_n willkürlich ist, und setzt man diesen Werth in die erste Lösung ein, so wird das von x unabhängige Glied:

$$A_0 + A_2 t + \frac{A_4}{2!}t^2 + \frac{A_6}{3!}t^3 + \cdots,$$

welches eine Reihe mit willkürlichen Coefficienten ist und daher mit $f(t)$, worin f willkürlich, bezeichnet werden kann. Der Coefficient von $\left(\frac{x}{a}\right)^2 \frac{1}{2!}$ lautet:

$$A_2 + A_4 t + \frac{A_6}{2!}t^2 + \cdots,$$

d. h. $\frac{df}{dt}$, und so für die anderen geraden Potenzen von x. Daher

ist der Theil der Lösung, welcher von den geraden Potenzen von x abhängt:

$$f(t) + \frac{x^2}{2\,!\,a^2}\,\frac{df}{dt} + \frac{x^4}{4\,!\,a^4}\,\frac{d^2f}{dt^2} + \cdots$$

Sammelt man ebenso die Glieder, welche von den ungeraden Potenzen von x abhängen und setzt man:

$$F(t) = A_1 + A_3 t + \frac{A_5}{2}\,t^2 + \cdots$$

(welches eine andere willkürliche Function ist), so erhält man den zweiten Theil der zweiten Lösung. Es ergiebt sich daher, dass die beiden algebraischen Ausdrücke äquivalent sind, unabhängig von der Thatsache, dass sie beide Lösungen der Differentialgleichung sind.

Lösung durch bestimmte Integrale.

§. 258.

Wir wollen nun die Methode des §. 251 anwenden. Substituiren wir

$$u = e^{\alpha x + \beta t},$$

so ist die nothwendige Beziehung zwischen den Constanten α und β:

$$\beta = a^2 \alpha^2,$$

so dass

$$u = A\,e^{\alpha x + a^2\alpha^2 t}$$

für alle Werthe von A und α eine Lösung ist. Anstatt α setzen wir αi, so dass Lösungen dargestellt werden durch

$$e^{-a^2\alpha^2 t + \alpha x i} \quad \text{und} \quad e^{-a^2\alpha^2 t - \alpha x i},$$

und daher durch

$$A\,e^{-a^2\alpha^2 t + \alpha(x-\lambda) i} \quad \text{und} \quad B\,e^{-a^2\alpha^2 t - \alpha(x-\lambda) i},$$

wo λ eine beliebige Constante und A und B willkürliche Functionen von λ sind. Diese können ersetzt werden durch

$$A'\,e^{-a^2\alpha^2 t}\,\cos\alpha(x-\lambda) \quad \text{und} \quad B'\,e^{-a^2\alpha^2 t}\,\sin\alpha(x-\lambda),$$

wo A' und B' willkürliche Functionen von λ sind. Ferner ist die Summe irgend einer Anzahl von Lösungen ebenfalls eine Lösung. Wir betrachten diejenige, welche wir erhalten, wenn wir eine gewisse Anzahl von Gliedern von der Form der ersten für alle Werthe von λ und α summiren und annehmen, dass, während A' eine will-

kürliche Function von λ ist, doch die Form der willkürlichen Function dieselbe ist für die verschiedenen Werthe von λ. (Die entsprechenden Glieder, welche aus der zweiten entstehen würden, können als in dieser enthalten betrachtet werden, da wir, so lange es nur auf den veränderlichen Theil ankommt, nur λ in $\lambda - \frac{\pi}{2a}$ zu verwandeln brauchen, um die erste zu erhalten.)

Ist dann

$$A' = \psi(\lambda)\, d\lambda,$$

und nimmt man an, dass die Summation sich erstrecke auf alle Werthe von λ zwischen $-\infty$ und $+\infty$, so ist die entsprechende Lösung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\alpha^2 t} \cos\alpha(x-\lambda)\, \psi(\lambda)\, d\lambda.$$

Dies kann ferner mit einer beliebigen Function von α multiplicirt und die Summation für alle Werthe von α ausgeführt werden. So wie sie dasteht, ist die Function eine gerade Function von α, und es wird daher, wenn der Factor gleich $d\alpha$ genommen wird, genügen, 0 und ∞ als die Grenzen von α zu setzen. Wir können daher als Lösung annehmen:

$$u = \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\alpha^2 t} \cos\alpha(x-\lambda)\, \psi(\lambda)\, d\lambda.$$

Die Lösung in dieser Form ist besonders brauchbar in dem Falle, wo u einer Bedingung genügen, z. B.

$$u = f(x)$$

sein soll für $t = 0$. Alsdann werden wir haben:

$$f(x) = \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha(x-\lambda)\, \psi(\lambda)\, d\lambda.$$

Nach dem Fourier'schen Satze ist aber der Werth der rechten Seite gleich $\pi\psi(x)$, so dass ψ bestimmt ist, und somit wird:

$$u = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\alpha^2 t} \cos\alpha(x-\lambda) f(\lambda)\, d\lambda. \quad \text{(Riemann.)}$$

Aufgabe. Man suche eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

von der Beschaffenheit, dass für $t = 0$

$$u = f(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = F(x)$$

ist.

Das Resultat lautet:

$$u = \frac{1}{2}\{f(x+at) + f(x-at)\} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(\lambda)\, d\lambda. \qquad \text{(Riemann.)}$$

§. 259.

Wir können ferner auch die Gleichung lösen durch eine Methode, die ursprünglich von Laplace angegeben und von Poisson erweitert ist.

Nach einem bekannten Satze ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \pi^{1/2},$$

oder, wenn wir $u - l$ für u schreiben, wo l unabhängig von u ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2+2ul}\, du = \pi^{1/2} e^{l^2}.$$

Ist l irgend eine Differentialoperation, die ausgeführt werden soll, so zeigt diese Relation an, dass sich die symbolische Operation e^{l^2} darstellen lässt, wenn man e^{2ul} darzustellen vermag.

Diese Methode kann auf die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

angewendet werden; denn wir haben:

$$u = e^{\left(t^{1/2} a \frac{d}{dx}\right)^2} f(x),$$

worin f eine willkürliche, von t unabhängige Function ist. Die vorige Formel mit den entsprechenden Operationssymbolen können wir anwenden, wenn wir l durch $at^{1/2}\frac{d}{dx}$ ersetzen; wir erhalten so:

$$u = \pi^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2+2uat^{1/2}\frac{d}{dx}} f(x)\, du$$

$$= \pi^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} f(x + 2uat^{1/2})\, du.$$

Diesem Resultat kann man noch eine andere Form geben, wenn man λ für $x + 2uat^{1/2}$ setzt. Dann wird:

$$u = \frac{1}{2a(\pi t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2t}} f(\lambda)\, d\lambda.$$

Nun ist $f(\lambda)$ eine willkürliche Function. Nehmen wir an, dass ihr Werth jederzeit Null sei, ausser wenn $\lambda = r$, und setzen wir dann $f(\lambda)\, d\lambda = H$, so erhalten wir:

$$u = \frac{H}{2a(\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{(x-r)^2}{4a^2t}}.$$

1. Aufgabe. Man zeige, dass, wenn u den Bedingungen genügt:

$$(1) \quad u = f(x) \quad \text{für } t = 0$$

$$(2) \quad u = \varphi(t) \quad \text{„} \ x = 0,$$

alsdann der Werth von u ist:

$$\frac{1}{2a(\pi t)^{1/2}} \int_0^\infty f(\lambda) \left\{ e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{4a^2t}} \right\} d\lambda + \frac{x}{2a\pi^{1/2}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\lambda)}} \frac{\varphi(\lambda)\, d\lambda}{(t-\lambda)^{3/2}}.$$

2. Aufgabe. Man bestimme eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + b^2 \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \right) = 0$$

in der Form:

$$\varphi = \iint f(x + 2u(tb)^{1/2}, y + 2v(tb)^{1/2}) \sin(u^2 + v^2)\, du\, dv$$
$$+ \iint F(x + 2u(tb)^{1/2}, y + 2v(tb)^{1/2}) \cos(u^2 + v^2)\, du\, dv.$$

3. Aufgabe. Man bestätige, dass

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi t f(x + at \sin\vartheta \cos\varphi, y + at \sin\vartheta \sin\varphi, z + at\cos\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi t F(x + at \sin\vartheta \cos\varphi, y + at \sin\vartheta \sin\varphi, z + at \cos\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta$$

der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

genügt und so beschaffen ist, dass für $t = 0$

$$u = F(x, y, z) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y, z)$$

ist.

4. Aufgabe. Man bestimme den Werth des Integrals

$$\iint e^{\alpha x + \beta y + \gamma z}\, dS,$$

genommen über die Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt der Coordinatenanfangspunkt und deren Radius R ist, in der Form:

$$4\pi \frac{R}{p} \sinh (Rp),$$

wo

$$p^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

gesetzt ist.

Hiernach zeige man, dass der über die Oberfläche einer Kugel erstreckte Mittelwerth einer Function, welche der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

genügt und für alle Punkte innerhalb der Kugel durch eine convergente Reihe darstellbar ist, gleich dem Werthe der Function im Mittelpunkte der Kugel ist.

Weitere Belehrung über diesen Theil des Gegenstandes und im Besonderen über die Anwendungen auf physikalische Untersuchungen wird man finden in Riemann's „Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen“.

Lösung durch Reihen.

§. 260.

Wir wollen nunmehr einen Fall der Integration durch Reihen betrachten.

Die wichtigste Gleichung, auf welche diese Methode angewendet wird, ist die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

mit der man es bei physikalischen Untersuchungen fortwährend zu thun hat. Um dieselbe nach der in Rede stehenden Methode zu lösen, ist es zweckmässig, die unabhängigen Veränderlichen x, y, z in r, ϑ, φ umzuändern, welche gegeben sind durch die Relationen:

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r \cos\vartheta.$$

Dieselben stellen in Wirklichkeit die Gleichungen dar, durch welche die Cartesischen Coordinaten eines Punktes in Polarcoordinaten transformirt werden. Die neue Gleichung wird dann:

$$r \frac{\partial^2 (r u)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0,$$

und wenn man hierin noch eine Aenderung vornimmt, indem man μ für $\cos\vartheta$ schreibt, so ist die resultirende Form:

$$r\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial\mu}\right\} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0.$$

§. 261.

Wird zunächst eine Lösung verlangt, welche eine Function von r allein, d. i. von $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ ist, so dass dieselbe also eine specielle symmetrische Lösung sein wird, so reducirt sich die Gleichung auf:

$$\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} = 0,$$

also:

$$u = A + \frac{B}{r}.$$

Auf analoge Weise wird man eine Lösung, welche nur eine Function von ϑ oder eine Function von φ allein ist, finden können; dieselben sind jedoch nicht von solchem Nutzen, wie die eben erhaltene.

§. 262.

Sodann nehmen wir an, dass Lösungen, welche nicht Functionen von r allein sind, in eine nach ganzen Potenzen von r fortschreitende Reihe entwickelt werden können. Ein Glied in u sei:

$$r^n u_n,$$

worin u_n unabhängig von r ist, aber eine Function von ϑ und φ sein kann, deren Werth bestimmt werden soll. Wird dann der Werth von u substituirt, so ist das Glied auf der linken Seite der Differentialgleichung, welches diesem besonderen Gliede von u entspricht:

$$r^n\left\{n(n+1)u_n + \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial u_n}{\partial\mu}\right) + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 u_n}{\partial\varphi^2}\right\},$$

und die Summe aller solchen Glieder muss Null sein für sämmtliche Werthe der unabhängigen Veränderlichen. Das vorstehende ist das einzige Glied, welches die $n$te Potenz von r enthält; es ergiebt sich daher, dass, wenn die Gleichung befriedigt sein soll, sein Coefficient verschwinden muss. Demnach bestimmt sich u_n durch die Gleichung:

$$n(n+1)u_n + \frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial u_n}{\partial\mu}\right\} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 u_n}{\partial\varphi^2} = 0,$$

und somit ist $r^n u_n$ eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung. Die Coefficienten der Glieder, welche die Differentialquotienten von u_n enthalten, hängen nicht von n ab, und der Coefficient von u_n ändert sich nicht, wenn für n gesetzt wird $-(n+1)$. Daher ist $r^{-(n+1)}u_n$ eine andere Lösung der ursprünglichen Gleichung. Diese beiden soeben erhaltenen Lösungen können zu einer einzigen verbunden werden, so dass sie

$$\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right)u_n$$

als eine Lösung ergeben, wo A_n und B_n willkürliche Constanten sind, und somit ist der allgemeine Werth von u:

$$u = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right)u_n,$$

vorausgesetzt, dass u_n bestimmt wird durch die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial u_n}{\partial\mu}\right\} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 u_n}{\partial\varphi^2} + n(n+1)u_n = 0.$$

§. 263.

Nun würde die allgemeine Lösung dieser Gleichung u_n als Function von ϑ und φ ergeben; wir betrachten zunächst den Fall, in welchem u_n eine Function von ϑ allein ist. Dieselbe ist alsdann bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{d u_n}{d\mu}\right\} + n(n+1)u_n = 0,$$

deren von einander unabhängige particuläre Integrale $P_n(\mu)$ und $Q_n(\mu)$ sind (§§. 90, 91). Die entsprechenden Glieder in u sind:

$$\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\mu) + \left(A'_n r^n + \frac{B'_n}{r^{n+1}}\right)Q_n(\mu).$$

In den meisten physikalischen Untersuchungen ist das von $Q_n(\mu)$ abhängige Glied wegzulassen; alsdann lautet der allgemeine Werth von u, ausgedrückt als Function von r und ϑ, d. h. von $(x^2+y^2)^{1/2}$ und z:

$$u = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\mu)\right\},$$

wo die A und B willkürliche Constanten sind. Man wird bemerken, dass die vorher erhaltene Lösung, nämlich

$$A + \frac{B}{r}$$

der specielle Fall ist, welchen man erhält, wenn man alle diese willkürlichen Constanten ausser A_0 und B_0 gleich Null setzt und sich erinnert, dass $P_0(\mu)$ eine Constante ist.

§. 264.

Wir betrachten nunmehr den allgemeinen Fall, in welchem u_n eine Function von ϑ und φ ist; dieselbe lässt sich in eine nach trigonometrischen Functionen der Vielfachen von φ fortschreitende Reihe entwickeln, deren Coefficienten Functionen von μ sind. Irgend ein Glied der Reihe für u_n möge dargestellt werden durch

$$v_n^{(\sigma)} \cos \sigma \varphi,$$

worin v eine Function von μ allein ist, und dies wird eine Lösung der Gleichung für u_n sein, gerade so wie in dem Falle, wo ein jedes Glied in der nach Potenzen von r fortschreitenden Reihe von u eine Lösung der Gleichung war. Substituirt man dies und dividirt man durch $\cos \sigma \varphi$, so findet man, dass $v_n^{(\sigma)}$ bestimmt wird durch die Gleichung:

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{d\, v_n^{(\sigma)}}{d\mu}\right\} + n(n+1)\, v_n^{(\sigma)} = \frac{\sigma^2}{1-\mu^2}\, v_n^{(\sigma)}.$$

Dieselbe Gleichung würden wir auch erhalten haben, wenn wir

$$v_n^{(\sigma)} \sin \sigma \varphi$$

in die Gleichung für u_n substituirt hätten, und daher ist die Lösung der Gleichung für u_n:

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \{E_\sigma \sin \sigma\varphi + F_\sigma \cos \sigma\varphi\}\, v_n^{(\sigma)},$$

wobei der Werth $\sigma = 0$ nicht genommen ist, da er von φ unabhängige Glieder giebt, die bereits gefunden worden sind.

Nun ist nach der 12. Aufg., V. Cap., S. 207 die Lösung der Gleichung, welche $v_n^{(\sigma)}$ giebt:

$$v_n^{(\sigma)} = (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}\sigma} \frac{d^\sigma y_n}{d\mu^\sigma},$$

worin y_n die Lösung der Gleichung im Falle $\sigma = 0$ und daher entweder P_n oder Q_n ist. Hiernach wird das entsprechende Glied in u_n:

$$(E_\sigma \sin \sigma \varphi + F_\sigma \cos \sigma \varphi)\ (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}\sigma} \frac{d^\sigma P_n}{d\mu^\sigma}$$

$$+ (E'_\sigma \sin \sigma \varphi + F'_\sigma \cos \sigma \varphi)\ (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}\sigma} \frac{d^\sigma Q_n}{d\mu^\sigma}.$$

Das Glied, welches Q_n enthält, ist bei physikalischen Untersuchungen gewöhnlich wegzulassen; der geeignete Werth von u_n ist dann:

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}\sigma} (E_\sigma \sin \sigma \varphi + F_\sigma \cos \sigma \varphi) \frac{d^\sigma P_n}{d\mu^\sigma},$$

da es offenbar überflüssig ist, Werthe von σ zu nehmen, die grösser als n sind.

Die Summe jeder beliebigen Anzahl von Lösungen der ursprünglichen Gleichung ist wiederum eine Lösung, und demnach ist der allgemeinste Werth von u, durch eine Reihe dargestellt, der folgende:

$$u = A + \frac{B}{r}$$
$$+ \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right) P_n\right\}$$
$$+ \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}\sigma} \frac{d^\sigma P_n}{d\mu^\sigma} \left\{\left(A'_n r^n + \frac{B'_n}{r^{n+1}}\right) \sin \sigma \varphi \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(A''_n r^n + \frac{B''_n}{r^{n+1}}\right) \cos \sigma \varphi\right\}\right].$$

In dem vorstehenden allgemeinen Werthe von u sind weggelassen worden

1) die Glieder, welche aus dem von r und φ unabhängigen Theile von u entstehen würden und die, wie man leicht zeigen kann, sind:

$$C \log \frac{1 + \mu}{1 - \mu},$$

2) das von φ allein abhängige Glied, welches offenbar $M\varphi$ ist, und

3) die Glieder, welche man gewöhnlich bei physikalischen Untersuchungen als unbrauchbar weglässt.

Jede fernere Untersuchung über die Lösung der Gleichung steht entweder in Verbindung mit anderen äquivalenten Formen der Lösung oder mit den besonderen Lösungen, welche man erhält, wenn man die Constanten gegebenen Bedingungen gemäss bestimmt. In Bezug hierauf würde man die Quellenschriften über die verschiedenen Gegenstände der angewandten Mathematik, bei denen diese Gleichung auftritt, zu Hülfe nehmen müssen; im Besonderen würden die auf Seite 182 angeführten von grossem Werthe sich erweisen.

1. Aufgabe. Man löse die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

durch eine Reihe, nachdem man sie auf Polarcoordinaten transformirt hat.

2. Aufgabe. Man beweise, dass die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

eine Lösung besitzt von der Form:

$$u = e^{akti} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{r} P_n \{A e^{-ikr} f_n(ikr) + B e^{ikr} f_n(-ikr)\},$$

worin

$$f_n(z) = 1 + \frac{n(n+1)}{2 \,.\, z} + \frac{(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)}{2 \,.\, 4 \,.\, z^2} + \frac{(n-2)\ldots(n+3)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, z^3} + \cdots + \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots 2n}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots 2n \,.\, z^n}$$

ist, und suche eine allgemeinere Lösung, welche nicht von der sphärischen Coordinate φ unabhängig ist. (Stokes.)

3. Aufgabe. Man zeige, dass die allgemeine Lösung der Gleichung

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

oder, nach Transformation zu ebenen Polarcoordinaten, der zu ihr äquivalenten Gleichung

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

mit Hülfe von Bessel'schen Functionen dargestellt werden kann als die Summe zweier Glieder von der Form:

$$u = \cos akt \sum_{n=0}^{n=\infty} [\{A I_n(kr) + B Y_n(kr)\} \cos n\vartheta + \{A' I_n(kr) + B' Y_n(kr)\} \sin n\vartheta].$$

Ampère's Auflösungsmethode der Gleichung:
$Rr + 2Ss + Tt + U(rt - s^2) = V.$

§. 265.

Es giebt noch eine andere Methode, um von der Differentialgleichung zu dem Zwischenintegral zu gelangen in dem Falle der allgemeinen Gleichung:

$$Rr + 2Ss + Tt + U(rt - s^2) = V,$$

in welcher der Factor 2 aus Zweckmässigkeitsgründen hinzugesetzt ist.

Es werde eine neue bisher noch unbestimmte unabhängige Veränderliche α eingeführt, und es mögen x und α als die unabhängigen Veränderlichen betrachtet werden, so dass y eine Function von x und α ist. Dann erhalten wir:

$$\frac{dz}{dx} = p + q\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{d\alpha} = q\frac{dy}{d\alpha}$$

$$\frac{dp}{dx} = r + s\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dp}{d\alpha} = s\frac{dy}{d\alpha}$$

$$\frac{dq}{dx} = s + t\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dq}{d\alpha} = t\frac{dy}{d\alpha}.$$

Hierin sind $\frac{d}{dx}$ und $\frac{d}{d\alpha}$ angewendet, um partielle Differentiationen nach den neuen unabhängigen Veränderlichen x und α anzudeuten. Aus diesen Gleichungen erhalten wir:

$$r = \frac{dp}{dx} - s\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}t = \frac{dq}{dx} - s$$

und:

$$\frac{dy}{dx}(rt - s^2) = \frac{dp}{dx}\frac{dq}{dx} - s\left(\frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dx}\frac{dy}{dx}\right),$$

in denen allen s zu ersetzen ist durch

$$\frac{\frac{dp}{d\alpha}}{\frac{dy}{d\alpha}}.$$

Werden diese Werthe in die ursprüngliche Gleichung substituirt, so nimmt sie die Form an

$$\frac{dy}{d\alpha} P = Q \frac{dp}{d\alpha},$$

worin P und Q gegeben sind durch:

$$P = R \frac{dp}{dx} \frac{dy}{dx} + T \frac{dq}{dx} + U \frac{dp}{dx} \frac{dq}{dx} - V \frac{dy}{dx}$$

$$Q = R \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2S \frac{dy}{dx} + T + U \left(\frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dx} \frac{dy}{dx}\right).$$

Bisher ist α noch willkürlich; wir wollen es so wählen, dass P verschwindet; dann folgt aus der Differentialgleichung, dass auch Q verschwindet, dass also

$$P = 0 \quad \text{und} \quad Q = 0$$

ist.

§. 266.

Diese Gleichungen können ersetzt werden durch einfachere Verbindungen derselben, welche ihnen äquivalent sind. Aus der ersten erhalten wir:

$$\frac{dp}{dx} \left(R \frac{dy}{dx} + U \frac{dq}{dx}\right) = V \frac{dy}{dx} - T \frac{dq}{dx}.$$

Wird dieser Werth von $\frac{dp}{dx}$ in die zweite Gleichung substituirt, so geht die letztere nach einer kleinen Vereinfachung über in:

$$\left(R \frac{dy}{dx} + U \frac{dq}{dx}\right)^2 - 2S \left(R \frac{dy}{dx} + U \frac{dq}{dx}\right) + RT + UV = 0,$$

welche giebt:

$$(1) \qquad R \frac{dy}{dx} + U \frac{dq}{dx} = S \pm G^{1/2},$$

wobei

$$G = S^2 - RT - UV$$

gesetzt ist.

Der entsprechende Werth von $\frac{dp}{dx}$ wird gegeben durch

$$\frac{dp}{dx} (S \pm G^{1/2}) = V \frac{dy}{dx} - T \frac{dq}{dx},$$

oder, was dasselbe ist, durch

$$R\frac{dp}{dx}(S \pm G^{1/2}) = V\left(R\frac{dy}{dx} + U\frac{dq}{dx}\right) - (RT + UV)\frac{dq}{dx}$$

$$= V(S \pm G^{1/2}) - (S^2 - G)\frac{dq}{dx},$$

und daher:

$$(2) \qquad R\frac{dp}{dx} + (S \mp G^{1/2})\frac{dq}{dx} = V.$$

Diese beiden Gleichungen (1) und (2) können an die Stelle der beiden vorher erhaltenen gesetzt werden; man kann bemerken, dass sie denen in §. 234 analog sind. Wir können auch (1) und (2) mit einander verbinden, so dass wir eine Gleichung in anderer Form erhalten, die aber nicht unabhängig von diesen ist. Multipliciren wir (2) mit U und substituiren wir für $U\frac{dq}{dx}$ aus (1) seinen Werth, so erhalten wir:

$$UR\frac{dp}{dx} + S^2 - G - R\frac{dy}{dx}(S \mp G^{1/2}) = UV,$$

was sich leicht vereinfacht zu:

$$(3) \qquad U\frac{dp}{dx} - (S \mp G^{1/2})\frac{dy}{dx} + T = 0.$$

Wir können daher entweder (1) und (2) oder (1) und (3) als die Gleichungen betrachten, welche die beiden Gleichungen $P = 0 = Q$ ersetzen. Nehmen wir daher (1) und (3), so können wir sie in der Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} U dq + R dy - (S \pm G^{1/2})dx &= 0 \\ U dp - (S \mp G^{1/2})dy + T dx &= 0 \end{aligned}\right\}$$

und ferner haben wir:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0 \qquad (4).$$

Man wird bemerken, dass hierin $d\alpha$ nicht vorkommt und dass daher α bei den Integrationen als Constante zu betrachten ist.

§. 267.

Der Erfolg der Methode hängt von der Möglichkeit ab, eine Function W von x, y, z, p und q zu bestimmen von der Beschaffenheit, dass mit Berücksichtigung der zwischen den Differentialelementen bestehenden durch die Gleichungen (4) dargestellten Relationen

ihr totales Differential gleich Null ist. Ist dies möglich, so haben wir:

$$d W = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz + \frac{\partial W}{\partial p} dp + \frac{\partial W}{\partial q} dq = 0.$$

Werden die Werthe von dz, dp, dq, wie sie durch (4) gegeben sind, in diese Gleichung substituirt, so geht sie über in eine Gleichung, welche nur die Differentialelemente dx und dy enthält. Da diese unabhängig von einander sind, so müssen ihre Coefficienten einzeln Null sein, wenn die Gleichung befriedigt sein soll. Wir erhalten daher die beiden Gleichungen:

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + Up \frac{\partial W}{\partial z} - T \frac{\partial W}{\partial p} + (S \pm G^{1/2}) \frac{\partial W}{\partial q} = 0$$

$$U \frac{\partial W}{\partial y} + Uq \frac{\partial W}{\partial z} + (S \mp G^{1/2}) \frac{\partial W}{\partial p} - R \frac{\partial W}{\partial q} = 0,$$

deren jede ersetzt werden kann durch die Gleichung:

$$R \frac{\partial W}{\partial x} + (S \pm G^{1/2}) \frac{\partial W}{\partial y} + \{Rp + (S \pm G^{1/2}) q\} \frac{\partial W}{\partial z} + V \frac{\partial W}{\partial p} = 0,$$

die sich aus ihnen durch Elimination von $\frac{\partial W}{\partial q}$ ergiebt. Diese letzte Gleichung ist von Vortheil in dem Falle, wo $U = 0$ ist; denn dann sind die beiden vorhergehenden Gleichungen nur einer einzigen äquivalent.

Die Function W muss somit zwei simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen; die Methode, um eine solche beiden gemeinsame Lösung zu erhalten, wenn man weiss, dass sie existirt, ist in §. 226 angegeben; wir können daher nunmehr W als gegebene Function betrachten.

§. 268.

Eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung wird geliefert durch

$$W = const.$$

Denn wir haben dann:

$$\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} p + \frac{\partial W}{\partial p} r + \frac{\partial W}{\partial q} s = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} q + \frac{\partial W}{\partial p} s + \frac{\partial W}{\partial q} t = 0,$$

und diese gehen, wenn man in ihnen die Werthe von $\frac{\partial W}{\partial x}$ und $\frac{\partial W}{\partial y}$ substituirt, die sich aus den obigen Gleichungen zur Bestimmung von W ergeben, respective über in:

$$- (T + Ur) \frac{\partial W}{\partial p} + (S \pm G^{1/2} - Us) \frac{\partial W}{\partial q} = 0$$

$$(S \mp G^{1/2} - Us) \frac{\partial W}{\partial p} - (R + Ut) \frac{\partial W}{\partial q} = 0.$$

Die Elimination des Verhältnisses von $\frac{\partial W}{\partial p}$ zu $\frac{\partial W}{\partial q}$ aus diesen giebt:

$$(T + Ur)(R + Ut) = (S - Us)^2 - G,$$

und dies reducirt sich mit Rücksicht auf den Werth von G auf:

$$Rr + 2 Ss + Tt + U(rt - s^2) = V,$$

d. h. auf die ursprüngliche Gleichung. Daraus folgt die Richtigkeit unseres Satzes.

§. 269.

Um das allgemeinste Zwischenintegral zu erhalten, müssen wir einen Ausdruck suchen, welcher eine willkürliche Function enthält. Nehmen wir nun an, dass es möglich sei, zwei particuläre Lösungen w_1 und w_2 der Gleichungen, welche W bestimmen und wegen des doppelten Vorzeichens wirklich zwei Systeme sind, zu finden so werden die Gleichungen auch befriedigt werden, wenn wir setzen:

$$W = \Phi(w_1, w_2) = 0.$$

Da die Gleichungen in W linear sind, so ist dies offenbar eine Lösung. Ferner sind die particulären Lösungen:

$$w_1 = const;$$

da aber für die Integrationen α als eine Constante zu betrachten war, so können wir setzen:

$$w_1 = f_1(\alpha),$$

wo $f_1(\alpha)$ eine willkürliche Function ist. Ebenso würden wir erhalten:

$$w_2 = f_2(\alpha),$$

wo auch $f_2(\alpha)$ eine willkürliche Function ist. Nun ist α irgend eine Function von x und y, deren Werth unbekannt ist; substituiren

wir daher in einer Gleichung den aus der anderen sich ergebenden Werth von α, so erhalten wir ein Resultat von der angegebenen Form.

§. 270.

Es kann vorkommen, dass man mehr als ein allgemeines Zwischenintegral erhalten kann. In jedem Falle gelangen wir wie vorher von dem einen Zwischenintegral (nach der Charpit'schen Methode) oder durch Combination der beiden Zwischenintegrale (wie in §. 236) zu dem allgemeinen Integrale der Gleichung, und dieses Integral wird in der Regel entweder zwei willkürliche Functionen oder drei willkürliche Constanten enthalten. Es ist dies jedoch nicht das allgemeinste Integral, welches möglich ist. Denn wenn wir eine ursprüngliche Integralgleichung von der Form

$$\varphi(z, x, y, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = 0$$

hätten und daraus fünf andere Gleichungen ableiteten, welche die Werthe von p, q, r, s, t gäben, so könnten wir aus den sechs entstehenden Gleichungen die fünf Constanten a eliminiren und dadurch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung erhalten, und zwar würde je nach der Form von φ der Grad dieser Gleichung verschieden sein. Umgekehrt könnten wir in jedem Falle in dem Integral, welches in Bezug auf die Anzahl der darin vorkommenden willkürlichen Constanten am allgemeinsten ist, mehr als drei willkürliche Constanten erwarten. Aber auch $\varphi = 0$ wird nicht nothwendig das allgemeinste Integral sein. Der einzige Schluss, den wir machen können, ist der, dass die Gleichung, welche drei willkürliche Constanten enthält, nicht das allgemeinste Integral ist. Sie lässt sich indessen durch eine ersetzen, welche allgemeiner ist; die von Imschenetsky angegebene Methode, dieselbe zu finden, ist analog der von Laplace für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung angewandten — nämlich die Variation der Constanten.

§. 271.

Das durch die vorige Methode erhaltene Integral möge dargestellt sein durch

$$z = f(x, y, a, b, c).$$

Um das allgemeine Integral zu erhalten, werden wir annehmen, dass c in eine Function von a und b verwandelt werde, deren Werth

bisher noch unbestimmt ist, und werden dann a und b als Functionen von x und y von solcher Beschaffenheit betrachten, dass p und q dieselbe Form beibehalten, als ob a, b, c sämmtlich constant wären.

Bezeichnen wir

$$\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial a} \text{ und } \frac{\partial f}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial b}$$

respective mit

$$\frac{df}{da} \text{ und } \frac{df}{db},$$

so erhalten wir:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p + \frac{df}{da}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{df}{db}\frac{\partial b}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q + \frac{df}{da}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{df}{db}\frac{\partial b}{\partial y},$$

und somit wegen $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ und $\frac{\partial z}{\partial y} = q$:

$$\frac{df}{da}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{df}{db}\frac{\partial b}{\partial x} = 0$$

$$\frac{df}{da}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{df}{db}\frac{\partial b}{\partial y} = 0,$$

und diese werden befriedigt sein, wenn wir setzen

$$\frac{df}{da} = 0 = \frac{df}{db}.$$

Die zweiten Differentialquotienten sind:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r + \frac{dp}{da}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{dp}{db}\frac{\partial b}{\partial x} = r + h$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = s + \frac{dp}{da}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{dp}{db}\frac{\partial b}{\partial y} = s + \frac{dq}{da}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{dq}{db}\frac{\partial b}{\partial x} = s + k$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t + \frac{dq}{da}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{dq}{db}\frac{\partial b}{\partial y} = t + l.$$

Da aber $\frac{df}{da}$ identisch Null ist, wenn wir annehmen, dass für a und b ihre Werthe als Functionen von x und y gesetzt sind, so erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{da}\right) + \frac{d^2 f}{da^2}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{d^2 f}{da\,db}\frac{\partial b}{\partial x} = 0$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{da}\right) = \frac{d}{da}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{dp}{da},$$

daher:

$$\frac{dp}{da} + \frac{d^2f}{da^2}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{d^2f}{da\,db}\frac{\partial b}{\partial x} = 0.$$

Analog:

$$\frac{dq}{da} + \frac{d^2f}{da^2}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{d^2f}{dadb}\frac{\partial b}{\partial y} = 0$$

$$\frac{dp}{db} + \frac{d^2f}{dadb}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{d^2f}{db^2}\frac{\partial b}{\partial x} = 0$$

$$\frac{dq}{db} + \frac{d^2f}{dadb}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{d^2f}{db^2}\frac{\partial b}{\partial y} = 0.$$

Diese Gleichungen genügen der Bedingung:

$$k = \frac{dp}{da}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{dp}{db}\frac{\partial b}{\partial y} = \frac{dq}{da}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{dq}{db}\frac{\partial b}{\partial x},$$

und aus ihnen kann man die Ausdrücke ableiten:

$$h\varDelta = \frac{d^2f}{da^2}\left(\frac{dp}{db}\right)^2 - 2\frac{d^2f}{dadb}\frac{dp}{da}\frac{dp}{db} + \frac{d^2f}{db^2}\left(\frac{dp}{da}\right)^2$$

$$l\varDelta = \frac{d^2f}{da^2}\left(\frac{dq}{db}\right)^2 - 2\frac{d^2f}{dadb}\frac{dq}{da}\frac{dq}{db} + \frac{d^2f}{db^2}\left(\frac{dq}{da}\right)^2$$

$$k\varDelta = \frac{d^2f}{da^2}\frac{dp}{db}\frac{dq}{db} - \frac{d^2f}{dadb}\left(\frac{dp}{da}\frac{dq}{db} + \frac{dq}{da}\frac{dp}{db}\right) + \frac{d^2f}{db^2}\frac{dp}{da}\frac{dq}{da},$$

worin

$$\varDelta = \left(\frac{d^2f}{dadb}\right)^2 - \frac{d^2f}{da^2}\frac{d^2f}{db^2}$$

ist.

Nun soll aber auch trotz der veränderten Formen von a, b, c immer noch

$$z = f(x, y, a, b, c)$$

eine Lösung der Gleichung

$$R\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2S\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + T\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + U\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2\right\} = V$$

sein. Die Coefficienten der zweiten Differentialquotienten sind in ihrer Form nicht geändert, da wir die Formen der ersten Differentialquotienten beibehalten haben, und daher bleiben R, S, T, U, V ungeändert. Substituiren wir daher in diese Gleichung die Werthe von $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ und beachten wir, dass die Differential-

gleichung befriedigt wird, wenn h, k, l Null sind, so finden wir, dass sie die Form annimmt:

$$(R + Ut)h + 2(S - Us)k + (T + Ur)l + U(lh - k^2) = V,$$

wobei die explicit vorkommenden Grössen r, s, t und die implicit vorkommenden Grössen p, q, z zu ersetzen sind durch ihre Werthe, die sich aus dem Integral

$$z = f(x, y, a, b, c),$$

in welchem a, b, c als constant betrachtet werden, ergeben. Wir müssen nun die für h, k, l gefundenen Werthe substituiren; alsdann findet man, nach einigen Vereinfachungen, dass die Gleichung die Form besitzt:

$$R_1 \frac{d^2 f}{d a^2} - 2 S_1 \frac{d^2 f}{d a d b} + T_1 \frac{d^2 f}{d b^2} = V_1,$$

worin

$$R_1 = (R + Ut)\left(\frac{dp}{db}\right)^2 + 2(S - Us)\frac{dp}{db}\frac{dq}{db} + (T + Ur)\left(\frac{dq}{db}\right)^2$$

$$T_1 = (R + Ut)\left(\frac{dp}{da}\right)^2 + 2(S - Us)\frac{dp}{da}\frac{dq}{da} + (T + Ur)\left(\frac{dq}{da}\right)^2$$

$$S_1 = (R + Ut)\frac{dp}{da}\frac{dp}{db} + (S - Us)\left(\frac{dp}{da}\frac{dq}{db} + \frac{dp}{db}\frac{dq}{da}\right) + (T + Ur)\frac{dq}{da}\frac{dq}{db}$$

$$V_1 = U\left(\frac{dp}{da}\frac{dq}{db} + \frac{dp}{db}\frac{dq}{da}\right)^2$$

ist.

In allen diesen Coefficienten sind die Grössen z, p, q, r, s, t zu ersetzen durch ihre Werthe in x und y, wie sie sich aus der gegebenen Integralgleichung ergeben.

Diese Differentialgleichung ist linear in den zweiten Differentialquotienten von f nach a und b; sie ist überdies die Gleichung, welche zur Bestimmung des Werthes von c als Function von a und b dient. Nun ist:

$$\frac{df}{da} = \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial a},$$

also:

$$\frac{d^2 f}{d a^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial c}\frac{\partial c}{\partial a} + \frac{\partial^2 f}{\partial c^2}\left(\frac{\partial c}{\partial a}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial^2 c}{\partial a^2},$$

und ebenso für die anderen Coefficienten. Substituirt man diese Werthe für $\frac{d^2 f}{da^2}$, $\frac{d^2 f}{da db}$, $\frac{d^2 f}{db^2}$, so ist die resultirende Gleichung

linear in den zweiten Differentialquotienten von c nach a und b, und die Grössen, mit denen diese multiplicirt sind, sind Functionen von $x, y, a, b, c, \frac{\partial c}{\partial a}, \frac{\partial c}{\partial b}$. Wir haben aber auch:

$$\frac{df}{da} = 0 = \frac{df}{db}$$

und können hieraus die Werthe von x und y als Functionen von $a, b, c, \frac{\partial c}{\partial a}, \frac{\partial c}{\partial b}$ finden; werden dieselben substituirt, so wird dadurch die Gleichung in eine Gleichung umgeändert, welche nur die Grössen a, b, c und die Differentialquotienten von c enthält. Diese Gleichung wird alsdann die Form haben:

$$A\frac{\partial^2 c}{\partial a^2} + 2\,C\frac{\partial^2 c}{\partial a \partial b} + B\frac{\partial^2 c}{\partial b^2} = F,$$

wo A, B, C, F Functionen von $a, b, c, \frac{\partial c}{\partial a}, \frac{\partial c}{\partial b}$ sind.

Nun kann es zwar nicht möglich sein, die ursprüngliche Differentialgleichung direct zu integriren, wohl aber kann es möglich sein, beinahe durch den blossen Anblick eine particuläre Lösung zu finden, welche drei willkürliche Constanten enthält, oder es kann doch, wenn man es auch nicht gerade durch den blossen Anblick findet, möglich sein, ein solches Integral abzuleiten. In jedem Falle kann ein solches particuläres Integral verallgemeinert werden, vorausgesetzt, dass man die Lösung der Gleichung, welche durch c befriedigt wird, erhalten kann; und wenn diese Lösung dargestellt wird durch

$$\vartheta(a, b, c) = 0,$$

so erhält man das neue Integral der ursprünglichen Gleichung, indem man aus den Gleichungen

$$z = f(x, y, a, b, c)$$
$$0 = \vartheta(a, b, c)$$
$$0 = \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial \vartheta}{\partial c} - \frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial \vartheta}{\partial a}$$
$$0 = \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial \vartheta}{\partial c} - \frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial \vartheta}{\partial b}$$

die Grössen a, b, c eliminirt.

1. **Aufgabe.** Man integrire die Gleichung:

$$r + 2(q - x)s + (q - x)^2 t = q.$$

Hier ist:

$R = 1, \quad S = q - x, \quad T = (q-x)^2, \quad U = 0, \quad V = q,$ also $G = 0$,

und die Gleichungen, welche W bestimmen, bilden nur ein einziges Paar, nämlich

$$0 = \frac{\partial W}{\partial q} - (q-x)\frac{\partial W}{\partial p}$$

$$0 = \frac{\partial W}{\partial x} + (q-x)\frac{\partial W}{\partial y} + (p + q^2 - qx)\frac{\partial W}{\partial z} + q\frac{\partial W}{\partial p}.$$

Wir stellen diese, wie in §. 226, dar durch:

$$0 = F_1 = Q - (q-x)P,$$

$$0 = F_2 = X + (q-x)Y + (p + q^2 - qx)Z + qP.$$

Als Bedingung dafür, dass diese Gleichungen simultan integrirt werden können, müssen wir haben:

$$0 = (F_1, F_2) = -qZ - Y.$$

Schreiben wir also:

$$0 = F_3 = -qZ - Y,$$

so ist:

$$(F_2, F_3) = 0, \quad (F_1, F_3) = Z,$$

und ebenso setzen wir:

$$0 = F_4 = Z;$$

dann ist:

$$0 = (F_1, F_2) = \cdots = (F_3, F_4).$$

Somit:

$$Y = 0 = Z, \quad X + qP = 0, \quad Q - (q-x)P = 0.$$

Substituiren wir dies in:

$$0 = P\,dp + Q\,dq + X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

so erhalten wir:

$$0 = P(dp - q\,dx + q\,dq - x\,dq),$$

und daher können wir als Zwischenintegral annehmen:

$$W = p + \frac{1}{2}q^2 - xq + \alpha = 0.$$

Um das vollständige Integral zu erhalten, wenden wir die Charpit'sche Methode an und haben zu suchen ein Integral von

$$\frac{dx}{-1} = \frac{dy}{-q+x} = \frac{dp}{-q} = \frac{dq}{0}.$$

Ein solches wird gegeben durch $q = \beta$ und daher:

$$p = -\alpha + \beta x - \frac{1}{2}\beta^2.$$

Werden diese Werthe in

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

substituirt, so gelangt man zu dem Integral:

$$z = \beta y + \frac{1}{2}\beta x(x - \beta) - \alpha x - c,$$

welches drei willkürliche Constanten enthält.

Um das modificirte (§. 271) Integral zu erhalten, schreiben wir dieses:

$$z = f = -\alpha x + \beta y + \frac{1}{2}\beta x(x - \beta) - c$$

und betrachten c als Function von α und β. Dann erhalten wir:

$$0 = \frac{df}{d\alpha} = -x - \frac{\partial c}{\partial \alpha}$$

$$0 = \frac{df}{d\beta} = y + \frac{1}{2}x^2 - \beta x - \frac{\partial c}{\partial \beta}$$

$$p = -\alpha + \beta x - \frac{1}{2}\beta^2;\quad q = \beta,\ r = \beta,\ s = t = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} = -x,\ \frac{\partial f}{\partial c} = -1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial c} = \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial c} = 0;\ \frac{dp}{d\beta} = x - \beta,\ \frac{dq}{d\beta} = 1 = -\frac{dp}{d\alpha},\ \frac{dq}{d\alpha} = 0.$$

Hieraus wird:

$$R_1 = 0,\quad T_1 = 1,\quad S_1 = 0,\quad V_1 = 0,$$

und die Gleichung in f ist:

$$\frac{d^2 f}{d\beta^2} = 0,$$

oder, in c ausgedrückt:

$$-x - \frac{\partial^2 c}{\partial \beta^2} = 0,$$

oder schliesslich:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \beta^2} = \frac{\partial c}{\partial \alpha}.$$

Ein Integral hiervon ist aber nach §. 259:

$$c = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} f(\beta + 2\lambda\alpha^{1/2})\, d\lambda,$$

und daher erhält man ein Integral der ursprünglichen Gleichung, wenn man α und β eliminirt aus den Gleichungen:

$$z = \beta y - \alpha x + \frac{1}{2}\beta x(x - \beta) - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} f(\beta + 2\lambda\alpha^{1/2})\, d\lambda$$

$$0 = x\alpha^{1/2} + \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda^2} f'(\beta + 2\lambda\alpha^{1/2})\, d\lambda$$

$$0 = y + \frac{1}{2}x^2 - \beta x - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} f'(\beta + 2\lambda\alpha^{1/2})\, d\lambda.$$

Die zweite von diesen Gleichungen kann, wenn man auf das bestimmte Integral die partielle Integration anwendet, ersetzt werden durch:

$$0 = x + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} f''(\beta + 2\lambda\alpha^{1/2})\, d\lambda.$$

2. Aufgabe. Man integrire die Gleichungen:

(1) $r - t = \frac{2p}{x}$.

(2) $x^4 r - 4x^2 qs + 4q^2 t + 2px^3 = 0$.

(3) $(x+q)^2 r + 2(x+q)(y+p)s + (y+p)^2 t + 2(x+q)(y+p) = 0$.

(4) $x^2 r + 2x^2 s + \left(x^2 - \frac{b^2}{x^2 q^2}\right) t = 2z$.

(5) $r + 2qs + (q^2 - x^2)t = q$.

(6) $x^4 r - 4x^2 qs + 3q^2 t + 2x^3 p = 0$.

(7) $r + 2qs + q^2 t = b^2 t$.

(8) $2ps + t - p = 0$.

(Ampère und Imschenetsky.)

Eine vollständigere Discussion ist enthalten in der werthvollen Abhandlung von Imschenetsky, Grunert's Archiv der Mathematik und Physik, Bd. LIV, und in der bereits erwähnten (§. 223) Abhandlung von Graindorge. Man findet daselbst auch weitere Hinweise auf andere Quellenschriften.

Vermischte Aufgaben.

1. Man zeige, dass das Integral der Gleichung:

$$(x+y)(r-t) + 4p = 0,$$

wie es durch die Monge'sche Methode gegeben wird, lautet:

$$(x+y)\, z + e^{\frac{2y}{x+y}} F(x+y) = e^{\frac{2y}{x+y}} \int e^{-\frac{2y}{a}} f(2y-a)\, dy,$$

wo $y+x$ nach der Integration an die Stelle von a zu setzen ist und f und F willkürliche Functionen sind.

Hiernach löse man die Gleichung:

$$(p+q)(r-t) = 4x(rt-s^2).$$

2. Man löse nach der Methode von Monge die Gleichungen:

(1) $q(1+q)r - (p+q+2pq)s + p(1+p)t = 0.$

(2) $(1+pq+q^2)r + s(q^2-p^2) - (1+pq+p^2)t = 0.$

(3) $(r-t)xy - s(x^2-y^2) = qx - py.$

(4) $x^2 r - y^2 t = xp - yq.$

(5) $r - 2s + t = x + \varphi(x+y).$

(6) $(r-s)x = (t-s)y.$

(7) $x^2 r - y^2 t - 2xp + 2z = 0.$

(8) $(r-s)y + (s-t)x + q - p = 0.$

(9) $xr + (y-x)s - yt = q - p.$

3. Man löse die Gleichung:

$$r + t = 2s,$$

und bestimme die willkürlichen Functionen durch die Bedingungen, dass $bz = y^2$ für $x = 0$ und $az = x^2$ für $y = 0$ sein soll.

4. Man integrire die Gleichung:

$$\frac{r}{x^2} - \frac{t}{y^2} = \frac{p}{x^3} - \frac{q}{y^3}$$

und suche ein erstes Integral der Gleichung:

$$rq\left(\frac{q}{z} - \frac{1}{y}\right) - 2s\frac{pq}{z} + tp\left(\frac{p}{z} - \frac{1}{x}\right) + rt - s^2 + \frac{pq}{xy}\left(1 - \frac{px+qy}{z}\right) = 0.$$

5. Man suche eine Lösung der Gleichung

$$rt - s^2 = 0$$

unter der Bedingung $q^2 = x^2(1+p^2)$ in der Form:

$$z = ay + (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + a \log \frac{a-(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}.$$

6. Man integrire die Gleichung:

$$(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r = 0,$$

wenn gegeben ist, dass $py - qx = 0$ ist, und zeige, dass eine particuläre Lösung ist:

$$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = c \cosh \frac{z}{c}.$$

Man integrire ebenso die Gleichung:

$$\{(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r\}^2=4(rt-s^2)(1+p^2+q^2)$$

und discutire die Natur der Lösung:

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

7. Man löse die Gleichungen:

(1) $e^{2y}(r-p)=e^{2x}(t-q).$

(2) $qys=pyt+pq.$

(3) $xr+xys+yq=0.$

(4) $xr+2ys+p=4x.$

(5) $2xr-2t+p=0.$

(6) $x(r-a^2t)=2p.$

8. Man beweise, dass die einzige reelle Lösung der simultanen Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=1$$

lautet:

$$u=x\cos\alpha+y\sin\alpha+\beta.$$

9. Man beweise, dass die einzige reelle Lösung, welche gleichzeitig den Gleichungen

$$r+t=2a,$$

$$s^2-rt=b^2$$

genügt, enthalten ist in:

$$z=\frac{1}{2}x^2(a+c\cos\alpha)+cxy\sin\alpha+\frac{1}{2}y^2(a-c\cos\alpha)+\beta x+\gamma y+\delta,$$

worin $c^2=a^2+b^2$ und α, β, γ, δ willkürliche Constanten sind.

10. Man suche ein Zwischenintegral von

$$pqr=s(1+p^2)$$

und zeige, dass man ihr allgemeines Integral erhält, wenn man a aus den Gleichungen

$$z-\varphi(a)-ax-(1+a^2)^{1/2}f(y)=0$$

$$\varphi'(a)+x+a(1+a^2)^{-1/2}f(y)=0,$$

worin f und φ willkürlich sind, eliminirt. (Serret und Graindorge.)

11. Man integrire die Gleichungen:

(1) $xp+yq+x^2r+\frac{5}{2}xys+y^2t=0.$

(2) $(xp+yq)(rt-s^2)+q^2r-\frac{5}{2}pqs+p^2t=0.$

(3) $(x^2-y^2)(t-r)+4(px+qy-z)=0.$

Ebenso löse man, indem man die unabhängigen Veränderlichen in ξ und η verwandelt, wobei

$$x^2 = \xi\eta \quad \text{und} \quad xy = \xi$$

ist, die Gleichung:

$$(4) \qquad x^2 r - 2xys + y^2 t + 2yq = 0,$$

und, indem man die unabhängigen Veränderlichen in ξ und η verwandelt, wobei

$$x = e^{\xi+\eta} \quad \text{und} \quad y = e^{\xi-\eta}$$

ist, die Gleichung:

$$(5) \qquad x^2 r - y^2 t = (xp - yq) f(xy).$$

12. Man integrire die Gleichungen:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial z}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{2}{x^2} z\right).$$

$$(3) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{a^2}{x^4}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

$$(4) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{x^2} z - a \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

$$(5) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{1}{x+y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{2}{(x+y)^2} z = 0. \quad \text{(Gregory.)}$$

13. Man bestimme die Oberfläche, deren Gleichung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

genügt, und deren Durchschnitt mit der xy-Ebene die Hyperbel $xy = a^2$ ist.

14. Man integrire die simultanen Gleichungen:

$$(1) \quad \left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right\}.$$

$$(2) \quad \left.\begin{aligned} m \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\right) &= n\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2}\right) \\ m \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\right) &= n\left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}\right) \end{aligned}\right\}.$$

15. Man zeige, dass die simultanen Gleichungen

$$rt + c(r + t) = 0$$
$$pq + c'(py - qx) = 0$$

eine Schaar von Paraboloiden mit derselben Achse darstellen, welche

irgend eine feste zur Achse senkrechte Ebene in einer Schaar von ähnlichen Ellipsen schneiden, bei denen das Achsenverhältniss

$$(c' - c)^{1/2} : (c' + c)^{1/2}$$

ist.

16. Man zeige, dass die Gleichung

$$Gs + Hp + K = 0,$$

in welcher G, H, K Functionen von x, y, z und q sind, integrirt werden kann, falls

$$G\left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial z}\right) + H\left(\frac{\partial K}{\partial q} - \frac{\partial G}{\partial x}\right) + K\left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial q}\right) = 0$$

ist, und bestimme das Integral.

Hiernach suche man das Integral von

$$\{(x + yz)s - ypq\}(x + y) = qy(1 - z)$$

in der Form:

$$z = e^{-\int \frac{y\,dy}{(x+y)\varphi(y)}} \left[\psi(x) - \int e^{\int \frac{y\,dy}{(x+y)\varphi(y)}} \frac{x\,dy}{(x + y)\,\varphi(y)}\right].$$

(Imschenetsky und Graindorge.)

17. Man bestimme eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

in Form einer nach steigenden Potenzen von x fortschreitenden Reihe.

(Lagrange.)

Man löse die Gleichung

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2h\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2g\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2f\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

und discutire insbesondere den Fall, in welchem die Discriminante der linken Seite gleich Null ist.

18. Man zeige, dass die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 y^{2b}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

in endlicher Form integrirbar ist, falls $b(2i \pm 1) = 2i$ und i eine positive ganze Zahl ist.

Ebenso löse man die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{i(i+1)}{x^2}u. \qquad \text{(Legendre.)}$$

19. Man zeige, dass das vollständige Integral der Gleichung

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{n(n+1)u}{r^2}$$

(wo n eine ganze Zahl ist) dargestellt werden kann in der Form:

$$u = r^n\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^n \frac{\varphi(r + at) + \psi(r - at)}{r},$$

wobei φ und ψ willkürliche Functionen sind, und bestimme in der Form eines bestimmten Integrals die vollständige Lösung von

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

20. Man drücke durch ein bestimmtes Integral die Lösung der Gleichung aus:

$$2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x+y}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}\right).$$

21. Man stelle eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

in der Form dar:

$$\pi u = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-v^2}\varphi(x + 2^{3/2} a u v^{1/2} t^{1/4})\, du\, dv.$$

22. Man verwandle die abhängige Veränderliche z in der Gleichung

$$q(1+q)r - (p+q+2pq)s + p(1+p)t = 0$$

in y und bestimme hiernach die Lösung der Gleichung in der Form:

$$x + f(z) = F(x+y+z).$$

23. Man zeige, dass, wenn es fünf Functionen z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 giebt, von denen jede den Gleichungen

$$r = a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z$$
$$t = b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z,$$

in denen die a und b Functionen von x und y allein sind, genügen, alsdann zwischen ihnen eine lineare Relation mit constanten Coefficienten besteht von der Form:

$$C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4 + C_5 z_5 = 0.$$

Wenn ausserdem irgend vier von ihnen, z. B. z_1, z_2, z_3, z_4, so beschaffen sind, dass sie der Gleichung

$$\begin{vmatrix} z_1, & z_2, & z_3, & z_4 \\ p_1, & p_2, & p_3, & p_4 \\ q_1, & q_2, & q_3, & q_4 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix} = 0$$

identisch genügen, so giebt es auch eine Relation von der Form:

$$C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4 = 0. \qquad \text{(Appell.)}$$

24. Man zeige, dass die Function $F(\alpha, \beta, \gamma, \vartheta, \varepsilon, x, y)$, welche gegeben ist durch die Reihe:

$$\sum\sum \frac{\Pi(\alpha+m+n-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(m)\,\Pi(n)} \frac{\Pi(\beta+m-1)\,\Pi(\gamma+n-1)\,\Pi(\vartheta-1)\,\Pi(\varepsilon-1)}{\Pi(\vartheta+m-1)\,\Pi(\varepsilon+n-1)\,\Pi(\beta-1)\,\Pi(\gamma-1)} x^m y^n,$$

worin sich die Summation über alle ganzzahligen Werthe von m und n von 0 bis ∞ erstreckt, den beiden Gleichungen genügt:

$$(x - x^2) r - x y s + \{\vartheta - (\alpha + \beta + 1) x\} p - \beta y q - \alpha \beta z = 0$$
$$(y - y^2) t - x y s + \{\varepsilon - (\alpha + \gamma + 1) y\} q - \gamma x p - \alpha \gamma z = 0.$$

Hiernach zeige man, dass

$$F(\alpha, \delta + c, - c, \vartheta, \varepsilon, x, y)$$

eine Lösung ist von

$$(x - x^2) r - 2 x y s + (y - y^2) t + \{\vartheta - (\alpha + \delta + 1) x\} p + \{\varepsilon - (\alpha + \delta + 1) y\} q - \alpha \delta z = 0,$$

wenn c eine willkürliche Constante ist. (Appell.)

25. Wenn es drei Functionen z_1, z_2, z_3 giebt, welche den Gleichungen

$$r = a_1 p + a_2 q + a_3 z$$
$$s = b_1 p + b_2 q + b_3 z$$
$$t = c_1 p + c_2 q + c_3 z$$
$$z_1 (p_2 - q_3) + z_2 (p_3 - q_1) + z_3 (p_1 - q_2) = 0$$

genügen, wobei die a, b, c Functionen von x, y sind, so existirt zwischen diesen Functionen eine lineare Relation mit constanten Coefficienten.
(Appell.)

26. Man zeige, dass das Integral der Gleichung

$$s + x y p + k y z = 0$$

durch Differentiation in Zusammenhang gebracht werden kann mit dem von

$$s + x y p + (k + n) y z = 0,$$

wobei k eine Constante und n eine ganze Zahl ist.

Hiernach löse man die erste Gleichung in dem Falle, wo k eine negative ganze Zahl ist.

Man bestimme die Lösung, wenn k eine positive ganze Zahl ist.
(Tanner.)

27. Man bestimme die Lösung von

$$s = e^z$$

in der Form:

$$e^z = 2 \frac{\varphi'(x) \psi'(y)}{\{\varphi(x) + \psi(y)\}^2},$$

worin φ und ψ willkürliche Functionen sind.
(Liouville).

Hiernach integrire man die Gleichung:

$$s = z p.$$ (Tanner.)

28. Man integrire nach der Ampère'schen Methode die Gleichungen:

$$(1)\qquad zs + \frac{z}{q^2}\,t + pq = 0.$$

$$(2)\qquad \frac{a\,x^2}{y^2}\,r + \frac{b\,y^2}{x^2}\,t + (lx + my + nxy)\,(rt - s^2)$$

$$= (lx + my + nxy)\left\{2\left(\frac{z}{xy} - \frac{p}{y} - \frac{q}{x}\right)s + \left(\frac{z}{xy} - \frac{p}{y} - \frac{q}{x}\right)^2\right\}.$$

$$(3)\qquad qr + (p + x)\,s + yt + y\,(rt - s^2) + q = 0.$$

(Imschenetsky.)

ANHANG.

AUFLÖSUNGEN DER AUFGABEN.

I. Capitel.

§. 10.

2. Aufgabe. Die Determinante verschwindet identisch, weil in ihr die

$$3.\text{ Zeile} = (bcA^2 + caB^2 + abC^2) \times 1.\text{ Zeile}$$
$$- 2abc\,(Ax + By + Cz) \times 2.\text{ Zeile}$$

ist, und die zwischen den drei Functionen bestehende Relation lautet:

$$u_3 = (bcA^2 + caB^2 + abC^2)\,u_1 - abcu_2^2.$$

II. Capitel.

§. 13.

3. Aufgabe.

(1) $(1 + x^2)^{1/2} + (1 + y^2)^{1/2} = C.$

(2) Man setze $y = \dfrac{x + tang\,u}{1 - x\,tang\,u}$;

dann ist: $arc\,tang\,y = C + n\displaystyle\int \frac{du}{n - sin\,u}$.

(3) Man setze $x + y = u$; dann ist: $x + y = a\,tang\,\dfrac{y - C}{a}$.

(4) $C - 2(1 + x)^{-1/2} - \dfrac{1}{2}\,log\,(1 + y^2) = \displaystyle\int \frac{(1 + y)^{1/2}dy}{1 + y^2}$.

(5) $tang\,x\,.\,tang\,y = C.$

§. 14.

2. Aufgabe.

(1) $y = Cx\,(1 - x^2)^{1/2} + ax.$

(2) $y = Ce^{-sin\,x} + sin\,x - 1.$

(3) $y^2 = Ce^{-2cx} + \dfrac{2a}{4c^2 + 1}\,\{2c\,cos\,(x + \beta) + sin\,(x + \beta)\}.$

(4) $x = Ce^{-\varphi} + \varphi - 1.$

3. Aufgabe. Man erhält diese Form der Lösung, wenn man in dem zuerst erhaltenen Werthe von y partiell integrirt.

§. 15.

5. Aufgabe.

(1) $z^{-2} = Ce^{2x^2} + a x^2 + \frac{1}{2} a.$

(2) $z^{-1} = C(1 - x^2)^{1/2} - a.$

(3) $y^{-1} = Ce^{1/2 x^2} - e^{1/2 x^2} \int e^{-1/2 x^2} \sin x \, dx.$

(4) $x^{-1} = Ce^{-1/2 y^2} - y^2 + 2.$

6. Aufgabe. Die vier Gleichungen in §. 7 geben der Reihe nach:

$\frac{dy}{dx} = (A^2 - y^2)^{1/2}$, also $arc \sin \frac{y}{A} = x + \alpha$, oder $y = A \sin(x + \alpha)$;

$\frac{dy}{dx} + y \, tang \, x = \frac{B}{\cos x}$, also $y = C \cos x + B \sin x = A \sin(x + \alpha)$;

$\frac{dy}{dx} - y \cot x = -\frac{C}{\sin x}$, also $y = B \sin x + C \cos x = A \sin(x + \alpha)$;

$\frac{dy}{y} = \cot(x + \alpha) \, dx$, also $\log y = \log A + \log \sin(x + \alpha)$,

oder $y = A \sin(x + \alpha)$.

§. 16.

2. Aufgabe.

(1) Das Integral hat eine verschiedene Form, je nachdem $m \gtreqless 2$ ist. Ist zunächst $m > 2$ und $1 - mv + v^2 = (\mu - v)\left(\frac{1}{\mu} - v\right)$, so wird: $\log(x^2 - mxy + y^2) + \frac{\mu^2 + 1}{\mu^2 - 1} \log \frac{y - \mu x}{\mu y - x} = C$. Ist $m < 2$ und $m = 2 \cos \lambda$, so wird:

$$\log(x^2 - mxy + y^2) + 2 \cot \lambda \, . \, arc \, tang \frac{y - x \cos \lambda}{\sin \lambda} = C.$$

Ist endlich $m = 2$, so wird: $(x - y) e^{\frac{x}{x - y}} = C.$

(2) $y = Ce^{\frac{y}{x}}.$

4. Aufgabe.

(1) $(y + x - 1)^5 . (y - x + 1)^2 = C.$

(2) $4x + 8y + 5 = Ce^{4x - 8y}.$

(3) $x + 5y + 2 = C(x - y + 2)^4.$

5. Aufgabe. Für $P = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, $Q = x^n \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, $R = x^m \chi\left(\frac{y}{x}\right)$ und $\frac{y}{x} = v$ nimmt die Gleichung die in §. 15 behandelte Form an:

$$\frac{dx}{dv} + \frac{\varphi(v)}{v\varphi(v) - \chi(v)} x = - \frac{\psi(v)}{v\varphi(v) - \chi(v)} x^{n-m+2}.$$

6. Aufgabe. Wäre $\gamma = 0 = \gamma'$, so hätte diese Gleichung die in der vorigen Aufgabe behandelte Form. Um also diese Form herzustellen, setze man $x = \xi + h$, $y = \eta + k$ und ferner:

$$Ah + Bk = \lambda, \quad \alpha h + \beta k + \gamma = \mu, \quad \alpha' h + \beta' k + \gamma' = \nu.$$

Dadurch geht die gegebene Gleichung über in:

$$\{\lambda h + \mu + (\lambda + \alpha)\xi + (Bh + \beta)\eta + (A\xi + B\eta)\xi\} d\eta$$
$$= \{\lambda k + \nu + (Ak + \alpha')\xi + (\lambda + \beta')\eta + (A\xi + B\eta)\eta\} d\xi,$$

und diese erhält die gewünschte Form, wenn man $\lambda h + \mu = 0$ und $\lambda k + \nu = 0$ setzt.

Um h und k zu bestimmen, eliminire man h und k aus den drei Gleichungen:

$$Ah + Bk = \lambda, \quad \alpha h + \beta k + \gamma = -\lambda h, \quad \alpha' h + \beta' k + \gamma' = -\lambda k$$

und berechne eine Wurzel $\lambda = \lambda_1$ der sich ergebenden cubischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} -\lambda, & A, & B \\ \gamma, & \alpha + \lambda, & \beta \\ \gamma', & \alpha', & \beta + \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man sodann diesen Werth von λ in irgend zwei der vorhergehenden Gleichungen ein, so ergeben sich aus diesen die Werthe von h und k. (Vergl. Jacobi, Crelle's J., Bd. 24, S. 1.)

§. 18.

Aufgabe.

(1) Man hat p aus den Gleichungen $y = ap + bp^2$ und $x = C + a \log p + 2bp$ zu eliminiren.

(2) $x + a = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{y+C}{a}} + e^{-\frac{y+C}{a}}\right)$.

§. 19.

2. Aufgabe.

(1) $(y + C)^2 = 4\,ax.$

(2) $x^2(x^2 - 3\,y^2)^2 - 2\,Cy(y^2 - 3\,x^2) - C^2 = 0.$

3. Aufgabe.

(1) $(xy - C)(x^2y - C) = 0.$

(2) $x^3y^2 - 2\,Cx^{3/2}y\cos\left(\frac{3^{1/2}}{2}\log x\right) + C^2 = 0.$

(3) $(y - \frac{1}{2}x^2 - C)(y + x - 1 - Ce^{-3x}) = 0.$

(4) $(y - \frac{1}{3}x^3 - C)(y - Ce^{1/2\,x^2})\left(y - \frac{1}{C - x}\right) = 0.$

(5) $(y - C + \frac{1}{2}bx^2)\left\{(y - C)^2 - \left(arc\sin\frac{x}{a}\right)^2\right\} = 0.$

(6) Schreibt man die Gleichung in der Form: $(xp - y)^2 = p^2y^2(x^2 + y^2)$ und setzt dann $y = xv$, so wird:

$$\frac{dv}{v(1 + v^2)^{1/2}} = \pm\, d(xv),$$

daher: $\{x - (x^2 + y^2)^{1/2} - Cye^{y}\}\{x - (x^2 + y^2)^{1/2} - Cye^{-y}\} = 0.$

(7) Für $y = xv$ geht die Gleichung über in:

$$\left(\frac{dv}{dx} + v\right)\left(\frac{dv}{dx} + 1\right) = 0;$$

mithin erhält man: $(ye^x - Cx)(y + x^2 - Cx) = 0.$

4. Aufgabe. Ist in der allgemeinen Gleichung erster Ordnung und $n$ten Grades $P_0p^n + P_1p^{n-1} + \cdots + P_{n-1}p + P_n = 0$ allgemein $P_\varkappa = x^{\mu}\varphi_\varkappa\left(\frac{y}{x}\right)$ für jeden Werth von $\varkappa$ und setzt man $y = xt$ und $x\frac{dt}{dx} = z$, so folgt: $\varphi_0(t)(z + t)^n + \varphi_1(t)(z + t)^{n-1} + \cdots + \varphi_n(t) = 0$, oder wenn man nach Potenzen von z ordnet: $\psi_0(t)z^n + \psi_1(t)z^{n-1} + \cdots + \psi_{n-1}(t)z + \psi_n(t) = 0$. Löst man diese Gleichung nach z auf, so erhält man n Gleichungen von der Form: $z = \chi_\nu(t)$ oder: $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{\chi_\nu(t)}\cdot$ Die allgemeine Lösung folgt dann wie in §. 19.

Die Lösung der Gleichung $p^3 - \frac{p^2}{2} + \frac{x}{y} p - \frac{x}{2y} = 0$ ist:

$$\left(y - \frac{x}{2} - C\right) \{(y^{3/2} - C)^2 - x^3\} = 0.$$

§. 21.

2. Aufgabe.

(1) $y = Cx + (1 + C^2)^{1/2}$. Singuläre Lösung: $x^2 + y^2 = 1$.

(2) $y = Cx + C - C^2$. Singuläre Lösung: $(x + 1)^2 = 4y$.

(3) Man löse nach x auf, setze $p = \frac{1}{q}$ und differentiire nach y. Als allgemeine Lösung ergiebt sich: $y^2 = C(aC - b + 2x)$, die singuläre Lösung ist: $(2x - b)^2 + 4ay^2 = 0$, die aber nur bei negativem a eine reelle Enveloppe darstellt.

(4) Allgemeine Lösung: $y^2 + Cx^2 = C^2$; eine Enveloppe giebt es nicht.

(5) Man löse nach x auf, setze $p = \frac{1}{q}$ und differentiire nach y. Die allgemeine Lösung ist: $y^2 = 2Cx + C^3$, die singuläre: $27y^4 + 32x^3 = 0$, die jedoch nur bei negativen Werthen von x eine wirkliche Enveloppe darstellt.

§. 22.

2. Aufgabe.

(1) Man eliminire p aus $x = yp + ap^2$ und

$$x = \frac{p}{(1 - p^2)^{1/2}} (C + a \arcsin p).$$

(2) Die Stammgleichung wird gebildet durch die beiden simultanen Gleichungen:

$$x = \frac{C}{(1 + p^2)^{1/2} \{p + (1 + p^2)^{1/2}\}^{\frac{1}{a}}}, \quad y = \frac{C\{p + a(1 + p^2)^{1/2}\}}{(1 + p^2)^{1/2} \{p + (1 + p^2)^{1/2}\}^{\frac{1}{a}}}.$$

Da die Gleichung homogen ist, kann man auch §. 16 anwenden.

(3) Man eliminire p aus $y = mxp + n(1 + p^3)^{1/3}$ und

$$x = p^{-\frac{m}{m-1}} \left(C - \frac{n}{m-1} \int \frac{p^{\frac{2m-1}{m-1}} dp}{(1 + p^3)^{2/3}}\right).$$

(4) $y^2 = 2\,Cx + C^2$.

(5) Die allgemeine Lösung ist: $(x - C)^2 + y^2 = (n\,C)^2$, die singuläre: $n^2 x^2 = (1 - n^2)\,y^2$, die aber nur für $n < 1$ eine reelle Enveloppe, nämlich die Geraden $nx = \pm (1 - n^2)^{1/2}\,y$, darstellt.

§. 30.

7. Aufgabe.

(δ) Diese Gleichung, welche die Projectionen der Krümmungslinien eines gewissen Ellipsoids auf die xy-Ebene darstellt, kann man entweder durch die Substitution $x^2 + y^2 = 2u$ auf die in §. 22 behandelte Form $u = x\,\dfrac{q^2 + b^2}{2\,q} - \dfrac{b^2}{2}$, in welcher $q = \dfrac{du}{dx}$ ist, oder durch die Substitutionen $x^2 = s$, $y^2 = t$ auf die Clairaut'sche Form $t = s\dfrac{dt}{ds} - b^2\,\dfrac{\dfrac{dt}{ds}}{1 + \dfrac{dt}{ds}}$ zurückführen. Als Stammgleichung erhält man die Gleichung der confokalen Kegelschnitte:

$$\frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{c - b^2} = 1.$$

Eine reelle Enveloppe giebt es nicht.

(ε) Die Stammgleichung ist: $y(1 - y^2)^{1/2} + arc\,sin\,y = 2\,x + C$. Die Linien $y = \pm 1$ sind der Ort der Spitzen.

(ζ) Die allgemeine Lösung ist: $x^2 + y^2 - 2\,Cxy = 1 - C^2$. Singuläre Lösungen sind $x = \pm 1$ und $y = \pm 1$.

(η) Die allgemeine Lösung ist: $(bx - C)^2 + (ay - C)^2 = c^2$. Dieselbe stellt eine Schaar einander congruenter Ellipsen dar, deren Hauptachsen den Coordinatenachsen parallel gehen und deren Mittelpunkte auf der Geraden $bx - ay = 0$ liegen. Letztere ist zugleich der Ort der Berührungspunkte. Die beiden Geraden $bx - ay = \pm 2^{1/2} c$ stellen die Enveloppe der Ellipsenschaar und zugleich die singuläre Lösung der gegebenen Gleichung dar.

Vermischte Aufgaben.

1. (1) $arc\,tang\,\dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{2}\,log\,(x^2 + y^2) = C.$

(2) $(x^2 y)^a = C e^y$.

(3) Setzt man $y = x^2 u$, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{(1+u)^{1/2} - 2u}.$$

(4) Man löse nach y auf und differentiire nach x. Die Stammgleichung erhält man dann durch Elimination von p aus $my - nxp = yp^2$ und $Cx^{2(m-n)} = p^{2n}(p^2 - m)^{2(m-n)}(p^2 - m + n)^{n-2m}$.

(5) Man setze $y = \frac{1}{z}$. Allgemeine Lösung: $\frac{1}{y} = Cx - C^3$, singuläre Lösung: $\left(\frac{x}{3}\right)^3 (2y)^2 = 1$.

(6) Setzt man $p = xu$, so erhält man $x = \frac{au}{1+u^3}$, also $p = \frac{au^2}{1+u^3}$. Ferner ist $p = \frac{du}{dx}\frac{dy}{du} = \frac{(1+u^3)^2}{a(1-2u^3)}\frac{dy}{du}$, somit $\frac{dy}{du} = a^2 \frac{(1-2u^3)u^2}{(1+u^3)^3}$, und hieraus folgt: $y + C = \frac{a^2}{6}\frac{1+4u^3}{(1+u^3)^2}$. Eliminirt man hieraus und aus $x = \frac{au}{1+u^3}$ die Grösse u, so erhält man die Stammgleichung der gegebenen Differentialgleichung. Die gerade Linie $x = \frac{4^{1/3}}{3} a$ bildet den Ort der Spitzen.

(7) Man setze $y = \frac{u}{x}$ und differentiire dann nach x. Die allgemeine Lösung ist $C^2 x - Cxy + a^3 = 0$, die singuläre: $xy^2 = 4a^3$

(8) Man löse nach p auf und betrachte dann x als die abhängige Veränderliche. Nach §. 15 findet man:

$$y^2 = Cx + \frac{a}{n+2} xy^{n+2}.$$

(9) Man löse nach p auf. $C = y(1 \pm \cos x)$.

(10) Man bemerke, dass die Differentiation der beiden Gleichungen $y - 2xp = C_1$ und $xp^2 = C$ zu derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung führt. Es sind daher jene beiden Gleichungen erste Integrale dieser letzteren, deren Stammgleichung erhalten wird durch Elimination von p aus jenen beiden. Da die gegebene Differentialgleichung zwischen den Constanten C_1 und C die Beziehung $C_1 = f(C)$ ergiebt, so findet man als Stammgleichung derselben: $\{y - f(C)\}^2 = 4Cx$.

(11) Dieselbe Bemerkung wie in der vorigen Aufgabe führt zu $\{x^2 - f(C)\}\, C + y^2 f(C) = 0$.

(12) Man schreibe die Gleichung zunächst in der Form $(1-p)^2 - p^2 e^{-2x} = e^{-2y}$, nehme dann beiderseits den Logarithmus und differentiire nach x. Dadurch findet man:

$$\left\{\frac{dp}{dx} - p(1-p)\right\} (1 - p + p\, e^{-2x}) = 0$$

und hieraus als allgemeine Lösung: $(1 - C^2)\, e^{2y} = (Ce^x + 1)^2$ und als singuläre Lösung: $e^{2x} + e^{2y} = 1$.

(13) Setzt man $y = xu$, so wird

$$\frac{du}{(u^2+n)^{1/2}} = \pm \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} \frac{dx}{x},$$

daher $y + (y^2 + n x^2)^{1/2} = C x^{1 \pm \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2}}$

(14) Bringt man die Glieder rechts vom Gleichheitszeichen auf die linke Seite, so ist der Ausdruck auf der letzteren ein exacter Differentialquotient, daher $y + 2y^3 - \frac{3}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{3} x^3 = C$.

(15) Man schreibe die Gleichung in der Form

$$a \frac{dx}{x} + b \frac{dy}{y} = x^m y^n \left(c \frac{dx}{x} + e \frac{dy}{y}\right)$$

und setze $x^a y^b = u$, $x^c y^e = v$ und $\frac{em - cn}{bc - ae} = \alpha$, $\frac{bm - an}{bc - ae} = \beta$; dann wird $u^{\alpha-1}\, du = v^{\beta-1}\, dv$, somit $\frac{u^\alpha}{\alpha} - \frac{v^\beta}{\beta} = C$ oder

$$\frac{(x^a y^b)^\alpha}{\alpha} - \frac{(x^c y^e)^\beta}{\beta} = C.$$

(16) Man setze $x^2 + y^2 = 2u$. Dann wird: $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2 (x^2 - y^2) = C$.

(17) Man setze $y = xu$. Allgemeine Lösung: $(y^2 - Cx^2)^2 - 2(y^2 + Cx^2) + 4Cy^2 + 1 = 0$. Singuläre Lösung: $y = \pm x$.

(18) Bei Gleichungen von der Form

$$xp - y = (1 + p^2)^{1/2} f(x^2 + y^2)$$

setze man $x = r \cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$; man erhält dann:

$\varphi + \alpha = \int \frac{dr}{r\left\{\left(\frac{r}{f(r^2)}\right)^2 - 1\right\}^{1/2}}$, wo α die willkürliche Constante ist. In der vorliegenden Aufgabe hat man daher:

$$\varphi + \alpha = a^{1/2} \int \frac{dr}{\{r(1 - ar)\}^{1/2}},$$

also: $2ar = 1 + \sin(\varphi + \alpha)$.

(19) Man setze $x = a \operatorname{tang} \varphi$. Es folgt:

$$y \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + a \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = C.$$

(20) Siehe (18).

(21) $xy \cos \frac{y}{x} = C$.

(22) Nachdem man den Factor $xy + 1$ weggehoben, setze man $xy = u$. Man erhält dann $Cy^2 = e^{xy - \frac{1}{xy}}$.

(23) Für $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ geht die Gleichung über in: $\cot \frac{\varphi + \alpha}{2} \, d\varphi = \frac{dr}{r}$, aus welcher folgt:

$r = C \sin^2 \frac{\varphi + \alpha}{2}$, oder: $C(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)^{1/2} - x \cos \alpha - y \sin \alpha$.

2. Die Relation zwischen den Coefficienten zeigt, dass u der Differentialgleichung $2(1 - x) \frac{du}{dx} = (2 - x^2) u$ genügt, deren vollständiges Integral $C + \log\{u(1 - x)^{1/2}\} = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} x^2$ ist. Entwickelt man hiernach u in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe, so folgt aus der Vergleichung der von x unabhängigen Glieder in beiden Reihen, dass $C = 0$ ist.

3. Die linke Seite ist der exacte Differentialquotient von $\frac{1}{2}(\vartheta + \varphi) + \frac{1}{4}(\sin 2\vartheta + \sin 2\varphi) - \sin \alpha \sin \vartheta \sin \varphi$. Die Lösung ist demnach:

$$C + \frac{\vartheta + \varphi}{2} + \frac{1}{4}(\sin 2\vartheta + \sin 2\varphi) - \sin \alpha \sin \vartheta \sin \varphi.$$

Für $\vartheta = 0$, $\varphi = \alpha$ wird $C = -\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\alpha$;

ferner ist für beliebige Winkel ϑ und φ:

$$\sin 2\vartheta + \sin 2\varphi = \sin 2(\vartheta + \varphi) + 4 \sin\vartheta \sin\varphi \sin(\vartheta + \varphi).$$

Daher:

$$\frac{\vartheta + \varphi - \alpha}{2} + \frac{1}{4}\{\sin 2(\vartheta + \varphi) - \sin 2\alpha\} + \sin\vartheta \sin\varphi \{\sin(\vartheta + \varphi) - \sin\alpha\} = 0,$$

und diese Gleichung wird befriedigt durch $\vartheta + \varphi = \alpha$.

4. Die Gleichung lässt sich schreiben: $\frac{y(c+nx)}{y+a+bx+nx^2} = \frac{dy}{dx}$ daher ist $\frac{dy}{dx} = u$. Berechnet man dann $\frac{dy}{dx}$ auch aus der gegebenen Substitution und setzt den so erhaltenen Werth gleich u, so folgt: $\frac{du}{\{c^2 - bc + na + (b-2c)u + u^2\}u} = \frac{dx}{(a+bx+nx^2)(c+nx)}$. Für $u = c + nv$ wird hieraus: $\frac{dv}{\varphi(v)} = \frac{dx}{\varphi(x)}$, wobei man hat: $\varphi(x) = (a + bx + nx^2)(c + nx)$. (Euler, Inst. calc. int. I, 345.)

5. Man setze $x^2 = s$, $y^2 = t$, so ergiebt sich:

$t = sq - b\frac{q}{1+aq}$, wo $q = \frac{dt}{ds}$ ist. Hieraus folgt als allgemeine Lösung: $y^2 - Cx^2 = -\frac{bC}{1+aC}$. Ist a negativ und gleich $-m^2$, so giebt es eine reelle Enveloppe, nämlich das System der vier Geraden $x \pm my = \pm b^{1/2}$.

Die zweite Gleichung hat zur allgemeinen Lösung $y = Cx + \frac{(\alpha+\beta)C}{\alpha C - \beta}$, zur singulären Lösung: $(\alpha y - \beta x)^2 - 2(\alpha + \beta)(\alpha y + \beta x) + (\alpha + \beta)^2 = 0$.

6. Aus der Gleichung $\frac{dy_2}{dx} + Py_2 = Q$ folgt, wenn man darin $y_2 = y_1 z$ setzt und beachtet, dass auch $\frac{dy_1}{dx} + Py_1 = Q$ ist, $\frac{dz}{z-1} = -\frac{Q}{y_1}dx$, folglich: $z = 1 + a e^{-\int \frac{Q}{y_1}dx}$

7. Für $k = \frac{b^2}{a^2}$ erhält man zwischen u und v die Gleichung: $\frac{dv}{v} = \frac{(a^2+b^2)u\,du}{(a^2+b^2)u^2 + a^4}$, also: $(a^2 + b^2)u^2 + a^4 = Cv^2$, oder mit

Veränderung der willkürlichen Constanten: $(x+y)^2+a^2+b^2 = C'(b^2x-a^2y)^2$. — Man könnte die gegebene Gleichung auch direct nach der Methode integriren, die bei der 5. Aufgabe des §. 16 angewendet wurde, indem man $P=a^2$, $R=b^2$ und $Q=x+y$ setzt.

8. Sollen zwei Differentialgleichungen erster Ordnung mit je einer willkürlichen Constanten aus einer gemeinschaftlichen Stammgleichung ableitbar sein, so müssen sie, nachdem sie auf die Form $a=f(x,y,p)$, $b=f_1(x,y,p)$ gebracht sind, durch nochmalige Differentiation nach x zu derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung führen. Die gemeinsame Stammgleichung ergiebt sich dann durch Elimination von p aus den ursprünglichen Gleichungen. So führt das erste Paar der angeführten Gleichungen zu der Gleichung zweiter Ordnung: $(1+xy)\frac{dp}{dx}=2p(xp-y)$, das zweite zu $\frac{dp}{dx}+(1+p^2)^{-3/2}=0$, und ihre Stammgleichungen sind respective: $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+1=xy$ und $(x-a)^2+(y-b)^2=1$. Das dritte Paar hat dagegen keine gemeinschaftliche Stammgleichung.

9. Man kann der Gleichung die Form geben: $\dfrac{a\dfrac{dx}{x^2}+b\dfrac{dy}{y^2}}{\left(\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}\right)^3}$ $+xdx+ydy=0$, aus der man erkennt, dass die linke Seite ein exactes Differential ist. Man erhält daher:

$$(ay+bx)^2(x^2+y^2-C)+x^2y^2=0.$$

Nimmt man bei der zweiten Aufgabe den einen Punkt als Coordinatenanfangspunkt, die Richtung der Tangente in ihm als x-Achse und bezeichnet man die Coordinaten und den Werth von $\frac{dy}{dx}$ in den beiden anderen Punkten respective mit x, y, p und x_1, y_1, p_1, so findet man die Gleichung: $p_1^2(y-px)^2-2pp_1(y-px)(y_1-p_1x_1)+p^2(y_1-p_1x_1)^2 =(p-p_1)^2(y-px)(y_1-p_1x_1)$ oder: $\frac{p_1(y-px)}{p(y_1-p_1x_1)}+\frac{p(y_1-p_1x_1)}{p_1(y-px)} =\frac{p}{p_1}+\frac{p_1}{p}$. Hieraus folgt entweder: $\frac{p_1(y-px)}{p(y_1-p_1x_1)}=\frac{p_1}{p}$ oder: $\frac{p_1(y-px)}{p(y_1-p_1x_1)}=\frac{p}{p_1}$. Die erste Annahme führt zu $y-px=C$,

welche Gleichung eine gerade Linie ergiebt; nach der zweiten Annahme wird: $\frac{y - px}{y_1 - p_1 x_1} = \frac{p^2}{p_1^2}$, und hieraus folgt: $y - px = Cp^2$. Die singuläre Lösung $x^2 + 4\,Cy = 0$ ergiebt die Parabel als die gesuchte Curve.

10. Es ist die Gleichung der Curven: $x(1+x^2)^{1/2} + y(1+y^2)^{1/2} + 2nxy + \log\{(1+x^2)^{1/2} + x\}\{(1+y^2)^{1/2} + y\} = C$. Damit die Curve durch den Punkt $x = 0$, $y = n$ gehe, muss $C = n(1+n^2)^{1/2} + \log\{(1+n^2)^{1/2} + n\}$ sein, daher: $\log\{(1+x^2)^{1/2} + x\}\{(1+y^2)^{1/2} + y\} \times \{(1+n^2)^{1/2} - n\} + x(1+x^2)^{1/2} + y(1+y^2)^{1/2} - n(1+n^2)^{1/2} + 2nxy = 0$. Setzt man: $2x = e^u - e^{-u}$, $2y = e^v - e^{-v}$, $2n = e^\alpha - e^{-\alpha}$, so geht die Gleichung über in: $u + v - \alpha + \frac{1}{4}\{e^{2u} - e^{-2u} + e^{2v} - e^{-2v} - (e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}) + (e^u - e^{-u})(e^v - e^{-v})(e^\alpha - e^{-\alpha})\} = 0$. Setzt man zur Abkürzung: $u + v + \alpha = 2s$, $u + v - \alpha = 2\delta$, so hat man identisch: $e^{2u} - e^{-2u} + e^{2v} - e^{-2v} - (e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}) = (e^{2s} + e^{-2s})(e^{2\delta} - e^{-2\delta}) - (e^u - e^{-u}) \times (e^v - e^{-v})(e^{u+v} - e^{-u-v})$, somit: $2\delta + \frac{1}{4}(e^\delta - e^{-\delta})\{(e^{2s} + e^{-2s}) \times (e^\delta + e^{-\delta}) - (e^u - e^{-u})(e^v - e^{-v})(e^s + e^{-s})\} = 0$, oder:

$$2\delta\left[1 + \frac{e^\delta - e^{-\delta}}{8\delta}\{(e^{2s} + e^{-2s})(e^\delta + e^{-\delta}) - (e^u - e^{-u})(e^v - e^{-v})(e^s + e^{-s})\}\right] = 0.$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer behält für $\delta = 0$ einen endlichen Werth; demnach genügt $\delta = 0$ dieser Gleichung, oder es stellt $\delta = 0$, d. i. $u + v - \alpha = 0$, einen Theil der durch den Punkt $x = 0$, $y = n$ gehenden Curve dar. In x und y ausgedrückt, lautet die Gleichung dieses Curventheils: $x^2 + y^2 + 2xy(1+n^2)^{1/2} = n^2$.

11. Führt man an Stelle von x und y die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 der in λ quadratischen Gleichung $\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1$ als neue Veränderliche ein, so geht die Differentialgleichung über in: $\frac{a+b}{2ab}(d\lambda_1 + d\lambda_2) = \frac{\lambda_2\, d\lambda_1 + \lambda_1\, d\lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2}$, deren Lösung ist:

$$\lambda_1 \lambda_2 = C e^{\frac{a+b}{2ab}(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

Nun ist aber $\lambda_1 + \lambda_2 = a + b - x^2 - y^2$, $\lambda_1 \lambda_2 = ab - bx^2 - ay^2$, daher mit Veränderung der willkürlichen Constanten: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 1 = C' e^{-\frac{a+b}{2ab}(x^2+y^2)}$. Somit ist $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ eine particuläre Lösung.

12. Setzt man $xy = u$ und $\frac{du}{dx} = q$, so wird $2x^3q^3 = uxq - u^2$. Berechnet man hieraus u, differentiirt dann nach x und setzt $xq = v$, so erhält man die Gleichung: $2\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v} + \frac{1 - 12v}{(1-8v)^{1/2}}dv$, aus welcher folgt: $q\frac{(1 - 8xq)^{1/2} - 1}{(1 - 8xq)^{1/2} + 1}e^{3(1-8xq)^{1/2}} = Cx$. Durch Elimination von q aus dieser Gleichung und aus $2xq^3 = yq - y^2$ findet man die Stammgleichung der gegebenen Differentialgleichung. Für $C = 0$ wird $q = 0$, also auch $y = 0$. Daher ist y eine particuläre Lösung. (Ueber die Kriterien, nach denen man entscheiden kann, ob eine Lösung singulär oder particulär ist, vergl. Boole, A Treatise on Differential Equations, 4. Aufl., S. 139 und Supplement, S. 9.)

13. Die Stammgleichung von $p^3 + \mu p^2 = a(y + \mu x)$ folgt durch Elimination von p aus dieser und der folgenden Gleichung: $2ax + C = 3p^2 - 2\mu p + 2\mu^2 \log(p + \mu)$. Eine singuläre Lösung giebt es nicht; $y + \mu x = 0$ ist eine particuläre Lösung.

Allgemeine Lösung von $a^2yp^2 - 8xp + 4y = 0$ ist: $y^2 = C(4x - a^2C)$, singuläre Lösung: $2x = \pm ay$.

Allgemeine Lösung von $xp^2 - 2yp + x + 2y = 0$ ist: $C^2x^2 + 2C(x - y) + 2 = 0$, singuläre Lösung: $x = (1 \pm 2^{1/2})y$.

14. Allgemeine Lösung von $y(1+p^2) = 2xp$ ist: $y^2 = 4C(x - C)$, singuläre: $x \pm y = 0$.

Allgemeine Lösung von $p^2 = (4y + 1)(p - y)$ ist: $y = C^2e^{2x} - Ce^x$, singuläre: $4y + 1 = 0$.

15. Als Stammgleichung findet man: $a^2C^2 - 12aCxy + 8Cy^3 + 16ax^3 - 12x^2y^2 = 0$. Als Bedingung dafür, dass C gleiche Werthe annehme, folgt hieraus: $(y^2 - ax)^3 = 0$, während die, dass p gleiche Werthe erhalte, $y^2 - ax = 0$ ist. Jedoch ist $y^2 - ax = 0$ keine singuläre Lösung, sondern ein Ort der Berührungspunkte.

16. Man setze $x + y = u$, $xy = v$. Als allgemeine Lösung findet man: $C^2 + C(x+y) + 1 - xy = 0$, als singuläre: $x^2 + 6xy + y^2 = 4$. Erstere stellt ein System gleichseitiger Hyperbeln dar, deren Asymptoten den Coordinatenachsen parallel gehen und deren Mittelpunkte auf der Geraden $x - y = 0$ liegen, welche zugleich der Ort der Berührungspunkte ist. Für dieses System ist die Hyperbel $x^2 + 6xy + y^2 = 4$ die Enveloppe.

17. Um die Stammgleichung zu erhalten, setze man $y = xu$ und löse nach $x \frac{du}{dx}$ auf. Die Bedingung, dass p gleiche Werthe annehme, ist $4x^2 - a^2y^2 = 0$, die, dass C gleiche Werthe erhalte, $(4x^2 - a^2y^2)^3 = 0$. Jedoch stellt $2x = \pm ay$ keine singuläre Lösung, sondern den Ort der Berührungspunkte dar.

18. Cayley zeigt zunächst, dass jedes System von algebraischen Curven eine Enveloppe hat. Ist $f(x, y, C)$ eine rationale ganze Function von x und y vom $m$ten Grade mit einem veränderlichen Parameter C, so stellt $f(x, y, C) = 0$ ein System algebraischer Curven von der $m$ten Ordnung dar. Bezeichnet dann δ die Anzahl der Knotenpunkte, $\varkappa$ die Anzahl der Spitzen, ferner n die Classe und ι resp. τ die Anzahl der Wende- und Doppeltangenten jeder Curve des Systems, so haben je zwei auf einander folgende Curven, welche den Parameterwerthen C und $C + dC$ entsprechen, $m^2 - 2\delta - 3\varkappa$ Punkte und $n^2 - 2\tau - 3\iota$ Tangenten mit einander gemeinschaftlich, wobei $m^2 - 2\delta - 3\varkappa = n^2 - 2\tau - 3\iota$ ist, und zwar liegen die Berührungspunkte der Tangenten unendlich nahe den gemeinsamen Schnittpunkten. Da nun $m^2 - 2\delta - 3\varkappa = m + n$ ist und $m + n$ nicht gleich Null sein kann, so hat das System der durch $f(x, y, C) = 0$ dargestellten Curven eine Enveloppe, welche der geometrische Ort der $m^2 - 2\delta - 3\varkappa$ Schnittpunkte je zweier auf einander folgender Curven des Systems ist. — Diese Enveloppe kann natürlich reell oder imaginär sein, immer aber genügt ihre Gleichung derjenigen Differentialgleichung, welche man aus $f(x, y, C) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$ durch Elimination von C erhalten kann, und zwar ist sie eine singuläre Lösung derselben. Besitzt daher die Differentialgleichung $Lp^2 + 2Mp + N = 0$ keine singuläre Lösung, so folgt daraus, dass sie im Allgemeinen kein Integral besitzt, welches ein System algebraischer Curven darstellt. (Cayley, Mess. of Math. Vol. VI, p. 23.)

III. Capitel.

§. 35.

Aufgabe. Es wird

$$y = \frac{1}{(D + k)^2} x^2 V = e^{ax} \frac{1}{(D + a + k)^2} \{e^{-ax} x^2 V\}$$

(nach Zusatz zu §. 33), also, wenn $k + a = 0$ ist:

$$y = e^{-kx} \frac{1}{D^2} (x^2 e^{kx} V).$$

Die Anwendung der Formel in §. 35 auf $u = x^2$, $v = e^{kx} V$ ergiebt sodann die Gleichung des Textes.

§. 36.

Aufgabe. Aus Satz I. §. 36 folgt: $x^m = \frac{F(xD)x^m}{F(m)}$ für jeden Werth von m; daher $A + Bx + Cx^2 + \cdots =$

$$\frac{F(xD)Ax^0}{F(0)} + \frac{F(xD)Bx}{F(1)} + \frac{F(xD)Cx^2}{F(2)} + \cdots.$$

Folglich: $\frac{1}{F(xD)} U = \frac{A}{F(0)} + \frac{B}{F(1)} x + \frac{C}{F(2)} x^2 + \cdots$

§. 41.

Aufgabe. Es seien Y_1, Y_2, ..., Y_m die m gegebenen linear von einander unabhängigen particulären Integrale der Hülfsgleichung $\Phi(D) Y = 0$. Durch die Substitution $y = Y_1 \int z\,dx$ wird dann, wie bewiesen, die Gleichung n ter Ordnung $\Phi(D) y = V$ übergeführt in eine Gleichung $(n-1)$ter Ordnung $\Phi_1(D) z = V_1$, deren Coefficienten sich aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung $\Phi(D) y = V$ und aus dem particulären Integral Y_1 zusammensetzen und daher als bekannt zu betrachten sind. Dabei ist $\Phi(D) y = Y_1 \Phi_1(D) z$. Setzt man daher für y irgend einen der Werthe, welche die Gleichung $\Phi(D) Y = 0$ erfüllen, so wird der entsprechende Werth $Z = \frac{d}{dx} \frac{Y}{Y_1}$ die Gleichung $\Phi_1(D) Z = 0$ befriedigen, und somit sind $Z_1 = \frac{d}{dx} \frac{Y_2}{Y_1}$, $Z_2 = \frac{d}{dx} \frac{Y_3}{Y_1}$, $\cdots$, $Z_{m-1} = \frac{d}{dx} \frac{Y_m}{Y_1}$ $m-1$ particuläre Integrale der Differentialgleichung $\Phi_1(D) Z = 0$, die, wie man leicht zeigt, ebenfalls von einander linear unabhängig sind. Mit Hülfe eines dieser $m-1$ particulären Integrale von $\Phi_1(D) Z = 0$ kann man ebenso wie vorher die Gleichung $\Phi_1(D) z = V_1$ auf eine analoge Gleichung $(n-2)$ter Ordnung $\Phi_2(D) u = V_2$ zurückführen, für welche man $m-2$ particuläre Integrale der Gleichung $\Phi_2(D) U = 0$ kennt u. s. f., bis man zu einer linearen Gleichung $(n-m)$ter Ordnung gelangt,

deren Coefficienten sich aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung und den m particulären Integralen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ zusammensetzen.

§. 45.

7. Aufgabe. Ist allgemein

$$(a+bx)^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 (a+bx)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots$$
$$+ A_{n-1}(a+bx)\frac{dy}{dx} + A_n y = 0$$

und setzt man $y = (a+bx)^\lambda$, so folgt zur Bestimmung von λ die Gleichung: $[\lambda]_n b^n + [\lambda]_{n-1} b^{n-1} A_1 + \cdots + \lambda b A_{n-1} + A_n = 0$, wo $[\lambda]_\varkappa = \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-\varkappa+1)$ ist. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die Wurzeln dieser Gleichung, so stellt

$$y = C_1 (a+bx)^{\lambda_1} + C_2 (a+bx)^{\lambda_2} + \cdots + C_n (a+bx)^{\lambda_n}$$

das vollständige Integral der gegebenen Gleichung dar. Sind zwei Wurzeln λ_1 und λ_2 einander gleich und bezeichnet man den entsprechenden Theil von y mit $C_1 \varphi(\lambda_1) + C_2 \varphi(\lambda_2)$ und mit ε eine der Null sich nähernde Grösse, so wird derselbe, wenn wir $\lambda_2 = \lambda_1 + \varepsilon$ setzen: $C_1 \varphi(\lambda_1) + C_2 \{\varphi(\lambda_1) + \varepsilon \varphi'(\lambda_1 + \vartheta_\varepsilon)\}$ oder $C' \varphi(\lambda_1) + C'' \varphi'(\lambda_1 + \vartheta_\varepsilon)$, wo ϑ_ε eine mit ε zugleich verschwindende Grösse ist. Da nun $\varphi'(\lambda) = (a+bx)^\lambda \log(a+bx)$ ist, so wird, wenn man zur Grenze übergeht, das Integral im Falle zweier gleichen Wurzeln:

$$y = (a+bx)^{\lambda_1}\{C' + C'' \log(a+bx)\} + C_3 (a+bx)^{\lambda_3} + \cdots$$
$$+ C_n (a+bx)^{\lambda_n},$$

und allgemein bei $\varkappa$ gleichen Wurzeln:

$$y = (a+bx)^{\lambda_1}\{C' + C'' \log(a+bx) + C''' (\log[a+bx])^2 + \cdots$$
$$+ C^{(\varkappa)} (\log[a+bx])^{\varkappa-1}\} + C_{\varkappa+1} (a+bx)^{\lambda_{\varkappa+1}} + \cdots + C_n (a+bx)^{\lambda_n}.$$

Sind zwei Wurzeln conjugirt imaginär, z. B. $\lambda_1 = \mu + \nu i$, $\lambda_2 = \mu - \nu i$, so ist der entsprechende Theil von y, wie leicht zu sehen, gleich $(a+bx)^\mu \{C_1 \cos[\log(a+bx)^\nu] + C_2 \sin[\log(a+bx)^\nu]\}$.

8. Aufgabe.

(1) $y = C_1 \cos(2^{1/2} x + \alpha) + C_2 \cos(3^{1/2} x + \beta)$.

(2) $y = C_1 e^{\frac{ax}{2^{1/2}}} \cos\left(\frac{ax}{2^{1/2}} + \alpha\right) + C_2 e^{-\frac{ax}{2^{1/2}}} \cos\left(\frac{ax}{2^{1/2}} + \beta\right)$.

(3) $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 e^{\frac{1}{2}ax} \cos\left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2} ax + \alpha\right)$

$+ C_4 e^{-\frac{1}{2}ax} \cos\left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2} ax + \beta\right).$

(4) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos(x + \alpha)$

$+ C_4 e^{2^{-\frac{1}{2}}x} \cos\left(\frac{x}{2^{\frac{1}{2}}} + \beta\right) + C_5 e^{-2^{-\frac{1}{2}}x} \cos\left(\frac{x}{2^{\frac{1}{2}}} + \gamma\right).$

(5) $y = \frac{1}{x}(C_1 + C_2 \log x).$

(6) $y = C_1 (1 + x)^2 + C_2 \cos\{\log(1 + x)^2\}$

$+ C_3 \sin\{\log(1 + x)^2\}.$

§. 46.

I. **4. Aufgabe.**

(1) $y = e^{-\frac{1}{2}x}\left\{(C_1 + C_2 x) \cos\frac{3^{\frac{1}{2}}x}{2} + (C_3 + C_4 x) \sin\frac{3^{\frac{1}{2}}x}{2}\right\}$

$+ x^2 - 3x + 1.$

(2) $y = C_1 e^{-3x} + e^x (C_2 \sin 2x + C_3 \cos 2x)$

$+ \frac{x^2}{15} + \frac{2x}{15^2} - \frac{28}{15^3}.$

II. **3. Aufgabe.**

(1) $y = e^{ax}\left(C_1 + C_2 x + \cdots + C_n x^{n-1} + \frac{x^n}{n!}\right).$

(2) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} + \frac{1}{3} e^x - \frac{x}{2} e^{2x}.$

4. Aufgabe.

$$y = x\left\{\frac{e^{a_1 x}}{f'(a_1)} + \frac{e^{a_2 x}}{f'(a_2)} + \cdots + \frac{e^{a_n x}}{f'(a_n)}\right\}.$$

Ist $a_1 = a_2$, also die gegebene Gleichung: $f(D) y = 2 e^{a_1 x} + e^{a_3 x} + \cdots + e^{a_n x}$, so beginnt die Entwickelung von $f(D + a_1)$ mit $f''(a_1)\frac{D^2}{2}$, während die von $f(D + a_\varkappa)$ für $\varkappa = 3, \ldots, n$ wie vorher mit $f'(a_\varkappa) D$ beginnt. Demnach ist dann:

$$y = x\left\{2x \frac{e^{a_1 x}}{f''(a_1)} + \frac{e^{a_3 x}}{f'(a_3)} + \cdots + \frac{e^{a_n x}}{f'(a_n)}\right\}.$$

7. Aufgabe.

$$(1)\quad y = e^{-\frac{1}{2}x}\left\{(C_1 + C_2 x)\cos\frac{3^{\frac{1}{2}}x}{2} + (C_3 + C_4 x)\sin\frac{3^{\frac{1}{2}}x}{2}\right\} + \frac{1}{9}e^x(x-2).$$

$$(2)\quad y = (C_1 + C_2 x)e^x + (C_3 + C_4 x)e^{-x} + (C_5 + C_6 x)\cos x + (C_7 + C_8 x)\sin x + e^x\left(\frac{x^6}{480} - \frac{3x^5}{80} + \frac{19x^4}{64} - \frac{5x^3}{4} + \frac{171x^2}{64}\right).$$

III. **4. Aufgabe.**

(1) $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{\sin nx}{n^2-1}$. Ist $n = 1$, so setze man $C_2 = C' + \frac{1}{n^2-1}$, demnach:

$$y = C_1\cos x + C'\sin x + \frac{\sin x - \sin nx}{n^2-1},$$

somit in der Grenze: $y = C_1\cos x + C'\sin x - \frac{1}{2}x\cos x$.

$$(2)\quad y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{3^{\frac{1}{2}}x}{2} + C_2\sin\frac{3^{\frac{1}{2}}x}{2}\right) - \frac{2}{13}\cos 2x - \frac{3}{13}\sin 2x.$$

$$(3)\quad y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{3^{\frac{1}{2}}x}{2} + C_2\sin\frac{3^{\frac{1}{2}}x}{2}\right) - \frac{2}{3^{\frac{1}{2}}}\,x e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{3^{\frac{1}{2}}x}{2}.$$

$$(4)\quad y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x + \left(\frac{x^2}{(1-a^2)^2} - \frac{4+20a^2}{(1-a^2)^4}\right)\cos ax + \frac{8ax}{(1-a^2)^3}\sin ax.$$

Für $a = 1$: $y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x + \left(\frac{3x^2}{16} - \frac{x^4}{48}\right)\cos x + \frac{x^3}{12}\sin x.$

$$(5)\quad y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{x}{8} - \frac{x}{32}\cos 2x - \frac{x^2}{16}\sin 2x.$$

(6) Hat das vorgesetzte $\mathfrak{R}$ dieselbe Bedeutung wie Seite 73, so ist das particuläre Integral:

$$y = \Re\left[\frac{i^r}{(2m)^r}\left\{\left(\frac{2}{(r+2)!}(1-x)^{r+2} - \frac{r(r+1)}{4m^2.r!}(1-x)^r\right)\cos mx \right.\right.$$
$$\left. + \frac{r}{m.(r+1)!}(1-x)^{r+1}\sin mx\right\}$$
$$+ \frac{i^{r+1}}{(2m)^r}\left\{\left(\frac{2}{(r+2)!}(1-x)^{r+2} - \frac{r(r+1)}{4m^2.r!}(1-x)^r\right)\sin mx\right.$$
$$\left.\left. - \frac{r}{m.(r+1)!}(1-x)^{r+1}\cos mx\right\}\right].$$

Je nachdem r gerade oder ungerade ist, ist der reelle Theil dieses Ausdrucks gleich der ersten oder zweiten Zeile. Die Complementärfunction lautet: $(C_1 + C_2 x + \cdots + C_r x^{r-1})\cos mx + (C' + C'' x + \cdots + C^{(r)} x^{r-1})\sin mx$.

(7) $$y = e^x\{(C_1 + C_2 x)\cos(3^{1/2}x) + (C_3 + C_4 x)\sin(3^{1/2}x)\}$$
$$+ e^x\left\{\frac{x^2}{24.3^{1/2}}\sin(3^{1/2}x + \alpha) - \frac{x^3}{72}\cos(3^{1/2}x + \alpha)\right\}.$$

(8) $$y = C_1 e^{-\frac{\varkappa-\lambda}{2}x} + C_2 e^{-\frac{\varkappa+\lambda}{2}x} + \frac{E}{(n^2-p^2)^2 + \varkappa^2 p^2} \times$$
$$\{(n^2-p^2)\cos px + \varkappa p \sin px\}, \text{ wo } \lambda = (\varkappa^2 - 4n^2)^{1/2}.$$

(9) $$y = C_1 e^{-2x} + e^x(C_2\cos x + C_3 \sin x)$$
$$+ \frac{1}{20} x e^x (3\sin x - \cos x).$$

(10) Statt $\varrho^{\mu x}$ schreibe man $e^{\mu x \log \varrho}$. Als vollständiges Integral erhält man:

$$y = C_1 \cos\left(\frac{nx}{2^{1/2}} + \alpha\right) e^{\frac{nx}{2^{1/2}}} + C_2\cos\left(\frac{nx}{2^{1/2}} + \beta\right) e^{-\frac{nx}{2^{1/2}}} + \frac{\sin \lambda x}{\lambda^4 + n^4}$$
$$+ \frac{\varrho^{\mu x}}{(\mu \log \varrho)^4 + n^4} + \frac{x^5}{n^4} - \frac{120x}{n^8}.$$

(11) $$y = C_1\cos(mx + \alpha) + C_2\cos(nx + \beta) + \frac{x\sin mx}{4m(n^2-m^2)}$$
$$+ \frac{x \sin nx}{4n(m^2 - n^2)}.$$

(12) $$y = C_1\cos(x + \alpha) + C_2 e^{1/2 . 3^{1/2} x}\cos\left(\frac{x}{2} + \beta\right)$$
$$+ C_3 e^{-1/2 . 3^{1/2} x}\cos\left(\frac{x}{2} + \gamma\right) + \frac{1}{12} x \sin x + \frac{1}{126}\cos 2x.$$

V. **4. Aufgabe.**

(1) $a \gtrless n$: $y = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx$

$$+\left(\frac{x^2}{n^2-a^2} - \frac{2n^2+6a^2}{(n^2-a^2)^3}\right)\cos ax + \frac{4ax}{(n^2-a^2)^2}\sin ax.$$

$a = n$: $y = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx$

$$+\left(\frac{x^3}{6n} - \frac{x}{4n^3}\right)\sin nx + \frac{x^2}{4n^2}\cos nx.$$

(2) $$y = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx} + \frac{1}{2n}\int^x U_\xi\, e^{n(x-\xi)}\, d\xi$$
$$- \frac{1}{2n}\int^x U_\xi\, e^{-n(x-\xi)}\, d\xi.$$

(3) Wendet man hierauf die soeben in (2) erhaltene Formel an, so ist $n = \sqrt{2}$ und $U_\xi = 4\xi^2 e^{\xi^2}$ zu setzen, also: $y = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} + \sqrt{2}e^{x\sqrt{2}}\int_0^x \xi^2 e^{\xi^2-\xi\sqrt{2}} d\xi - \sqrt{2}e^{-x\sqrt{2}}\int_0^x \xi^2 e^{\xi^2+\xi\sqrt{2}} d\xi$. Setzt man in dem ersten Integrale $\xi = u + \frac{1}{\sqrt{2}}$, im zweiten $\xi = v - \frac{1}{\sqrt{2}}$, so folgt:

$$y = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} + \sqrt{2}e^{x\sqrt{2}-1/2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(u^2 + u\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)e^{u^2}\, du$$
$$-\sqrt{2}\, e^{-x\sqrt{2}-1/2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(v^2 - v\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)e^{v^2}\, dv.$$

Die Integration lässt sich ausführen, und es ergiebt sich:

$$y = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} + e^{x^2} - \frac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{2}} + e^{-x\sqrt{2}}\right)$$
$$= C' e^{x\sqrt{2}} + C'' e^{-x\sqrt{2}} + e^{x^2}.$$

5. Aufgabe. Aus Nro. (3) der vorigen Aufgabe erhellt, dass e^{x^2} ein particuläres Integral der Gleichung $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2y = 4x^2 e^{x^2}$ ist.

Nun kann man den allgemeinen Werth von y in der vorigen Aufgabe auch schreiben:

$$y = \sqrt{2}\, e^{x\sqrt{2}} \int_{\alpha}^{x} \xi^2 e^{\xi^2 - \xi\sqrt{2}} d\xi - \sqrt{2}\, e^{-x\sqrt{2}} \int_{\beta}^{x} \xi^2 e^{\xi^2 + \xi\sqrt{2}} d\xi,$$

wo α und β willkürliche Constanten sind, die sich so bestimmen lassen müssen, dass $y = e^{x^2}$ wird. Verfährt man bei der Integration genau so wie vorher, so folgt:

$$y = e^{x^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) e^{\alpha^2 - \alpha\sqrt{2} + x\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\beta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) e^{\beta^2 + \beta\sqrt{2} - x\sqrt{2}}.$$

Setzt man also $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, so wird $y = e^{x^2}$ und somit:

$$e^{x^2} = \sqrt{2}\, e^{x\sqrt{2}} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{x} \xi^2 e^{\xi^2 - \xi\sqrt{2}} d\xi - \sqrt{2}\, e^{-x\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{x} \xi^2 e^{\xi^2 + \xi\sqrt{2}} d\xi.$$

§. 47.

Aufgabe. Sind r Wurzeln gleich $\alpha + \beta i$ und r andere gleich $\alpha - \beta i$, so erhält man nach der 7. Aufgabe in §. 45 als entsprechenden Theil der Complementärfunction:

$$x^{\alpha+\beta i}\{C_1 + C_2 \log x + C_3 (\log x)^2 + \cdots + C_r (\log x)^{r-1}\}$$
$$+ x^{\alpha-\beta i}\{C' + C'' \log x + \cdots + C^{(r)} (\log x)^{r-1}\}.$$

Setzt man nun: $x^{\pm i\beta} = e^{\pm i(\beta \log x)} = \cos(\beta \log x) \pm i \sin(\beta \log x)$ und ferner für jeden Werth von $\varkappa$: $C_\varkappa + C^{(\varkappa)} = A'_\varkappa$ und $i(C_\varkappa - C^{(\varkappa)}) = B'_\varkappa$, so erhält man den im Texte angeführten Ausdruck.

§. 48.

Aufgabe.

(1) $y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{1}{2} x.$

(2) $y = x\{C_1 \cos(\log x) + C_2 \sin(\log x)\} + x \log x.$

(3) $y = x(C_1 + C_2 \log x) + C_3 x^2 + \frac{1}{4} x^3 - \frac{3}{2} x (\log x)^2.$

(4) $y = (C_1 + C_2 \log x) \cos(\log x) + (C_3 + C_4 \log x) \sin(\log x) + (1 + \log x)^2 - 4.$

(5) $y = x^2 (C_1 + C_2 \log x) + x^2 (\log x)^2.$

(6) $y = C_1 x^{-1} + C_2 x^2 - \frac{1}{2} x - \frac{\sin x}{3x} - \frac{1}{6} \cos x + \frac{1}{6} x \sin x - \frac{1}{6} x^2 \int \frac{\cos x}{x} dx.$

(7) $y = x^m \{ C_1 \cos(n \log x) + C_2 \sin(n \log x) \} + x^m \log x.$

Vermischte Aufgaben.

1. Es seien

$$F(D)\, y = y^{(m+\varkappa)} + f_1 y^{(m+\varkappa-1)} + \cdots + f_{m+\varkappa-1} y' + f_{m+\varkappa} y = 0 \quad \text{und}$$
$$\Phi(D)\, z = z^{(m)} + \varphi_1 z^{(m-1)} + \cdots + \varphi_{m-1} z' + \varphi_m z = 0$$

die beiden gegebenen linearen Differentialgleichungen resp. von der $m + \varkappa = n$ ten und der m ten Ordnung, und es seien die sämmtlichen particulären Integrale der letzteren zugleich auch Integrale der ersteren. Ist dann y das allgemeine Integral der ersten Gleichung und z ebenso das der zweiten, so enthält z m willkürliche Constanten, während y deren $m + \varkappa$ enthalten muss, so dass y von der Form sein wird: $y = z + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_\varkappa y_\varkappa$, wo $y_1, \ldots, y_\varkappa$ die $\varkappa$ übrigen particulären Integrale von $F(D)\, y = 0$ sind. Setzt man nun: $\Phi(D)\, y = u$ und substituirt links für y seinen Werth, so verschwindet z wegen $\Phi(D)\, z = 0$ von selbst aus dem Resultat, welches daher eine lineare homogene Function der Constanten $C_1, C_2, \ldots, C_\varkappa$ wird. Es genügt also u einer linearen Differentialgleichung $\varkappa$ ter Ordnung, welche dargestellt sein möge durch $\Psi(D)\, u = u^{(\varkappa)} + \psi_1 u^{(\varkappa-1)} + \cdots + \psi_{\varkappa-1} u' + \psi_\varkappa u = 0$ und deren Coefficienten sich leicht bestimmen lassen. Es ist nämlich für jeden Werth von i:

$$y^{(m+i)} + \lambda_{i,1} y^{(m+i-1)} + \lambda_{i,2} y^{(m+i-2)} + \cdots + \lambda_{i,m+i} y = u^{(i)},$$

wie durch Differentiation von $\Phi(D)\, y = u$ sich ergiebt. Setzt man $i = 1, 2, \ldots, \varkappa$ und substituirt die Werthe von $u, u', \ldots, u^{(\varkappa)}$ in die Gleichung $\Psi(D)\, u = 0$, so folgt:

$$y^{(m+\varkappa)} + (\lambda_{\varkappa,1} + \psi_1)\, y^{(m+\varkappa-1)} + (\lambda_{\varkappa,2} + \psi_1 \lambda_{\varkappa-1,1} + \psi_2)\, y^{(m+\varkappa-2)} + \cdots = 0.$$

Die Vergleichung dieser Gleichung mit der gegebenen Differentialgleichung $(m + \varkappa)$ ter Ordnung ergiebt zur Bestimmung der Coefficienten $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\varkappa$ die Gleichungen:

$$\lambda_{\varkappa,1} + \psi_1 = f_1$$
$$\lambda_{\varkappa,2} + \psi_1 \lambda_{\varkappa-1,1} + \psi_2 = f_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_{\varkappa,\varkappa} + \psi_1 \lambda_{\varkappa-1,\varkappa-1} + \cdots + \psi_\varkappa = f_\varkappa$$
$$\lambda_{\varkappa,\varkappa+1} + \psi_1 \lambda_{\varkappa-1,\varkappa} + \cdots + \psi_\varkappa \lambda_{0,1} = f_{\varkappa+1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_{\varkappa,\varkappa+m} + \psi_1 \lambda_{\varkappa-1,\varkappa+m-1} + \cdots + \psi_\varkappa \lambda_{0,m} = f_{\varkappa+m},$$

worin $\lambda_{0,1}, \ldots, \lambda_{0,m}$ als identisch mit resp. $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ zu betrachten sind, also im Ganzen $m + \varkappa$ Gleichungen, von denen die $\varkappa$ ersten die Coefficienten $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\varkappa$ bestimmen, während die m übrigen Bedingungsgleichungen sind, welche erfüllt sein müssen, wenn sämmtliche Integrale der Gleichung m ter Ordnung in z zugleich auch Integrale der Gleichung $(m + \varkappa)$ ter Ordnung in y sein sollen. Da dieses nach Voraussetzung der Fall ist, so sieht man, dass die Integration der Gleichung von der $m + \varkappa = n$ ten Ordnung abhängig gemacht ist von der Integration der beiden Gleichungen $\Psi(D)u = 0$ und $\Phi(D)y = u$, welche resp. von der $\varkappa = (n - m)$ ten und der m ten Ordnung sind.

2. (α) Man setze $xy = u$; dann wird: $xy = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx}$.

(β) Man setze $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = u$, so wird: $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{du}{dx} = n^2 u$,

also $u = C_1 \frac{e^{nx}}{x} + C_2 \frac{e^{-nx}}{x}$, daher $y = \frac{C_1}{n^2 x^2} e^{nx}(nx - 1)$

$$- \frac{C_2}{n^2 x^2} e^{-nx}(nx + 1).$$

(γ) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{16} \cos 3x + \frac{1}{4} x \sin x$.

3. Das particuläre Integral folgt aus $y = \frac{1}{(D + c)^n} \cos ax$

$$= \Re \left\{ e^{axi} \frac{1}{(D + ai + c)^n} 1 \right\} = \Re \left\{ e^{axi} \frac{1}{(c^2 + a^2)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{c - ai}{c + ai} \right)^{\frac{n}{2}} \right\}.$$

Nun ist $\frac{1}{2i} \log \frac{c - ai}{c + ai} = - arc\ cot \frac{c}{a}$, also $\left(\frac{c - ai}{c + ai}\right)^{1/2} = e^{-i\, arc\, cot \frac{c}{a}}$.

Daher: $y = (c^2 + a^2)^{-\frac{n}{2}} \cos\left(ax - n\, arc\ cot \frac{c}{a}\right)$. Die Complementärfunction ist: $e^{-cx}(A_1 + A_2 x + \cdots + A_n x^{n-1})$.

4. Man verfahre genau so wie in §. 46, V, Aufgabe 3.

5. (1) $y = C_1 x^2 + C_2 x^{-2} + C_3 \cos(\log x) + C_4 \sin(\log x)$

$$+ \frac{1}{20} x^2 \log x - \frac{1}{5} \log x . \sin(\log x).$$

(2) Setzt man $y = e^{x^2} v$, so erhält man:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + 8x \frac{d^3 v}{dx^3} + 24 x^2 \frac{d^2 v}{dx^2} + 32 x^3 \frac{dv}{dx} + 16 x^4 v = 16 x^4,$$

welcher durch $v = 1$ genügt wird. Daher ist $y = e^{x^2}$ ein particuläres Integral der gegebenen Gleichung, somit das allgemeine Integral: $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3 e^{\beta x} + C_4 e^{-\beta x} + e^{x^2}$, wo

$$\alpha = (6 + 2 . 6^{1/2})^{1/2}, \quad \beta = (6 - 2 . 6^{1/2})^{1/2} \text{ ist.}$$

(3) $y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x) + C_3 e^{2x} \cos(2^{3/2} x + \alpha)$

$$+ \frac{e^{-2x}}{144}(x^3 + x^2) - \frac{x e^{2x}}{576}\left\{4 \cos(2^{3/2} x) - 2^{1/2} \sin(2^{3/2} x)\right\}.$$

(4) $y = C_1 e^x + e^x(C_2 \cos x + C_3 \sin x) + x e^x + \frac{1}{10} \cos x$

$$+ \frac{3}{10} \sin x.$$

(5) $y = C_1 e^{1/2 x} \cos\left(\frac{3^{1/2} x}{2} + \alpha\right) + C_2 e^{-1/2 x} \cos\left(\frac{3^{1/2} x}{2} + \beta\right)$

$$+ a(x^2 - 2) - \frac{e^{-x}}{481}(9 \sin 2x + 20 \cos 2x).$$

(6) $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2) + x^2 - 6x + 12 + \frac{1}{6} x^3 e^{-x}$

$$+ e^{-x} \iiint \frac{e^x}{x} dx^3.$$

6. Die Wurzeln der Gleichung $z^{2n} - a^{2n} = 0$ sind ausser $+a$ und $-a$ noch alle Werthe, welche man aus $z = a\left(\cos\frac{r\pi}{n} \pm i \sin\frac{r\pi}{n}\right)$

erhält, wenn man darin $r = 1, 2, \ldots, n-1$ setzt. Der zwei conjugirten Wurzeln entsprechende Theil der Complementärfunction ist daher:

$$C_1\, e^{ax\left(\cos\frac{r\pi}{n} + i\sin\frac{r\pi}{n}\right)} + C_2\, e^{ax\left(\cos\frac{r\pi}{n} - i\sin\frac{r\pi}{n}\right)},$$

oder:

$$e^{ax\cos\frac{r\pi}{n}}\left\{A_r \cos\left(ax\sin\frac{r\pi}{n}\right) + B_r \sin\left(ax\sin\frac{r\pi}{n}\right)\right\};$$

somit die ganze Complementärfunction:

$$Ce^{ax} + De^{-ax} + \sum_{r=1}^{r=n-1} e^{ax\cos\frac{r\pi}{n}}\left\{A_r \cos\left(ax\sin\frac{r\pi}{n}\right) + B_r \sin\left(ax\sin\frac{r\pi}{n}\right)\right\}.$$

Die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{1}{D^{2n} - a^{2n}}$ giebt ferner als die den Wurzeln $a\left(\cos\dfrac{r\pi}{n} \pm i\sin\dfrac{r\pi}{n}\right)$ entsprechenden Brüche:

$$\frac{1}{2na^{2n-1}}\left\{\frac{e^{\frac{r\pi i}{n}}}{D - a\left(\cos\frac{r\pi}{n} + i\sin\frac{r\pi}{n}\right)} + \frac{e^{-\frac{r\pi i}{n}}}{D - a\left(\cos\frac{r\pi}{n} - i\sin\frac{r\pi}{n}\right)}\right\},$$

und somit ist der zugehörige Theil des particulären Integrals:

$$\frac{1}{2na^{2n-1}}\left\{e^{\frac{r\pi i}{n} + ax\left(\cos\frac{r\pi}{n} + i\sin\frac{r\pi}{n}\right)}\int^{x} e^{-a\xi\left(\cos\frac{r\pi}{n} + i\sin\frac{r\pi}{n}\right)} f(\xi)\, d\xi\right.$$

$$\left. + e^{-\frac{r\pi i}{n} + ax\left(\cos\frac{r\pi}{n} - i\sin\frac{r\pi}{n}\right)}\int^{x} e^{-a\xi\left(\cos\frac{r\pi}{n} - i\sin\frac{r\pi}{n}\right)} f(\xi)\, d\xi\right\}$$

$$= \frac{1}{na^{2n-1}}\int^{x} e^{a(x-\xi)\cos\frac{r\pi}{n}} \cos\left\{\frac{r\pi}{n} + a(x-\xi)\sin\frac{r\pi}{n}\right\} f(\xi)\, d\xi.$$

7. Die Wurzeln der Gleichung $\cos z = 0$ erhält man aus $z = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, wenn man n alle Werthe von 0 bis ∞ beilegt. Daher ist die Complementärfunction:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{A_n e^{(n+\frac{1}{2})\pi x} + B_n e^{-(n+\frac{1}{2})\pi x}\right\}.$$

Das particuläre Integral ist:

$$y = \Re\left\{\frac{1}{\cos D}\, e^{ix}\right\} = \Re\left\{e^{ix}\frac{2}{e^{-1+Di} + e^{1-Di}}\, 1\right\}.$$

Entwickelt man nun $\frac{2}{e^{-1+Di}+e^{+1-Di}}$ nach aufsteigenden Potenzen von D, so hat man nur das von D unabhängige Glied beizubehalten, und daher wird $y=\frac{2\cos x}{e+e^{-1}}$. Das allgemeine Integral ist also: $y=\sum_{n=0}^{n=\infty}\{A_n e^{(n+\frac{1}{2})\pi x}+B_n e^{-(n+\frac{1}{2})\pi x}\}+\frac{2\cos x}{e+e^{-1}}$.

8. Es ist

$$\frac{(\vartheta-n)!}{\vartheta!}=\frac{1}{\vartheta(\vartheta-1)\ldots(\vartheta-n+1)}=\frac{1}{x^n D^n}.$$

Daher muss sein: $\frac{1}{x^n D^n}\,0=A_0+A_1 x+\cdots+A_{n-1}x^{n-1}$, ein Resultat, dessen Richtigkeit sofort ersichtlich ist.

9. (1) Man erhält diese Formel entweder durch mehrfache Anwendung des Leibnitz'schen Theorems oder einfacher durch Entwickelung von $e^{x^{\frac{1}{2}}}$ nach Potenzen von $x^{\frac{1}{2}}$.

(2) Nach dem Leibnitz'schen Theorem ist: $D^r x^{m} D^{n-r}\varphi$ $=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=r}(-1)^\lambda m(m+1)\ldots(m+\lambda-1)\,r_\lambda\, x^{-m-\lambda}D^{n-\lambda}\varphi$, wo r_λ zur Abkürzung steht für $\frac{r(r-1)\ldots(r-\lambda+1)}{\lambda!}$. Hieraus erhält man wieder:

$$D^m x^{m+r}D^r x^{-m}D^{n-r}\varphi(x)=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=r}(-1)^\lambda m(m+1)\ldots(m+\lambda-1)\,r_\lambda\times$$

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=m}(r-\lambda)(r-\lambda-1)\ldots(r-\lambda-\mu+1)\,m_\mu\, x^{r-\lambda-\mu}D^{n+m-\lambda-\mu}\varphi(x)$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=r}\sum_{\mu=0}^{\mu=m}(-m)_\lambda\, m_\mu\,.\,r_{\lambda+\mu}(\lambda+\mu)!\,x^{r-(\lambda+\mu)}D^{n+m-(\lambda+\mu)}\varphi(x).$$

Sammelt man nun alle Glieder, in denen $\lambda+\mu$ denselben Werth hat, und wendet man zur Summirung der Coefficienten die bekannte Formel $\sum_{p=0}^{p=n}\alpha_p\beta_{n-p}=(\alpha+\beta)_n$ für $\alpha=-m$, $\beta=m$ an, so findet man, dass alle diese Summen verschwinden und nur dasjenige Glied übrig bleibt, für welches $\lambda+\mu=0$ ist. Daraus folgt die Formel des Textes.

(3) Nach §. 37 ist $D^n(\vartheta - n)\,y = x\,D^{n+1}y = \vartheta\,D^n y$, daher: $D^n(\vartheta - n)^2 y = \vartheta\,D^n(\vartheta - n)\,y = \vartheta^2 D^n y$, und somit allgemein: $D^n(\vartheta - n)^r\,y = \vartheta^r\,D^n y$.

IV. Capitel.

§. 52.

2. Aufgabe.

(1) $y + C_1 = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-c}{a}} + e^{-\frac{x-c}{a}}\right)$.

(2) $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = a^2$.

(3) Ist $\frac{d^2y}{dx^2} = q$, so erhält man zunächst:

$$dx = a^3\,\frac{q\,dq}{(1 + c^2q^2)^{1/2}},$$

und daher:

$$x = C_1 + \frac{a^3}{c^2}(1 + c^2q^2)^{1/2}.$$

Ferner

$$\frac{dy}{dx} = \int q\,dx = \int \frac{a^3q^2dq}{(1+c^2q^2)^{1/2}} = C_2 + \frac{a^3}{2c^3}\{c\,q(1 + c^2q^2)^{1/2} - log\,(c\,q + (1 + c^2q^2)^{1/2})\}.$$

Setzt man wieder für dx seinen Werth, ausgedrückt durch q, und integrirt dann, so folgt:

$$y = C_3 + C_2\,\frac{a^3}{c^2}(1 + c^2q^2)^{1/2} + \frac{a^6}{2c^4}\,q + \frac{a^6}{6c^2}\,q^3 - \frac{a^6}{2c^5}(1 + c^2q^2)^{1/2}\,log\,\{c\,q + (1 + c^2q^2)^{1/2}\}.$$

Hieraus und aus dem Werthe von x hat man q zu eliminiren.

§. 53.

2. Aufgabe.

(1) $y = C_1 + C_2x + C_3x^{\frac{5+\alpha}{2}} + C_4x^{\frac{5-\alpha}{2}}$, wo $\alpha = (1 + 4\lambda)^{1/2}$.

(2) Aus den beiden Gleichungen:

$$x + C_2 = c\int\frac{dp}{\left\{C_1 + \frac{1}{3}(1 + p^2)^3\right\}^{1/2}}$$

und $$y + C_3 = c\int \frac{p\,dp}{\left\{C_1 + \frac{1}{3}(1+p^2)^3\right\}^{1/2}},$$

in denen p für $\frac{dy}{dx}$ steht, hat man p zu eliminiren.

§. 54.

3. Aufgabe.

(1) Für $\frac{dy}{dx} = p$ wird die Gleichung: $d\{x(1+p^2)^{1/2}\} = a\,dp$, also $x = \frac{ap+b}{(1+p^2)^{1/2}}$, ferner $y = \int p\,dx = \frac{bp-a}{(1+p^2)^{1/2}}$ $-b\log\left\{\frac{p+(1+p^2)^{1/2}}{c}\right\} = (a^2+b^2-x^2)^{1/2} - b\log\frac{b+(a^2+b^2-x^2)^{1/2}}{c(x-a)}$, wo b und c willkürliche Constanten sind.

(2) Man substituire nach einander $dx = \frac{dy}{p}$, $y = pz$, $(a^2+z^2)^{1/2} = uz$ und setze $\frac{a}{b} = 2n$, so folgt:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{u\,du}{u^2 - 2nu - 1},$$

also $y^{2n_1} = C_1 \frac{(u-n+n_1)^{n-n_1}}{(u-n-n_1)^{n+n_1}}$, wo $n_1 = (n^2+1)^{1/2}$ ist. Bezeichnet man den Werth von y mit U, so wird: $p = \frac{1}{a}U(u^2-1)^{1/2}$, also

$$dx = a\frac{dU}{U(u^2-1)^{1/2}} = -a\frac{u\,du}{(u^2-2nu-1)(u^2-1)^{1/2}}.$$

Hieraus bestimmt sich x als Function von u.

(3) Setzt man $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = pz$, also $dp = z\,dy$, so folgt $p - zy = (1+a^2z^2)^{1/2}$. Differentiirt man dies, so wird: $-y\,dz = a^2(1+a^2z^2)^{-1/2} z\,dz$, also entweder $dz = 0$ oder

$$y = -a^2(1+a^2z^2)^{-1/2}z.$$

Die Annahme $dz = 0$ führt zu der allgemeinen Lösung: $C_1y + C_2 = e^{C_1x}$, während die Annahme $y = -a^2(1+a^2z^2)^{-1/2}z$ zu der singulären Lösung $y = a\sin\frac{C-x}{a}$ führt.

(4) $y + C_1x + C_2 = (1+C_1^2)\log(x+C_1)$.

(5) Man setze $\frac{dy}{dx} = p$ und sodann $p = x^2(1 - z^2)$, dann wird: $\frac{dx}{x} = -\frac{z\,dz}{(z-1)\left(z+1-\frac{1}{2a}\right)}$. Hieraus bestimmt sich z als Function von x und sodann aus $dy = x^2(1-z^2)\,dx$ auch y als Function von x. Für $a = \frac{1}{2}$ erhält man: $y = Cx(x - C) + C_1$.

(6) $y = C_1 e^{2^{1/2} arc sin x} + C_2 e^{-2^{1/2} arc sin x}$.

(7) $log\, y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

(8) Man setze $log\, y = u$. Es wird: $log\, y = \frac{x + C_1}{x + C_2}$.

§. 55.

2. Aufgabe.

(1) Setzt man $x = e^\vartheta$, $y = e^\vartheta z$ und $\frac{dz}{d\vartheta} + z = u$, so geht diese Gleichung über in: $n(u - z)(1 + z^2)^{1/2} \frac{du}{dz} = (1 + u^2)^{3/2}$. Hierin setze man: $u = tang\, \alpha$, $z = tang\, \beta$ und $\alpha - \beta = \gamma$, so folgt: $\beta - C_1 = \int \frac{n \sin\gamma\, d\gamma}{1 - n \sin\gamma}$. Ferner ist: $\frac{dx}{x} = d\vartheta = \frac{dz}{u - z} = \frac{\cos(\beta + \gamma)\, d\beta}{\cos\beta\, \sin\gamma} = \frac{n \cos\gamma\, d\gamma}{1 - n \sin\gamma} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\, d\beta$, mithin:

$$x = C\frac{\cos\beta}{1 - n\sin\gamma}, \quad y = C\frac{\sin\beta}{1 - n\sin\gamma}.$$

Die Elimination von β und γ aus den drei Gleichungen

$$x = C\frac{\cos\beta}{1 - n\sin\gamma}, \quad y = C\frac{\sin\beta}{1 - n\sin\gamma}, \quad \beta - C_1 = \int\frac{n \sin\gamma\, d\gamma}{1 - n\sin\gamma}$$

führt zur Stammgleichung.

(2) Allgemeine Lösung; $y = nx\, log \frac{x}{C_1 + C_2 x}$. Die zweite Lösung, zu welcher man kommt, nämlich $y = Cx$, ist nur ein specieller Fall der allgemeinen und ergiebt sich aus dieser, wenn man $C_1 = 0$ und $n\, log \frac{1}{C_2} = C$ setzt.

(3) $y = x\left(C - arc sin \frac{C_1}{x}\right)$.

4. Aufgabe.

(1) Man setze $x = e^{\vartheta}$, $y = x^2 z$ und $\frac{dz}{d\vartheta} = u$, dann wird $u = Ce^z - 4z - 2$, folglich: $\vartheta - C_1 = \int \frac{dz}{Ce^z - 4z - 2}$. Hieraus bestimmt sich z als Function von ϑ, d. i. als Function von x und somit ist auch y als Function von x bestimmt.

(2) Man setze $y = x^{-1} z = e^{-\vartheta} z$. Man erhält:

$$\vartheta - C_1 = \int \frac{dz}{Ce^z + 2z + 1}.$$

5. Aufgabe.

(1) Die Substitution $y = e^{\int u\,dx}$ ergiebt die Gleichung:

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{a(c^2 + x^2)^{1/2}} = -\left(1 + \frac{b}{a}\right) u^2.$$

Hieraus findet man u nach §. 15 und sodann y als Function von x. Oder man multiplicire die gegebene Gleichung mit $\frac{dx}{yp}$, wo $p = \frac{dy}{dx}$, so erhält man: $a\frac{dp}{p} + b\frac{dy}{y} = \frac{dx}{(c^2 + x^2)^{1/2}}$, woraus folgt: $y^{\frac{b}{a}}\,dy = C\{x + (c^2 + x^2)^{1/2}\}^{\frac{1}{a}}\,dx$, also: $y^{\frac{b+a}{a}} + C_1 = C'\{x + (c^2 + x^2)^{1/2}\}^{\frac{1}{a}} \times \{(c^2 + x^2)^{1/2} - ax\}$, wobei $C' = \frac{(a+b)C}{1 - a^2}$ ist.

(2) Die Substitution $y = e^{\int u\,dx}$ ergiebt:

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = \frac{bu^2}{(a^2 - x^2)^{1/2}}, \quad \text{also } u = \frac{x}{C + b(a^2 - x^2)^{1/2}},$$

und $\log\frac{y}{C_1} = -\frac{1}{b}(a^2 - x^2)^{1/2} + \frac{C}{b^2}\log\{C + b(a^2 - x^2)^{1/2}\}$.

§. 56.

2. Aufgabe. Die Bedingungsgleichung ist nicht erfüllt.

3. Aufgabe.

(1) Erstes Integral: $x\frac{d^2y}{dx^2} + (x^2 - 4)\frac{dy}{dx} + 2xy = C$; zweites: $x\frac{dy}{dx} + (x^2 - 5)y = Cx + C_1$; schliesslich:

$$y = C_2 x^5 e^{-\frac{1}{2}x^2} + C\left\{-\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{8}x^5 e^{-\frac{1}{2}x^2}\int x^{-1} e^{\frac{1}{2}x^2} dx\right\}$$

$$+ C_1\left\{-\frac{1}{5} - \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{15}x^4 + \frac{1}{15}x^5 e^{-\frac{1}{2}x^2}\int e^{\frac{1}{2}x^2} dx\right\}.$$

(2) Erstes Integral: $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + xy^2 + x^2 = C.$

Multiplicirt man die zweite Gleichung mit x, so ergiebt sich als erstes Integral derselben: $x^3\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{dy}{dx} + x^3 y = C + x^2.$

§. 57.

2. Aufgabe.

(1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x^2 y^2 = C.$

(2) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + xy^2 = C.$

3. Aufgabe. Multiplicirt man mit $2x^2\frac{dy}{dx} - 2xy$ und integrirt dann, so wird: $\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2 - \frac{a^2x^2}{y^2+x^2} = C$ oder für $y = ux$:

$\frac{dx}{x^2} = \pm\left(\frac{1+u^2}{C(1+u^2)+a^2}\right)^{\frac{1}{2}} du$, also

$$\frac{1}{x} = C_1 \pm \int\left\{\frac{1+u^2}{C(1+u^2)+a^2}\right\}^{\frac{1}{2}} du.$$

4. Aufgabe. Multiplicirt man die gegebene Gleichung mit $2X_1 p + 2X_2 y$, wo $p = \frac{dy}{dx}$ ist, so soll das Product ein exacter Differentialquotient sein, welcher mit $\frac{dV}{dx}$ bezeichnet sei, also:

$$dV = (2X_1 p + 2X_2 y)\,dp + \frac{\alpha y(2X_1 p + 2X_2 y)}{(\beta y^2 + \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)^2}\,dx = 0.$$

Integrirt man diese Gleichung unter der Annahme, dass $dx = 0$ und p die einzige Veränderliche sei, und bezeichnet man das Resultat mit U_1, so ist: $U_1 = X_1 p^2 + 2X_2 yp$. Diesen Ausdruck differentiire man unter Aufhebung aller Beschränkungen und subtrahire ihn dann von dem vorigen. Dies giebt:

$$d V - d U_1 = \left\{\frac{\alpha y (2 X_1 p + 2 X_2 y)}{(\beta y^2 + \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)^2} - p^2 \left(\frac{d X_1}{d x} + 2 X_2\right) - 2 y p \frac{d X_2}{d x}\right\} d x = 0.$$

Da p^2 vorkommt, so kann dieser Ausdruck nur dann ein exactes Differential sein, wenn der Coefficient von p^2 verschwindet, also $\frac{d X_1}{d x} + 2 X_2 = 0$ ist. Alsdann wird:

$$d V - d U_1 = \frac{\alpha . 2 X_1 y d y}{(\beta y^2 + \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)^2} - 2 \frac{d X_2}{d x} y d y - \frac{\alpha y^2 \frac{d X_1}{d x}}{(\beta y^2 + \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)^2} d x = 0.$$

Diese Gleichung integrirt man wieder, als ob $d x = 0$ und nur y veränderlich wäre. Das Resultat ist:

$$U_2 = \frac{-\alpha X_1}{\beta(\beta y^2 + \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)} - y^2 \frac{d X_2}{d x}.$$

Differentiirt man dies, indem man wieder die Beschränkungen fallen lässt, und subtrahirt das Resultat von $d V - d U_1 = 0$, so folgt:

$$d V - d U_1 - d U_2 = \left\{\frac{\alpha}{\beta} \frac{(\gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2) \frac{d X_1}{d x} - (2\delta + 2\varepsilon x) X_1}{(\beta y^2 + \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)^2} + y^2 \frac{d^2 X_2}{d x^2}\right\} d x = 0.$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn man hat: $(\gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2) \frac{d X_1}{d x} - (2\delta + 2\varepsilon x) X_1 = 0$ und $\frac{d^2 X_2}{d x^2} = 0$, oder $X_1 = \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2$ und $X_2 = a + b x$. Da aber schon $X_2 = -\frac{1}{2}\frac{d X_1}{d x} = -\delta - \varepsilon x$ sein sollte, so wird $a = -\delta$, $b = -\varepsilon$. Demnach ist der integrirende Factor: $2(\gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2) \frac{d y}{d x} - 2(\delta + \varepsilon x) y$, und das erste Integral der Gleichung ist: $U_1 + U_2 = C$, oder:

$$(\gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)\left(\frac{d y}{d x}\right)^2 - 2(\delta + \varepsilon x) y \frac{d y}{d x} - \frac{\alpha(\gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)}{\beta(\beta y^2 + \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)} + \varepsilon y^2 = C.$$

Addirt man beiderseits $\frac{\alpha}{\beta}$ und setzt $C + \frac{\alpha}{\beta} = C_1$, so reducirt sich dies auf:

$$(\gamma + 2\,\delta\,x + \varepsilon\,x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\,(\delta + \varepsilon\,x)\,y\,\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha\,y^2}{\beta\,y^2 + \gamma + 2\,\delta\,x + \varepsilon\,x^2} + \varepsilon\,y^2 = C_1.$$

Setzt man schliesslich $y = u\left(\frac{\gamma + 2\,\delta\,x + \varepsilon\,x^2}{\beta}\right)^{1/2}$ und $C_1 = \frac{C}{\beta}$, so erhält man:

$$\frac{dx}{\gamma + 2\,\delta\,x + \varepsilon\,x^2} = \left\{\frac{1 + u^2}{C + (C - \alpha + \delta^2 - \varepsilon\,\gamma)\,u^2 + (\delta^2 - \varepsilon\,\gamma)\,u^4}\right\}^{1/2} du.$$

Hierdurch ist u als Function von x und sodann auch y als Function von x bestimmt. (Euler, Inst. Calc. Int. II, p. 153.)

§. 58.

2. Aufgabe.

(1) $w = e^x,\ v = B + A \int e^{1/2\,x^2 - 2\,x}\,dx + \int e^{1/2\,x^2 - 2\,x}\,dx \int X\,e^{-1/2\,x^2 + x}\,dx;\ y = w\,v.$

(2) $w = \frac{1}{x},\ v = B + A\,(a - b\,x)^3 + \int (a - b\,x)^2\,dx \int \frac{x^n}{(a - b\,x)^2}\,dx;\quad y = w\,v.$

Man kann auch bemerken, dass die Gleichung eine exacte Differentialgleichung ist.

§. 59.

2. Aufgabe.

(1) $w = e^{1/2\,b\,x^2};\ \frac{d^2 v}{d\,x^2} + b\,v = x\,e^{-1/2\,b\,x^2}$. Aus dieser Gleichung folgt nach der dritten Aufgabe des §. 46, V: $v = A\cos(b^{1/2}\,x) + B\sin(b^{1/2}\,x) + b^{-1/2}\int_0^x \xi\,e^{-1/2\,b\,\xi^2}\sin\{b^{1/2}(x - \xi)\}\,d\,\xi.\quad y = w\,v.$

(2) $w = x;\quad v = A\cos a\,x + B\sin a\,x;\ y = v\,w.$

(3) $w = e^{x^2};\ \frac{d^2 v}{d\,x^2} - v = 1.$ Hieraus: $v = A\,e^x + B\,e^{-x} - 1;\ y = w\,v.$

§. 60.

1. Aufgabe. Für beide Gleichungen ist

$$I = \frac{k}{1-x^2} - \frac{(3x-5)(1+x)}{4(1-x^2)^2}.\quad \text{Ferner ist:}\quad z(1+x) = \zeta.$$

2. Aufgabe. $Q = 1 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{4n^2-1}{4x^2}$; $f(x) = x^{1/2}e^{-1/2\,ax}$.

§. 62.

1. Aufgabe. Die beiden Werthe $y_1 = cx + d$, $y_2 = ax + b$ genügen als particuläre Integrale der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, für welche $I = 0$ ist. Ist nun $\frac{y_1}{y_2} = \frac{cx+d}{ax+b} = s$, so ist $2I$ der Werth der Schwarz'schen Abgeleiteten von s und daher $\{s, x\} = 0$.

2. Aufgabe. Sind v_1 und v_2 zwei Integrale von $\frac{d^2v}{dx^2} + Iv = 0$, und setzt man $\frac{v_1}{v_2} = s$, so genügt s der Gleichung $\{s, x\} = 2I$. Ist somit I gegeben und kann man zwei Integrale von $\frac{d^2v}{dx^2} + Iv = 0$ finden, so kennt man auch den Werth von s. Nun ist in unserem Falle $I = -\frac{\alpha}{x^2}$, also $\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{\alpha}{2x^2}\,v = 0$, daher $v = x^{1/2}(Cx^{\alpha'} + C'x^{-\alpha'})$, wo $\alpha' = \frac{1}{2}(1+2\alpha)^{1/2}$ ist. Folglich: $s = \frac{C_1x^{\alpha'} + C_2x^{-\alpha'}}{C_3x^{\alpha'} + C_4x^{-\alpha'}}$. — Man kann die Gleichung auch direct integriren; man setze dazu $\frac{s''}{s'} = \frac{u}{x}$.

3. Aufgabe.

(1) Die bekannten Formeln für die Vertauschung der abhängigen und unabhängigen Veränderlichen führen sofort zu dieser Gleichung.

(2) Genügen v_1 und v_2 der Gleichung: $\frac{d^2v}{dx^2} + Iv = 0$, so genügen auch $av_1 + bv_2$ und $cv_1 + dv_2$ derselben Gleichung. Ist also $s = \frac{v_1}{v_2}$, so ist: $\{s, x\} = 2I = \left\{\frac{as+b}{cs+d}, x\right\}$.

(3) Es ist: $s' = \frac{ds}{dy} y'$, $s'' = \frac{d^2 s}{dy^2} y'^2 + \frac{ds}{dy} y''$, $s''' = \frac{d^3 s}{dy^3} y'^3 + 3 \frac{d^2 s}{dy^2} y'' y' + \frac{ds}{dy} y'''$, folglich: $\{s, x\} = y'^2 \{s, y\} + \{y, x\}$, daher wegen (1): $\{s, x\} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 [\{s, y\} - \{x, y\}]$.

(4) Die zweimalige Anwendung von (3) führt zu dieser Gleichung.

§. 63.

2. Aufgabe.

(1) $z = \sin x$; $y = A \cos (c \arcsin x) + B \sin (c \arcsin x)$.

(2) $z = \sin x$; $y = A \cos (\sin x) + B \sin (\sin x)$.

(3) $\frac{dz}{dx} = (x - 1)^2 (x + 1)$, $z = \frac{1}{12} (x - 1)^3 (3x + 5)$.

Hieraus folgt: $\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{1}{4 z^2} y = 0$ und somit: $y = z^{1/2} (A + B \log z)$.

(4) $z = \frac{1}{x}$; $y = A \cos \frac{a}{x} + B \sin \frac{a}{x}$.

§. 64.

1. Aufgabe. Die gemeinsame Normalform der ersten und der auf x transformirten zweiten Gleichung lautet:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \left\{\frac{1}{(1 - x^2)^2} + \frac{n(n+1)}{1 - x^2}\right\} w = 0,$$

und die Beziehung zwischen v und z ist: $v = z \left(\frac{x+1}{2}\right)^{1/2}$ oder: $z = v (1 - k^2)^{1/2}$.

2. Aufgabe. Die gemeinsame Normalform der auf x transformirten ersten und der zweiten Gleichung lautet:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} - \left(B^2 + \frac{k(k-1)}{x^2}\right) w = 0,$$

und die Beziehung zwischen y und v ist: $v = y e^{-2Bx} x^{2k+1}$.

§. 66.

2. Aufgabe. Betrachtet man in $y = C e^{-\int Q dx}$, dem allgemeinen Integrale von $\frac{dy}{dx} + Q y = 0$, die Grösse C als Function von x,

so folgt: $\frac{dy}{dx} + Qy = e^{-\int Q\,dx}\frac{dC}{dx}$. Setzt man also $e^{-\int Q\,dx}\frac{dC}{dx} = R$, also $C = C_1 + \int Re^{\int Q\,dx}dx$, so findet man das allgemeine Integral von $\frac{dy}{dx} + Qy = R$ in der Form: $y = e^{-\int Q\,dx}[C_1 + \int Re^{\int Q\,dx}dx]$ (vergl. §. 14).

3. Aufgabe.

(1) Allgemeines Integral der verkürzten Gleichung ist: $y = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx$, das der gegebenen:

$$y = \left(A + \frac{1}{n^2}\log\cos nx\right)\cos nx + \left(B + \frac{x}{n}\right)\sin nx.$$

(2) Allgemeines Integral der verkürzten Gleichung ist: $y = \frac{1}{1-x^2}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. Für C_1 und C_2 findet man sodann: $C_1 = A + x\cos x - \sin x$, $C_2 = B + x\sin x + \cos x$. Daher ist das Integral der gegebenen Gleichung:

$$y = \frac{1}{1-x^2}(A\cos x + B\sin x + x).$$

§. 67.

1. Aufgabe. Setzt man zunächst $\varphi(x) = 0$, so ergiebt sich für die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}f(x) = 0$ das Integral: $\frac{dy}{dx} = Ce^{-\int f(x)dx}$. Betrachtet man hierin C als Function von x und differentiirt nach x, so folgt: $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}f(x) = \frac{dC}{dx}e^{-\int f(x)dx} = -\varphi(x)\,C^2 e^{-2\int f(x)dx}$, somit: $C = \{A + \int\varphi(x)e^{-\int f(x)dx}dx\}^{-1}$. Als allgemeines Integral der gegebenen Gleichung hat man also:

$$y = B + \int\{A + \int\varphi(x)e^{-\int f(x)dx}dx\}^{-1}e^{-\int f(x)dx}dx.$$

Hätte man zuerst $f(x) = 0$ gesetzt, so hätte man die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\varphi(x) = 0$ erhalten, deren Integral ist:

$$\frac{dy}{dx} = \{C + \int\varphi(x)dx\}^{-1}.$$

Betrachtet man hierin C als Function von x und differentiirt nach x, so folgt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\varphi(x) = -\{C + \int\varphi(x)dx\}^{-2}\frac{dC}{dx}$$
$$= -f(x)\{C + \int\varphi(x)dx\}^{-1},$$

daher: $\frac{dC}{dx} - Cf(x) = f(x) \int \varphi(x)\, dx$, welche Gleichung die lineare Form besitzt. Es folgt aus ihr:

$$C + \int \varphi(x)\, dx = e^{\int f(x)\, dx} \left\{ A + \int \varphi(x)\, e^{-\int f(x)\, dx}\, dx \right\},$$

somit $y = B + \int \left\{ A + \int \varphi(x)\, e^{-\int f(x)\, dx}\, dx \right\}^{-1} e^{-\int f(x)\, dx}\, dx$, wie vorher.

Um nun auch die Methode des §. 54 anzuwenden, setze man $\frac{dy}{dx} = p$, dann wird $\frac{d\frac{1}{p}}{dx} - f(x)\frac{1}{p} = \varphi(x)$, welche Gleichung die lineare Form besitzt.

2. Aufgabe. Setzt man zunächst $F(y) = 0$, so findet man, wie bei der vorigen Aufgabe: $\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} = e^{-\int f(x)\, dx}\frac{dC}{dy}\frac{dy}{dx}$ $= \frac{1}{C}\frac{dC}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$. Andererseits ist aber

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} = -F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

daher $\frac{1}{C}\frac{dC}{dy} = -F(y)$, also $C = A e^{-\int F(y)\, dy}$. Man findet somit als Stammgleichung der gegebenen Gleichung:

$$\int e^{\int F(y)\, dy}\, dy = A \int e^{-\int f(x)\, dx}\, dx + B.$$

Nimmt man ferner zunächst $f(x) = 0$ an, so ist

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

also, wenn $\frac{dy}{dx} = p$ ist, $\frac{dp}{dy} + F(y)p = 0$ oder $p = Ce^{-\int F(y)\, dy}$. Differentiirt man dies nach x, so folgt:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{C}\frac{dC}{dx}\frac{dy}{dx}.$$

Andererseits ist:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -f(x)\frac{dy}{dx},$$

daher: $\frac{1}{C}\frac{dC}{dx} = -f(x)$ oder: $C = A e^{-\int f(x)\, dx}$, folglich $\int e^{\int F(y)\, dy}$ $= A \int e^{-\int f(x)\, dx} + B$, wie vorher.

Multiplicirt man endlich die Gleichung mit $\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$, so folgt:

$$\frac{d}{dx} \log \frac{dy}{dx} + F(y) \frac{dy}{dx} + f(x) = 0, \text{ also: } \frac{dy}{dx} = A e^{-\int F(y)\,dy} \,.\, e^{-\int f(x)\,dx},$$

oder $\int e^{\int F(y)\,dy}\,dy = A \int e^{-\int f(x)\,dx}\,dx + B$.

§. 68.

2. Aufgabe.

(1) $P_1 = \frac{x}{1-x^2}$; $v = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} z$

$$= (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \left(B + A \log \frac{1+x}{1-x}\right).$$

(2) $P_1 = \frac{3}{(2x+1)(x^2+x+1)}$; $v = \frac{(2x+1)^2}{x^2+x+1} z$

$$= \frac{x^2+x+1}{(2x+1)^2} \left\{B + A \int \frac{(2x+1)^4}{x^2+x+1}\,dx\right\}.$$

(3) $P_1 = -4 \cot x$; $y = \frac{z}{\sin^4 x} = B \sin^4 x$

$$+ A \frac{\cos x}{\sin^3 x} \{5 + 6 \sin^2 x + 8 \sin^4 x + 16 \sin^6 x\}.$$

3. Aufgabe.

(1) Setzt man $y = v x^{-\frac{1}{2}\gamma} (1-x)^{-\frac{1}{2}(\alpha+2-\gamma)}$, so wird:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{\gamma(2-\gamma) - 2\alpha(2-\gamma)x + \alpha(2-\alpha)x^2}{4(1-x)^2 x^2} v = 0.$$

$$P_1 = \frac{\gamma - 2 - (\alpha-2)x}{2(1-x)x}; \quad v = x^{\frac{1}{2}(\gamma-2)} (1-x)^{\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)} z;$$

$$z = x^{2-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha} \{B + A \int x^{\gamma-2} (1-x)^{\alpha-\gamma}\,dx\}.$$

Mithin: $y = x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-1} \{B + A \int x^{\gamma-2} (1-x)^{\alpha-\gamma}\,dx\}$.

Einfacher gelangt man zu diesem Resultat durch die Bemerkung, dass die Gleichung $x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \{\gamma - (\alpha+2)x\} \frac{dy}{dx} - \alpha y = 0$ eine exacte Differentialgleichung ist. Die einmalige Integration giebt: $x(1-x) \frac{dy}{dx} + (\gamma - 1 - \alpha x) y = A$ und daher, wie vorher: $y = x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-1} \{B + A \int x^{\gamma-2} (1-x)^{\alpha-\gamma}\,dx\}$.

(2) Durch die Substitution $y = x^{-1/2\alpha}(1-x)^{-1/2(\beta+1)}v$ geht die Gleichung über in:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{\alpha(2-\alpha)+2\alpha(\alpha-\beta-1)x-(\alpha-\beta-1)(\alpha-\beta+1)x^2}{4x^2(1-x)^2}v = 0.$$

Hier wird: $P_1 = -\frac{\alpha-(\alpha-\beta+1)x}{2x(1-x)}$; $v = x^{-1/2\alpha}(1-x)^{-1/2(1-\beta)}z$; $z = x^\alpha(1-x)^{1-\beta}\{B + A\int x^{-\alpha}(1-x)^{\beta-1}dx\}$. Somit schliesslich: $y = (1-x)^{-\beta}\{B + A\int x^{-\alpha}(1-x)^{\beta-1}dx\}$.

(3) Durch die Substitution $y = x^{-1/2(\alpha+1)}(1-x)^{-1/2\beta}v$ geht diese Gleichung über in: $\frac{d^2v}{dx^2}$

$$+\frac{(\alpha+1)(1-\alpha)+2(\alpha-1)(\alpha-\beta+1)x-(\alpha-\beta-1)(\alpha-\beta+1)x^2}{4x^2(1-x)^2}v = 0.$$

Hier wird: $P_1 = \frac{(\alpha-1)-(\alpha-\beta-1)x}{2x(1-x)}$; $v = x^{1/2(\alpha-1)}(1-x)^{-1/2\beta}z$ und $z = x^{1-\alpha}(1-x)^\beta\{B + A\int x^{\alpha-1}(1-x)^{-\beta}dx\}$. Somit schliesslich: $y = x^{-\alpha}\{B + A\int x^{\alpha-1}(1-x)^{-\beta}dx\}$.

4. Aufgabe. Die Gleichung für P_1 wird:

$\frac{dP_1}{dx} - P_1^2 = -\frac{A'x^2 + 2B'x + C'}{(x^2+2Ax+B)^2}$. Versucht man, dieselbe durch die Annahme $P_1 = \frac{M}{x-\alpha} + \frac{N}{x-\beta}$, wo α und β die Wurzeln der Gleichung $x^2 + 2Ax + B = 0$ und M und N Constanten sind, zu befriedigen, so erhält man zur Bestimmung der letzteren die drei Gleichungen:

$$(A)\quad \begin{aligned} M(M+1) + N(N+1) + 2MN &= A' \\ \beta . M(M+1) + \alpha N(N+1) + (\alpha+\beta)MN &= -B' \\ \beta^2 M(M+1) + \alpha^2 N(N+1) + 2\alpha\beta MN &= C'. \end{aligned}$$

Sollen dieselben zusammen bestehen können, so muss zwischen ihren Coefficienten eine gewisse Bedingungsgleichung stattfinden. Um diese abzuleiten, betrachte man die Grössen $M(M+1)$, $N(N+1)$, MN als Unbekannte und bestimme dieselben. Man erhält so:

$$(B)\quad \begin{aligned} M(M+1) &= (\alpha-\beta)^{-2}(\alpha^2A' + 2\alpha B' + C') \\ N(N+1) &= (\alpha-\beta)^{-2}(\beta^2A' + 2\beta B' + C') \\ MN &= -(\alpha-\beta)^{-2}(\alpha\beta A' + (\alpha+\beta)B' + C'). \end{aligned}$$

Dividirt man die beiden ersten Gleichungen des Systems (A) durch einander, so findet man: $\frac{M+N}{M\beta+N\alpha}=-\frac{A'}{B'}$, daher: $\frac{M}{N}=-\frac{A'\alpha+B'}{A'\beta+B'}$. Hieraus und aus der dritten Gleichung des Systems (B) folgen die beiden Gleichungen:

$$M=\pm(\alpha-\beta)^{-1}\left(\frac{A'\alpha+B'}{A'\beta+B'}\right)^{\frac{1}{2}}(\alpha\beta A'+(\alpha+\beta)B'+C')^{\frac{1}{2}}$$

$$N=\mp(\alpha-\beta)^{-1}\left(\frac{A'\beta+B'}{A'\alpha+B'}\right)^{\frac{1}{2}}(\alpha\beta A'+(\alpha+\beta)B'+C')^{\frac{1}{2}}.$$

Setzt man nun den Werth von M oder N in die erste resp. zweite Gleichung des Systems (B) ein, so findet man mit Berücksichtigung der Relationen: $\alpha+\beta=-2A$, $\alpha\beta=B$ die Bedingungsgleichung:

$$(B'^2-A'C')^2=(A'^2B-2A'B'A+B'^2)(A'B-2B'A+C').$$

Ist diese erfüllt, so ist somit die Methode des §. 68 auf die gegebene Gleichung anwendbar.

§. 69.

2. Aufgabe.

(1) $$\left(x\frac{d}{dx}+3\right)\left(a\frac{d}{dx}+b\right)y=0.$$

Setzt man $\left(a\frac{d}{dx}+b\right)y=z$, so wird: $x\frac{dz}{dx}+3z=0$, also: $z=Ax^{-3}$, ferner: $a\frac{dy}{dx}+by=Ax^{-3}$, also:

$$y=Be^{-\frac{b}{a}x}-\frac{A}{2}\left\{\frac{1}{x^2}+\frac{b}{a}\frac{1}{x}-\frac{b^2}{a^2}e^{-\frac{b}{a}x}\int\frac{e^{\frac{b}{a}x}}{x}dx\right\}.$$

(2) $\left\{(x-1)\frac{d}{dx}-1\right\}\left\{(x-2)\frac{d}{dx}-2\right\}y=0$. Setzt man $\left\{(x-2)\frac{d}{dx}-2\right\}y=z$, so erhält man: $(x-1)\frac{dz}{dx}-z=0$, also $z=C_1(x-1)$; ferner: $(x-2)\frac{dy}{dx}-2y=C_1(x-1)$, mithin: $y=C_2(x-2)^2-C_1(x-2)-\frac{1}{2}C_1$.

(3) $$\left\{(2x-1)\frac{d}{dx}-x+3\right\}\left\{\frac{d}{dx}-1\right\}y=0.$$

Setzt man $\left(\frac{d}{dx}-1\right)y=z$, so ist: $(2x-1)\frac{dz}{dx}-(x-3)z=0$, also: $z=C_1 e^{\frac{1}{2}x}(2x-1)^{-\frac{5}{4}}$; ferner: $\frac{dy}{dx}-y=C_1 e^{\frac{1}{2}x}(2x-1)^{-\frac{5}{4}}$; also $y=e^x\{C_2+C_1\int e^{-\frac{1}{2}x}(2x-1)^{-\frac{5}{4}}dx\}$.

(4) Setzt man $p=x+1$, $r=x+2$, $q=Ex+F$, $s=E'x+F'$, so erhält man zur Bestimmung der vier Grössen E, F, E', F' die sechs Gleichungen:

$$E+E'=5,\quad 2E+F+E'+F'=\frac{19}{2},\quad 2F+F'=3,$$

$$EE'=6,\quad FE'+EF'+E'=\frac{17}{2},\quad FF'+E'=4,$$

und diesen genügt man durch $E=2$, $F=\frac{1}{2}$, $E'=3$, $F'=2$. Somit ergiebt sich:

$$\left\{(x+1)\frac{d}{dx}+2x+\frac{1}{2}\right\}\left\{(x+2)\frac{d}{dx}+3x+2\right\}y=0.$$

Setzt man $\left\{(x+2)\frac{d}{dx}+3x+2\right\}y=z$, so wird: $(x+1)\frac{dz}{dx}+\left(2x+\frac{1}{2}\right)z=0$, also: $z=C_1 e^{-2x}(x+1)^{\frac{3}{2}}$. Ferner wird die Gleichung für y: $(x+2)\frac{dy}{dx}+(3x+2)y=C_1 e^{-2x}(x+1)^{\frac{3}{2}}$, daher $y=(x+2)^4 e^{-3x}\left\{C_2+C_1\int e^x\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{(x+2)^5}dx\right\}$.

(5) $$\left\{(x-1)\frac{d}{dx}-x-1\right\}\left\{(x+1)\frac{d}{dx}+x-1\right\}y=0.$$

Setzt man $\left\{(x+1)\frac{d}{dx}+x-1\right\}y=z$, so wird: $(x-1)\frac{dz}{dx}-(x+1)z=0$, also: $z=C_1 e^x(x-1)^2$; ferner: $(x+1)\frac{dy}{dx}+(x-1)y=C_1 e^x(x-1)^2$, also:

$$y=e^{-x}(x+1)^2\left\{C_2+C_1\int e^{2x}\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}dx\right\}.$$

(6) $$\left(x\frac{d}{dx}-3\right)\left\{x(a-bx)\frac{d}{dx}+bx-2a\right\}y=6a^2.$$

Setzt man $\left\{x(a-bx)\frac{d}{dx}+bx-2a\right\}y=z$, so wird: $x\frac{dz}{dx}-3z=6a^2$, also $z=C_1x^3-2a^2$, ferner: $x(a-bx)\frac{dy}{dx}-(2a-bx)y=C_1x^3-2a^2$, und somit: $y=\frac{x^2}{a-bx}\left(A+Bx+\frac{a^2}{x^2}\right)$. — Einfacher bringt man die Gleichung nach §. 59 durch die Substitution $y=\frac{x^2}{a-bx}v$ auf ihre Normalform $\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{6a^2}{x^4}$, aus der unmittelbar folgt: $v=A+Bx+\frac{a^2}{x^2}$, übereinstimmend mit dem Vorigen.

§. 70.

Aufgabe. Nimmt man für v die Reihe an: $v=S_0-S_1+S_2-\cdots$, so muss die Gleichung bestehen:

$$\frac{d^2S_0}{dx^2}-\frac{d^2S_1}{dx^2}+\frac{d^2S_2}{dx^2}-\cdots=-\mu S_0+\mu S_1-\mu S_2+\cdots$$

Derselben wird genügt, wenn man setzt: $\frac{d^2S_0}{dx^2}=0$, $\frac{d^2S_1}{dx^2}=\mu S_0$, $\frac{d^2S_2}{dx^2}=\mu S_1$, ... und allgemein: $\frac{d^2S_{m+1}}{dx^2}=\mu S_m$ und hieraus folgt: $S_0=C+C'x$, $S_{m+1}=\int_0^x dx\int_0^x\mu S_m\,dx$, vorausgesetzt, dass die untere Grenze 0 derart ist, dass μ innerhalb der Integrationsgrenzen endlich und stetig bleibt; sonst ist für 0 eine andere willkürliche Grenze a zu setzen, welche diese Eigenschaft besitzt. Der Beweis, dass die Reihe für v für alle Werthe von x, für welche μ endlich bleibt, convergirt, ist nicht schwer zu führen. Es bezeichne nämlich $|A|$ den absoluten Betrag einer Grösse A und M den absolut genommen grössten Werth, den μ innerhalb des betrachteten Intervalles haben kann. Dann ist zunächst: $|v|<|S_0|+|S_1|+|S_2|+\cdots$ Ferner ist:

$$|S_1|<\frac{1}{2}M.x^2.|S_0|,\ |S_2|<\frac{1}{4!}M^2.x^4.|S_0|,\ldots,\ |S_n|<\frac{1}{(2n)!}M^n.x^{2n}.|S_0|.$$

Mithin:

$$|v|<|S_0|\left\{1+\frac{Mx^2}{2!}+\frac{M^2x^4}{4!}+\cdots\right\}<\frac{1}{2}|S_0|\left(e^{x\sqrt{M}}+e^{-x\sqrt{M}}\right).$$

Da nun $|S_0|$ sowie der Ausdruck in der Parenthese für jeden endlichen Werth von x endlich bleibt, so folgt, dass die für v angegebene Reihe convergirt, wenn μ innerhalb des betrachteten Intervalls endlich bleibt. (Vergl. Sturm, Cours d'Analyse, T. II, p. 146.)

Ist $\mu = x^n$, so folgt:

$$v = C\left\{1 - \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^{n+4}}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} - \cdots\right\}$$
$$+ C'x\left\{1 - \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+3)} + \frac{x^{n+4}}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} - \cdots\right\}.$$

Für $n = 0$ ergiebt sich: $v = C \cos x + C' \sin x$, in der That das Integral von $\frac{d^2 v}{dx^2} + v = 0$.

§. 74.

Aufgabe. Bezeichnet man die in der angegebenen Weise gebildeten particulären Integrale mit $y_1, y_2, \ldots, y_m$, so müsste, wenn dieselben nicht von einander linear unabhängig wären, zwischen ihnen eine Relation bestehen von der Form $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_m y_m = 0$, worin die λ Constanten sind, die nicht sämmtlich verschwinden. Da $y_2, y_3, \ldots, y_m$ zu y_1 proportional sind, so kann man diese Gleichung durch y_1 dividiren und dann nach x differentiiren. Dadurch fällt λ_1, falls dasselbe nicht schon vorher gleich Null war, aus der Gleichung heraus und die so entstehende Gleichung lässt sich wegen der besonderen Form der Werthe von $\frac{y_2}{y_1}, \cdots, \frac{y_m}{y_1}$ durch z_1 theilen. Geschieht dies und differentiirt man von neuem, so fällt λ_2 fort und die neue Gleichung wird theilbar durch u_1. So fortfahrend gelangt man zu dem Schlusse, dass w_1 oder, falls λ_m an sich Null ist, eine der früheren entsprechenden Grössen verschwinden müsste. Dies ist aber absurd. Mithin sind die in der beschriebenen Art erhaltenen particulären Integrale der gegebenen Gleichung von einander linear unabhängig.

Bilden wir nun die Determinante, so ist zunächst:

$$\varDelta = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \ldots, & y_m \\ y_1', & y_2', & \ldots, & y_m' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(m-1)}, & y_2^{(m-1)}, & \ldots, & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} \varDelta_1.$$

Setzt man zur Abkürzung: $\int z_1\,dx = A_1$, $\int z_1\,dx \int u_1\,dx = A_2, \ldots$ $\int z_1\,dx \int u_1\,dx \ldots \int w_1\,dx = A_{m-1}$, so ergiebt sich:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_1\,,\; y_1 A_1,\; y_1 A_2\,,\;\ldots,\; y_1 A_{m-1} \\ y_1',\; y_1' A_1 + y_1 z_1,\; y_1' A_2 + y_1 z_1 A_1\,,\;\ldots,\; y_1' A_{m-1} + y_1 z_1 A_{m-2} \\ y_1'',\; y_1'' A_1 + P_1,\; y_1'' A_2 + P_1 A_1 + y_1 z_1 u_1,\ldots,\; y_1'' A_{m-1} + P_1 A_{m-2} \\ \qquad\qquad + y_1 z_1 u_1 A_{m-3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1^{(m-1)}, y_1^{(m-1)} A_1 + P_{m-2},\; y_1^{(m-1)} A_2 + P_{m-2} A_1 + P'_{m-3},\;\ldots, \\ y_1^{(m-1)} A_{m-1} + P_{m-2} A_{m-2} + P'_{m-3} A_{m-3} + \cdots + y_1 z_1 \ldots w_1 \end{vmatrix},$$

wobei die P gewisse Ausdrücke bezeichnen, auf deren besonderen Werth es hier nicht ankommt. Man subtrahire nun von den Elementen der zweiten, dritten, ..., $m$ten Colonne die mit respective A_1, A_2, ..., A_{m-1} multiplicirten Elemente der ersten Colonne. Da hierdurch der Werth der Determinante nicht geändert wird und überdies sämmtliche Elemente der ersten Zeile mit Ausnahme des ersten verschwinden, so folgt:

$$\Delta_1 = y_1 \begin{vmatrix} y_1 z_1,\; y_1 z_1 A_1,\;\ldots,\; y_1 z_1 A_{m-2} \\ P_1,\; P_1 A_1 + y_1 z_1 u_1,\;\ldots,\; P_1 A_{m-2} + y_1 z_1 u_1 A_{m-3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{m-2},\; P_{m-2} A_1 + P'_{m-3},\ldots,\; P_{m-2} A_{m-2} + P'_{m-3} A_{m-3} + \cdots \\ \qquad + y_1 z_1 \ldots w_1 \end{vmatrix}.$$

Jetzt subtrahire man wieder von den Elementen der zweiten, dritten, ..., $(m-1)$ten Colonne die mit resp. A_1, $A_2, \ldots, A_{m-2}$ multiplicirten Elemente der ersten Colonne. Da wieder die Elemente der ersten Zeile mit Ausnahme des ersten verschwinden, so erhält man:

$$\Delta_1 = y_1^2 z_1 \begin{vmatrix} y_1 z_1 u_1\,,\ldots,\; y_1 z_1 u_1 A_{m-3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P'_{m-3},\;\ldots,\; P'_{m-3} A_{m-3} + \cdots + y_1 z_1 \ldots w_1 \end{vmatrix}.$$

Fährt man in derselben Weise weiter fort, so ergiebt sich schliesslich, dass der Werth von Δ_1 gleich dem Producte der in den Diagonalelementen auftretenden Grössen

$$y_1,\; y_1 z_1,\; y_1 z_1 u_1,\;\ldots,\; y_1 z_1 \ldots w_1,$$

oder also $\Delta_1 = y_1^m \,.\, z_1^{m-1} \,.\, u_1^{m-2} \ldots w_1$ ist. Mithin ist endlich:

$$\Delta = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)}\, y_1^m \,.\, z_1^{m-1} \,.\, u_1^{m-2} \ldots w_1.$$

(Fuchs, Crelle's Journ. Bd. 66.)

§. 75.

1. Aufgabe. Nimmt man auch das allgemeine Integral der vollständigen Gleichung in der Form $y = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + A_3 f_3(x)$ an, wo aber A_1, A_2, A_3 Functionen von x sind, so erhält man, wenn man durch oben angefügte Striche Differentiationen nach x bezeichnet, zur Bestimmung von A_1, A_2, A_3 die drei Gleichungen:

$$f_1 A_1' + f_2 A_2' + f_3 A_3' = 0$$
$$f_1' A_1' + f_2' A_2' + f_3' A_3' = 0$$
$$f_1'' A_1' + f_2'' A_2' + f_3'' A_3' = \psi(x),$$

aus denen folgt, wenn man zur Abkürzung $\Sigma \pm f_1 . f_2' . f_3'' = \varDelta$ setzt:

$$A_1' = \frac{\psi(x)}{\varDelta}(f_2 f_3' - f_3 f_2'),\ A_2' = \frac{\psi(x)}{\varDelta}(f_3 f_1' - f_1 f_3'),$$
$$A_3' = \frac{\psi(x)}{\varDelta}(f_1 f_2' - f_2 f_1').$$

Mithin wird:

$$A_1 = C_1 + \int^x \frac{\psi(\xi)}{\varDelta(\xi)} \{f_2(\xi) f_3'(\xi) - f_3(\xi) f_2'(\xi)\}\, d\xi,$$

und analog für A_2 und A_3.

Nach §. 74 ist aber

$$\varDelta(\xi) = C e^{-\int^{\xi} \varphi(z)\, dz} = e^{-\int_a^{\xi} \varphi(z)\, dz},$$

wo sowohl C als a bestimmte Constanten bedeuten. Daher ist

$$A_1 = C_1 + \int^x \psi(\xi)\, e^{\int_a^{\xi} \varphi(z)\, dz} [f_2(\xi) f_3'(\xi) - f_3(\xi) f_2'(\xi)]\, d\xi.$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck für y ein und beachtet, dass

$$f_1(x)\{f_2(\xi)f_3'(\xi) - f_3(\xi)f_2'(\xi)\} + f_2(x)\{f_3(\xi)f_1'(\xi) - f_1(\xi)f_3'(\xi)\}$$
$$+ f_3(x)\{f_1(\xi)f_2'(\xi) - f_2(\xi)f_1'(\xi)\} = \Sigma \pm f_1'(\xi) f_2(\xi) f_3(x)$$

ist, so erhält man die im Texte angegebene Formel.

2. Aufgabe.

(1) Die beiden particulären Integrale der verkürzten Gleichung sind: $y_1 = x$ und $y_2 = x e^{2x}$. Hieraus folgt als allgemeines Integral der vollständigen Gleichung:

$$y = C_1 x + C_2 x e^{2x} - x e^{2x} \int x^{-1} e^{-2x}\, dx.$$

(2) Man erkennt leicht die drei particulären Integrale der verkürzten Gleichung: $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, $y_3 = x^2$. Nach der allgemeinen Formel des §. 75 erhält man dann als vollständiges Integral der gegebenen Gleichung:

$$y = \cos x\left(C_1 + 2\int\frac{\cos x + x\sin x}{x^2+2}dx\right)$$

$$+ \sin x\left(C_2 + 2\int\frac{\sin x - x\cos x}{x^2+2}dx\right) + x^2\{C_3 + 2^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arctang}(2^{-\frac{1}{2}}x)\}.$$

§. 77.

Aufgabe. Zwei particuläre Integrale der Gleichung

$$\frac{d^3y}{dx^3} = P\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y\right)$$

sind $y_1 = x$, $y_2 = x^2$. Als drittes findet man nach der allgemeinen Formel des §. 77 den Ausdruck:

$$y_3 = y_1\int\frac{\varDelta_1}{\varDelta^2}e^{\int Px^2dx}dx + y_2\int\frac{\varDelta_2}{\varDelta^2}e^{\int Px^2dx}dx,$$

wo $\varDelta = -x^2$, $\varDelta_1 = x^2$, $\varDelta_2 = -x$ zu setzen ist. Daher wird:

$$y_3 = x\int e^{\int Px^2dx}x^{-2}dx - x^2\int e^{\int Px^2dx}x^{-3}dx.$$

Aus diesen drei Integralen findet man dann das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung wie in der 1. Aufgabe des §. 75.

§. 81.

3. Aufgabe. Gleichung der Trajectorie ist: $\xi^2 + n\eta^2 = C$.

4. Aufgabe. Die Differentialgleichung der Trajectorien ist dieselbe wie die der Ellipsenschaar, nämlich, wenn $2e$ die Brennpunktsentfernung der confocalen Ellipsen ist:

$$xyp^2 + (x^2 - y^2 - e^2)p - xy = 0.$$

[Vergl. §. 30, 7. Aufgabe (δ)]. Daraus folgt, dass die gesuchten Trajectorien ebenfalls ein System unter sich und mit der Ellipsenschaar confocaler Kegelschnitte bilden und daher durch die zur Ellipsenschaar confocale Hyperbelschaar dargestellt werden.

5. Aufgabe.

(1) $R^n \cos n\Theta = A^n$.

(2) $R^2(C - \cos 2\Theta) = a^2$, oder in Cartesischen Coordinaten:

$$X^2(C-1) + Y^2(C+1) = a^2.$$

6. Aufgabe. Differentiirt man $f(x+iy)=u+iv$ zuerst partiell nach x, dann nach y, so erhält man:

$$f'(x+iy)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x},\quad if'(x+iy)=\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y},$$

also: $\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=i\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)$. Da u und v reell sind, so muss sein: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Hieraus folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Da nun $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$, resp. $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ den Richtungscosinussen der Normale an die Curven $u=const.$ resp. $v=const.$ proportional sind, so folgt aus letzterer Gleichung, dass diese Curven orthogonale Trajectorien von einander sind.

Aus den Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ folgt ferner: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ und $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$. Transformirt man die letztere, indem man für y eine neue Veränderliche t einführt, mittelst der Relation $y=xt$, so ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-2\frac{t}{x}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial t}+\frac{1+t^2}{x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{2t}{x^2}\frac{\partial v}{\partial t}=0.$$

Soll nun v eine homogene Function $n$ter Ordnung von x, y, also $v(x,y)=x^n\varphi(t)$ sein, so muss $\varphi(t)$ der Bedingung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}(1+t^2)-2(n-1)t\frac{d\varphi}{dt}+n(n-1)\varphi=0$$

genügen. Nun ist:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=\frac{\partial v}{\partial y}dx-\frac{\partial v}{\partial x}dy.$$

Führt man auch hierin wieder t für y ein, so wird:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=x^{n-1}\left(n\varphi-t\frac{d\varphi}{dt}\right),\quad \frac{\partial v}{\partial y}=x^{n-1}\frac{d\varphi}{dt},$$

also:

$$du=\left\{(1+t^2)\frac{d\varphi}{dt}-nt\varphi\right\}x^{n-1}dx+x^n\left(t\frac{d\varphi}{dt}-n\varphi\right)dt.$$

Betrachtet man hierin zuerst t als unveränderlich und integrirt

dann, so ergiebt sich: $n u = \left\{(1+t^2)\frac{d\varphi}{dt} - n t \varphi\right\} x^n + A$, wo A in Bezug auf x constant ist, aber eine Function von t sein kann. Differentiirt man dies und vergleicht den sich ergebenden Werth von du mit dem vorigen, so erhält man:

$$\frac{dA}{dt} + x^n\left\{(1+t^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2} - 2(n-1)t\frac{d\varphi}{dt} + n(n-1)\varphi\right\} = 0,$$

oder mit Rücksicht auf die Bedingung, welcher φ genügt: $\frac{dA}{dt} = 0$, d. h. A ist eine eigentliche Constante. Dieselbe braucht jedoch nicht gleich Null zu sein, vielmehr hat sie einen bestimmten, aus der Form der gegebenen Function $f(x+iy)$ resultirenden Werth. Es ist also: $n u = \left\{(1+t^2)\frac{d\varphi}{dt} - n t\varphi\right\} x^n + A$, oder mit Rücksicht auf die Werthe von $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$: $A + x\frac{\partial v}{\partial y} - y\frac{\partial v}{\partial x} = A + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = n u$, d. h. u ist, abgesehen von einer additiven Constanten, ebenfalls eine homogene Function $n$ter Ordnung. — Hieraus kann man auch leicht ableiten, welche Form $f(x+iy)$ haben muss, damit v eine homogene Function $n$ter Ordnung sei. Dann ist nämlich: $n v = x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y}$, daher $n(u+iv) = A + x\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = (x+iy)\frac{\partial}{\partial x}(u+iv)$, demnach

$$(x+iy)f'(x+iy) + A = n f(x+iy),$$

und hieraus folgt: $f(x+iy) = \frac{1}{n}A + B(x+iy)^n$.

Ist $n = 0$, so genügt φ der Bedingung:

$$(1+t^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2t\frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

also ist: $\varphi = A + B \operatorname{arc\,tang} t$, somit $v = A + B \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}$.

Ferner ist $du = \frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy = B\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$, mithin:

$$u = C + B\log(x^2+y^2)^{1/2}, \text{ und } f(x+iy) = \alpha + B\log(x+iy).$$

7. Aufgabe. Ist m die trigonometrische Tangente des Win-

kels, unter welchem die Kreise von den Trajectorien geschnitten werden, so ist die Gleichung dieser letzteren:

$$log\,(\xi^2+\eta^2)^{1/2} = m\,arc\,tang\,\frac{\eta}{\xi} + C \text{ (Logarithmische Spiralen).}$$

Vermischte Aufgaben.

1. (1) $y = C_1\left\{\frac{sin\,n\,x}{n\,x} - \frac{cos\,n\,x}{n^2\,x^2}\right\} + C_2\left\{\frac{cos\,n\,x}{n\,x} - \frac{sin\,n\,x}{n^2\,x^2}\right\}.$

(2) Entweder wende man §. 67 an oder man setze

$$\frac{dy}{dx} = p,\ \frac{d^2y}{dx^2} = p\,\frac{dp}{dy} \text{ und dann } p = yu.$$

Man erhält: $y = \frac{C}{cos^2(x+\alpha)}$.

(3) Man setze $\frac{dy}{dx} = p,\ \frac{d^2y}{dx^2} = p\,\frac{dp}{dy}$ und dann $p = yu$.

Dadurch erhält man die Gleichung: $\frac{dy}{y} + \frac{(1+u^2)\,u\,du}{1+u^2+u^4} = 0$, also $log\,y^2 + \frac{1}{2}\,log\,(u^4+u^2+1) + \frac{1}{3^{1/2}}\,arc\,tang\,\frac{2\,u^2+1}{3^{1/2}} = C$. Hieraus bestimmt sich u als Function von y, somit durch $dx = \frac{dy}{yu}$ auch x als Function von y. — Oder man setze einfacher $y = e^u$ und $\frac{du}{dx} = v$, so wird: $dx + \frac{(1+v^2)\,dv}{1+v^2+v^4} = 0$, also

$$arc\,tang\,\frac{3^{1/2}v}{1-v^2} = C - 3^{1/2}x, \text{ oder } \frac{3^{1/2}v}{1-v^2} = tang\,(C - 3^{1/2}x);$$

hieraus: $v = -\frac{1}{2}\,3^{1/2}\,cot\,(C - 3^{1/2}x) \pm \left\{1 + \frac{3}{4}\,cot^2\,(C - 3^{1/2}x)\right\}^{1/2}$.

Demnach schliesslich:

$$u = C_1 + \frac{1}{2}\,log\,sin\,(C - 3^{1/2}x) \pm \int\left\{1 + \frac{3}{4}\,cot^2\,(C - 3^{1/2}x)\right\}^{1/2} dx.$$

(4) $xy = C_1 + C\int e^{\int\varphi(x)\,dx}\,dx$.

(5) Setzt man $x = e^\vartheta,\ y = \frac{z}{x}$, so wird:

$\left(2z - \frac{dz}{d\vartheta}\right)\frac{d^2z}{d\vartheta^2} = \left(\frac{dz}{d\vartheta}\right)^2$, also für $\frac{dz}{d\vartheta} = p$: $(2z - p)p\,\frac{dp}{dz} = p^2$, d. i. entweder $p = 0$ oder $(2z - p)\frac{dp}{dz} = p$. Erstere Annahme führt zu der singulären Lösung: $y = \frac{C}{x}$, letztere zu der Gleichung: $z = p + Cp^2$. Hieraus durch Differentiation nach ϑ:

$$d\vartheta = \frac{dp}{p} + 2\,C\,dp, \text{ also } \vartheta = log\,C_1 + log\,p + 2\,Cp.$$

Man hat also z und ϑ ausgedrückt als Functionen von p und damit auch x und y, und zwar wird: $x = C_1 p\, e^{2Cp}$, $y = \frac{1 + Cp}{C_1}\, e^{-2Cp}$.

(6) Man setze $y = \frac{v}{sin\,n\,x}$. Es wird:

$$y = \frac{A\,cos\,m\,x + B\,sin\,m\,x}{sin\,n\,x}.$$

(7) Man kann die Gleichung in der Form schreiben:

$$\frac{d}{dx}\left\{(x + y)\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)\right\} = 0.$$

Man findet: $(x + y)^2 = C_1 x^2 + C_2$.

(8) Auflösung genau so wie in §. 54, 3. Aufg. Nro. (3). Allgemeine Lösung: $Cy + C_1 = e^{Cx}$, singuläre: $y = n\,a\,sin\,\frac{C - x}{a}$.

(9) $y = B + (A - Bx)\,cot\,x$.

(10) Setzt man $\frac{dy}{dx} = p$, so wird: $\frac{dp}{dx} + p\,\varphi(x) + p^n f(x) = 0$, welche Gleichung zu den in §. 15 behandelten gehört.

2. Für $y = u + \frac{v}{x}$ geht die Gleichung über in:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u + \frac{1}{x}\left(\frac{d^2v}{dx^2} + v\right) - \frac{2}{x^2}\left(u + \frac{dv}{dx}\right) = 0.$$

Setzt man: $u + \frac{dv}{dx} = 0$, also $\frac{d^2u}{dx^2} + u + \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2v}{dx^2} + v\right) = 0$, so wird sowohl diese Gleichung wie die vorige befriedigt, wenn man $v = A\,cos\,(x + \alpha)$, $u = A\,sin\,(x + \alpha)$ nimmt. Daher ist

$$y = A\left\{\sin(x+\alpha) + \frac{\cos(x+\alpha)}{x}\right\} = C_1\left\{\sin x + \frac{\cos x}{x}\right\} + C_2\left\{\cos x - \frac{\sin x}{x}\right\}.$$

Die Variation der Constanten ergiebt dann für die zweite Gleichung das Integral:

$$y = C'\left\{\sin x + \frac{\cos x}{x}\right\} + C''\left\{\cos x - \frac{\sin x}{x}\right\} + x^2.$$

3. Man substituire $y = \frac{e^{nx}}{x}v$. Es wird: $y = e^{nx}\left(A + \frac{B}{x}\right)$.

Um aber die Methode der Variation der Parameter anzuwenden, muss man ein particuläres Integral der Gleichung kennen. Ein solches ist e^{nx}, also $y = Ce^{nx}$. Betrachtet man C als Function von x, so wird: $\frac{d^2C}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dC}{dx} = 0$, also $C = A + \frac{B}{x}$.

4. Setzt man $y = e^{\lambda x}$, so wird:

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 + x(b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0) = 0,$$

oder: $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ und $b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 = 0$. Sollen diese Gleichungen eine gemeinsame Wurzel haben, so muss

$$(a_0b_1 - a_1b_0)(a_1b_2 - a_2b_1) = (a_0b_2 - a_2b_0)^2$$

sein. Ist diese Bedingung erfüllt und λ jene gemeinschaftliche Wurzel, so ist $y_1 = e^{\lambda x}$ ein particuläres Integral der gegebenen Gleichung. Setzt man sodann $y = e^{\lambda x}z$ und $\frac{dz}{dx} = u$, so erhält man für u die Gleichung: $\frac{du}{u} = -\left(2\lambda + \frac{a_1 + b_1x}{a_2 + b_2x}\right)dx$. Ist hierin $b_2 \gtrless 0$, so ergiebt sich hieraus:

$$\log u = \log C - (2\lambda + \varkappa)x + \mu\log(a_2 + b_2x),$$

also: $y = e^{\lambda x}\{C_1 + C\int(a_2 + b_2x)^\mu e^{-(2\lambda+\varkappa)x}dx\}$, wo $\varkappa = \frac{b_1}{b_2}$, $\mu = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_2^3}$ ist. Ist aber $b_2 = 0$, so folgt:

$$\log u = \log C - \left(2\lambda + \frac{a_1}{a_2}\right)x - \frac{b_1}{2a_2}x^2,$$

also $y = e^{\lambda x}\left\{C_1 + C\int e^{-\left(2\lambda+\frac{a_1}{a_2}\right)x - \frac{b_1}{2a_2}x^2}dx\right\}$.

(Schlömilch, Comp. d. höheren Analysis Bd. II.)

5. Allgemeines Integral: $u = \frac{A + B\cos x}{\sin x}\cdot$ Den angegebenen Bedingungen wird genügt, wenn man $A = 1$ und $B = -1$ setzt. Dann ist $u = \operatorname{tang}\frac{x}{2}\cdot$

Setzt man in der zweiten Gleichung $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = p\,\frac{dp}{dy}$, so ist: $p^2 = y^2\left\{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^{2n}\right\} + C$, und da für $x = 0$ auch $p = 0$ und $y = a$ sein soll, so folgt $C = 0$, also $p = y\left\{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}}$,

folglich: $C_1 e^{2nx} = \frac{\left\{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}} - 1}{\left\{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}} + 1}\cdot$ Da $y = a$ ist für $x = 0$,

so muss $C_1 = -1$ sein. Mithin: $y^n = \frac{2a^n e^{nx}}{1 + e^{2nx}}\cdot$

6. Ist y_1 das beiden Gleichungen gemeinsame Integral, so findet man: $y_1 = C e^{-\int\frac{Q-Q'}{P-P'}dx}$. Somit ist nach §. 65 das vollständige Integral der ersten:

$$y = e^{-\int\frac{Q-Q'}{P-P'}dx}\left\{A + B\int e^{\int\left(2\frac{Q-Q'}{P-P'} - P\right)dx} dx\right\},$$

das der zweiten:

$$y = e^{-\int\frac{Q-Q'}{P-P'}dx}\left\{A_1 + B_1\int e^{\int\left(2\frac{Q-Q'}{P-P'} - P'\right)dx} dx\right\}.$$

Setzt man den Werth von y_1 in eine der beiden gegebenen Gleichungen ein, so findet man als Bedingung dafür, dass beide ein gemeinschaftliches Integral haben, die Gleichung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{Q-Q'}{P-P'}\right) = \left(\frac{Q-Q'}{P-P'}\right)^2 + \frac{PQ' - P'Q}{P-P'}.$$

7. Setzt man: $P_1 = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$, so muss nach §. 68 die Gleichung stattfinden:

$$\left(A + A^2 - \mathfrak{a},\ B + B^2 - \mathfrak{b},\ C + C^2 - \mathfrak{c},\ BC - \frac{1}{2}(\mathfrak{a} - \mathfrak{b} - \mathfrak{c}),\right.$$

$$\left. CA - \frac{1}{2}(\mathfrak{b} - \mathfrak{c} - \mathfrak{a}),\ AB - \frac{1}{2}(\mathfrak{c} - \mathfrak{a} - \mathfrak{b})\right)\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{x-b}, \frac{1}{x-c}\right)^2 = 0$$

Dieselbe wird erfüllt sein, wenn sich A, B, C den Gleichungen gemäss bestimmen lassen:

$$A + A^2 = \mathfrak{a},\ B + B^2 = \mathfrak{b},\ C + C^2 = \mathfrak{c},\ 2\,B\,C = \mathfrak{a} - \mathfrak{b} - \mathfrak{c},$$
$$2\,C\,A = \mathfrak{b} - \mathfrak{c} - \mathfrak{a},\ 2\,A\,B = \mathfrak{c} - \mathfrak{a} - \mathfrak{b}.$$

Setzt man die aus den drei ersten sich ergebenden Werthe von A, B, C in die drei letzten ein, so findet man aus jeder die Bedingungsgleichung:

$$\left(\mathfrak{a} + \frac{1}{4}\right)^{1/2} + \left(\mathfrak{b} + \frac{1}{4}\right)^{1/2} + \left(\mathfrak{c} + \frac{1}{4}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Ferner ist alsdann:

$$A = \left(\mathfrak{a} + \frac{1}{4}\right)^{1/2} - \frac{1}{2},\ B = \left(\mathfrak{b} + \frac{1}{4}\right)^{1/2} - \frac{1}{2},\ C = \left(\mathfrak{c} + \frac{1}{4}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}.$$

Schliesslich wird:

$$v = (x-a)^{-A}(x-b)^{-B}(x-c)^{-C}\left\{C_1 + C_2\int (x-a)^{2A}(x-b)^{2B} \times (x-c)^{2C}\,dx\right\}.$$

8. Es müssen m und n der Gleichung

$$(m+n)(m+n-1)x^2 + 2(mb+na)(m+n-1)x + m(m-1)b^2 + 2\,m\,n\,a\,b + n(n-1)\,a^2 = k^2$$

genügen. Dies ist der Fall, wenn $m+n-1=0$ und $m(m-1)b^2 + 2\,m\,n\,a\,b + (n-1)\,n\,a^2 = k^2$ ist. Setzt man $\left\{1 + \left(\frac{2\,k}{a-b}\right)^2\right\}^{1/2} = \lambda$, so folgt: $m = \frac{1}{2}(1 \pm \lambda)$, $n = \frac{1}{2}(1 \mp \lambda)$. Somit ergiebt sich:

$$y = \{(x+a)(x+b)\}^{1/2}\left\{A\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{1/2\lambda} + B\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^{1/2\lambda}\right\}.$$

Setzt man in der zweiten Gleichung ebenfalls $y = (x+a)^m(x+b)^n$, so wird die Gleichung zwischen m und n: $\{2(m+n)(2m+2n+1)\}x^2 + \{8(m+n)(mb+na) + (2m+1)a + (2m+4n-1)b\}x + (4m^2-1)b^2 + (4n+1)(2m+1)ab + 2n(2n-1)a^2 = 0$. Derselben wird genügt entweder durch $m = -\frac{1}{2}$ und $n = 0$ oder durch $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$. Daher ist: $y = (x+a)^{-1/2}[A + B(x+b)^{1/2}]$.

Setzt man ebenso in der 1. Aufg. des §. 68 $y = x^m 1(-x)^n$, so muss sein: $(m+n)(m+n-1)x^2 - 2\{m(m+n-1)+1\}x + m(m-1) = 0$, woraus folgt: $m = -n = +1$. Man erhält also hier nur ein particuläres Integral: $y = \frac{x}{1-x}$.

9. Man setze in der ersten Gleichung $x = \frac{1}{u}$, sodann in der resultirenden Gleichung $z = \frac{\zeta}{u}$, so geht die Gleichung $\frac{d^2 z}{dx^2} = ax^{n-2} z$ in $\frac{d^2\zeta}{du^2} = au^{-n-2}\zeta$ über. Ist daher $z = \varphi(x)$ ein Integral der ersten, so ist $\zeta = u\,\varphi\left(\frac{1}{u}\right)$ ein Integral der letzteren. Für das Beispiel ist $n = 2$, ferner das Integral von $\frac{d^2 z}{dx^2} = Az$:

$$z = C_1 e^{A^{1/2} x} + C_2 e^{-A^{1/2} x},$$

daher das von $x^4 \frac{d^2 z}{dx^2} = Az$:

$$z = x\left(C_1 e^{\frac{A^{1/2}}{x}} + C_2 e^{-\frac{A^{1/2}}{x}}\right).$$

10. Man setze in der ersten Gleichung $x = \frac{au + b}{cu + d}$, sodann in der resultirenden Gleichung $z = \frac{\zeta}{cu + d}$, so ergiebt sich:

$$(cu + d)^4 \frac{d^2\zeta}{du^2} = \zeta\,\psi\left(\frac{au + b}{cu + d}\right).$$

Ist daher $z = \varphi(x)$ eine Lösung der gegebenen Gleichung, so ist $\zeta = (cu + d)\,\varphi\left(\frac{au + b}{cu + d}\right)$ eine Lösung der transformirten Gleichung.

Durch die Substitutionen $x = \frac{bu - \frac{a}{b-a}}{-u + \frac{1}{b-a}}$, $y = \frac{z}{-u + \frac{1}{b-a}}$ geht die Gleichung in Nro. 8 über in: $u^2 \frac{d^2 z}{du^2} = \left(\frac{k}{b-a}\right)^2 . z$, und aus dieser folgt, wenn man $\left\{1 + \left(\frac{2k}{b-a}\right)^2\right\}^{1/2} = \lambda$ setzt:

$$z = (A u^{1/2\lambda} + B u^{-1/2\lambda})\, u^{1/2},$$

mithin erhält man, da $u = \frac{1}{b-a}\,\frac{x + a}{x + b}$ ist,

$$y = \{(x + a)(x + b)\}^{1/2} \left\{\frac{A}{(b-a)^{1/2 + 1/2\lambda}} \left(\frac{x + a}{x + b}\right)^{1/2\lambda} + \frac{B}{(b-a)^{1/2 - 1/2\lambda}} \left(\frac{x + b}{x + a}\right)^{1/2\lambda}\right\},$$ wie früher.

11. Durch die Substitution $a + bx = e^{\vartheta}$ erhält man eine Gleichung mit constanten Coefficienten, die nach den §§. 43 bis 46 zu behandeln ist, oder man setze $a + bx = t$ und verfahre nach den §§. 47, 48 resp. wende die Methode der Variation der Parameter an.

12. Man substituire $y = v \cdot e^{-\frac{1}{2}\int (2X + a)\,dx}$, dann wird:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \left(\frac{a^2}{4} - b\right) v,$$

also, wenn $\left(\frac{a^2}{4} - b\right)^{\frac{1}{2}} = \lambda$ ist, $v = A e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x}$.

13. Man setze $y = y_1 + z$, so bestimmt sich z durch die nach §. 15 integrable Gleichung: $\frac{dz}{dx} + 2 y_1 X_1 z + X_1 z^2 = 0$. — Für das Beispiel ist $y_1 = \frac{1}{\cos x}$, also $\frac{dz}{dx} + 2 \tan x \cdot z + \sin x \cdot z^2 = 0$, daher: $z = \frac{3 \cos^2 x}{C - \cos^3 x}$.

14. Man eliminire aus den Werthen von z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2 z}{dx^2}$ die Constanten A' und B'. Dies giebt:

$$F(x) \frac{d^2 z}{dx^2} - \left\{ \frac{y_1 y_2'' - y_2 y_1''}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} F(x) + (m-1) \frac{dF(x)}{dx} \right\} \frac{dz}{dx}$$
$$+ m \left\{ (m-1) y_1' y_2' + \frac{y_1' y_2'' - y_2' y_1''}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} F(x) \right\} z = 0.$$

Es ist aber:

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = -p\,(y_1 y_2' - y_2 y_1'),\quad y_1' y_2'' - y_2' y_1'' = q\,(y_1 y_2' - y_2 y_1')$$

und $y_1' y_2' = \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{1}{2}\, p \frac{dF}{dx} + q F$. Setzt man diese Werthe ein, so erhält man die im Texte angegebene Gleichung.

15. Nach §. 65 ist: $y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = C e^{-\int P\,dx}$, wo C eine bestimmte, nicht verschwindende Constante ist. Nehmen wir an, sie sei positiv, so ist $y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} > 0$, es können daher y_1 und $\frac{dy_1}{dx}$ nicht gleichzeitig verschwinden. Dasselbe gilt von y_2 und $\frac{dy_2}{dx}$. Ist nun $y_1 = 0$ für $x = a$ und $x = b$, wo $b > a$, so folgt aus

obiger Ungleichheit in beiden Fällen: $y_2 \frac{d y_1}{d x} < 0$, d. h. es sind y_2 und $\frac{d y_1}{d x}$ von entgegengesetztem Vorzeichen. Wächst aber x von a bis b, so muss nach einem bekannten Satze $\frac{d y_1}{d x}$ für einen gewissen Werth $x = \alpha$ innerhalb dieses Intervalls sein Zeichen ändern; folglich muss auch y_2 sein Zeichen ändern, bevor x gleich b geworden ist, d. h. es verschwindet y_2 für einen Werth von x, der zwischen zwei auf einander folgenden Wurzeln $x = a$ und $x = b$ der Gleichung $y_1 = 0$ gelegen ist. Ebenso giebt es zwischen zwei auf einander folgenden Wurzeln der Gleichung $y_2 = 0$ einen Werth, für welchen y_1 verschwindet. Es verschwinden daher y_1 und y_2 bei wachsendem x abwechselnd nach einander. — Wie leicht einzusehen, gilt dies aber nur, so lange y_1 und y_2 endlich und stetig bleiben. (Sturm, Cours d'Anal. Bd. II, S. 139.)

16. (1) $y = C_1 \operatorname{cosec} \vartheta + C_2 \cot \vartheta - \vartheta - 2 \cot \frac{\vartheta}{2} \log\left(\cos \frac{\vartheta}{2}\right)$. (Vergl. Nr. 5.)

(2) $y = \log x \left(C_1 + C_2 \int \frac{dx}{(\log x)^2} + e^x\right)$.

(3) Bei Gleichungen von der Form

$$\varphi(x) \frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{1}{2} \frac{d \varphi(x)}{d x} \frac{d y}{d x} + f(x) y = 0$$

setzt man zweckmässig $\int \frac{d x}{\{\varphi(x)\}^{1/2}} = t$. Dadurch geht diese Form über in: $\frac{d^2 y}{d t^2} + f_1(t) y = 0$, wo $f_1(t)$ aus $f(x)$ dadurch entsteht, dass man für x seinen Werth in t setzt. — In unserem Beispiel wird $y = A e^{nt} + B e^{-nt}$, wo $t = \int \frac{d x}{(1 + a x^2)^{1/2}}$.

(4) $y = A e^{nt} + B e^{-nt}$, wo $t = \int \frac{d x}{x (x^2 + a)^{1/2}}$. Uebrigens geht diese Gleichung aus der vorigen hervor, wenn man darin $\frac{1}{x}$ statt x setzt.

(5) Setzt man $y = \frac{e^{n x}}{x^a} v$, so folgt:

$$x^2 \frac{d^2 v}{d x^2} - a(a-1) v = x^{a+2};$$

und hieraus:

$$v = A x^a + B x^{1-a} + \frac{1}{2(2a+1)} x^{a+2}.$$

(6) Man setze $y = (a-x)^\lambda (a+x)^\mu$ und bestimme λ und μ zweckmässig. Es folgt: $y = \dfrac{A}{(a-x)^3} + \dfrac{B}{(a+x)^3}$.

(7) $\left\{(3-x)\dfrac{d}{dx} + 3x - 6\right\}\left\{\dfrac{d}{dx} - 1\right\} y = 0$. Hieraus: $y = e^x \{A + B \int e^{2x} (3-x)^3 dx\}$.

17. Die Relation zwischen Q und R lässt sich in der Form schreiben: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{Q}{R}\right) = 1$, also: $Q = (x+a) R$, wo a eine bestimmte Constante ist. Die gegebene Gleichung ist also:

$$P \frac{d^2 y}{d x^2} + R\left\{(x+a)\frac{dy}{dx} - y\right\} = 0.$$

Setzt man $y = (x+a) u$, so erhält man:

$$u = A + B \int \frac{dx}{(x+a)^2} e^{-\int \frac{R(x+a)}{P} dx},$$

oder: $u = A + B \int \dfrac{R^2}{Q^2} e^{-\int \frac{Q}{P} dx} dx$. — Da jene Relation sich auf das Verhältniss $\dfrac{Q}{R}$ bezieht, so würde die Multiplication der Gleichung mit einem Factor zwecklos sein.

18. Setzt man zur Abkürzung $(c^2 - b)^{1/2} - c = 2c\alpha$, $(c^2 - b)^{1/2} + c = 2c\beta$ und substituirt man $y = \dfrac{x^\alpha}{(2c-x)^\beta} v$, so erhält man für v eine exacte Differentialgleichung, deren Integration giebt:

$$\frac{dv}{dx} + 2v \frac{x + 2\alpha c}{2cx - x^2} = A + a \int \frac{(2c-x)^\beta}{x^\alpha} dx,$$

und hieraus:

$$v = \frac{(2c-x)^{2\beta}}{x^{2\alpha}} \left\{B + \int \frac{x^{2\alpha}}{(2c-x)^{2\beta}} \left(A + a \int \frac{(2c-x)^\beta}{x^\alpha} dx\right) dx\right\}.$$

(Stokes, Cambr. Phil. Trans. Bd. 8, S. 708.)

19. Setze $x = \frac{1}{z}\cdot$ [Vergl. Nr. 16, (3)]. Es wird:

$$y = A\, cos\, \frac{n}{x} + B\, sin\, \frac{n}{x}\cdot$$

20. Transformirt man zu z, so geht die gegebene Gleichung über in: $\frac{d^2 y}{d z^2}\left(\frac{d z}{d x}\right)^2 + \frac{d y}{d z}\left(\frac{d^2 z}{d x^2} + P\frac{d z}{d x}\right) + Q y = 0$, somit muss sein: $\frac{d^2 z}{d x^2} + P\frac{d z}{d x} - F(z)\left(\frac{d z}{d x}\right)^2 = 0$, also nach der 2. Aufgabe des §. 67, S. 517 $\int d z\, e^{-\int F(z) d z} = \int d x\, e^{-\int P d x}$, und ferner $Q = \Phi(z)\left(\frac{d z}{d x}\right)^2$ oder: $Q\, e^{2\int P d x} = \Phi(z)\, e^{2\int F(z) d z}$.

Für das Beispiel ist

$$P = -\frac{1}{x},\quad Q = x^2(e^{x^2} - n^2)$$

und $F(z) = \frac{1}{z}$, demnach $z = e^{\frac{1}{2}x^2}$ und $\Phi(z) = 1 - \frac{n^2}{z^2}$, was mit dem Werthe von $\Phi(z)$ in der zweiten Gleichung übereinstimmt.

21. Setzt man $v = e^{\frac{B}{z}} . z^{-1} w$, so wird $z^4\frac{d^2 w}{d z^2} = (B^2 - A) w$. (Vergl. Nr. 9.) Daher, wenn $(B^2 - A)^{\frac{1}{2}} = \alpha$ ist,

$$v = e^{\frac{B}{z}}\,(C_1 e^{\frac{\alpha}{z}} + C_2 e^{-\frac{\alpha}{z}}).$$

Soll nun die zweite Gleichung in die erste transformirbar sein, so muss nach §. 64 die Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{1}{2}\{z, x\} + \left(\frac{d z}{d x}\right)^2\left(S - \frac{d R}{d x} - R^2\right) - \left(Q - \frac{d P}{d x} - P^2\right) = 0,$$

wo $P = \frac{B'}{x^3} + \frac{3}{2 x}$, $Q = \frac{\mu}{x^6}$, $R = \frac{B}{z^2} + \frac{1}{z}$, $S = \frac{A}{z^4}$ ist, und dies ist der Fall, wenn $B'^2 = 4 B^2 - 4 A + \mu$ ist. Zwischen y und v besteht die Gleichung:

$$y\left(\frac{d z}{d x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\int P d x} = v\, e^{\int R d z}\ \text{oder}\ y = 2^{-\frac{1}{2}}\, e^{-(B - \frac{1}{2}B')x^{-2} + B}\, v,$$

mithin $y = C_1\, e^{[\frac{1}{2}B' + (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}]x^{-2}} + C_2\, e^{[\frac{1}{2}B' - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}]x^{-2}}$.

22. Die transformirte Gleichung ist:

$$\frac{d^2 z}{d x^2} + \left(\frac{d z}{d x}\right)^2 - \frac{d\, log\, P}{d x}\frac{d z}{d x} = a^2 P^2.$$

Setzt man die rechte Seite zunächst gleich Null, so folgt nach der 1. Aufgabe in §. 67: $z = B + log(A + a\int P dx)$. Wendet man nun die Methode der Variation der Constanten an, so erhält man die Gleichungen:

$$\frac{dB}{dx} + \frac{1}{A + a\int P dx}\frac{dA}{dx} = 0 \text{ und } \frac{dA}{dx} = -aP(A + a\int P dx)^2,$$

aus denen folgt:

$$A + a\int P dx = \frac{e^{2a\int P dx} - C_1}{e^{2a\int P dx} + C_1}, \; B = C_2 + log\frac{e^{2a\int P dx} + C_1}{e^{a\int P dx}}.$$

Demnach ergiebt sich: $z = C_2 + log(e^{a\int P dx} - C_1 e^{-a\int P dx})$ und endlich: $y = C' e^{a\int P dx} + C'' e^{-a\int P dx}$. — Weit einfacher gelangt man zum Ziele, wenn man die gegebene Gleichung nach §. 15 so auflöst, als ob P die gesuchte Function wäre. Es folgt so:

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a^2(C + y^2)P^2$ und daher: $y = C_1 e^{a\int P dx} + C_2 e^{-a\int P dx}$, oder man multiplicire einfach mit $\frac{2}{P^3}\frac{dy}{dx}$.

Setzt man in der ersten Gleichung $y = P^{1/2}u$, in der zweiten $v = u e^{-\int X dx}$, so erhält man jedesmal die Gleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{2} u \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P}\frac{dP}{dx}\right)^2 - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{P}\frac{dP}{dx}\right) + 2a^2P^2\right\}.$$

Daher ist: $u = P^{-1/2}(C' e^{a\int P dx} + C'' e^{-a\int P dx})$ und

$$v = P^{-1/2}\left\{C' e^{\int(aP - X)dx} + C'' e^{-\int(aP + X)dx}\right\}.$$

23. Sind α und β willkürliche Constanten, so ist nach §. 67 das allgemeine Integral der Gleichung in σ: $\sigma = \frac{-6\beta^2}{\{(x-\alpha)^2 - \beta^2\}^2}$. Da nun σ die Schwarz'sche Abgeleitete von y nach x sein soll, so erhält man y mittelst der Gleichung $y = \frac{v_1}{v_2}$, wenn v_1 und v_2 zwei von einander unabhängige particuläre Integrale der Gleichung $\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{2}\sigma v = 0$ oder $\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{3\beta^2}{\{(x-\alpha)^2 - \beta^2\}^2} v = 0$ sind. Man löst diese Gleichung nach der Methode des §. 68 und zwar ist

$$P_1 = \frac{2\beta - (x - \alpha)}{(x-\alpha)^2 - \beta^2}$$

$$\text{und } v = \left\{\frac{(x - \alpha + \beta)^3}{x - \alpha - \beta}\right\}^{1/2} \cdot \frac{\gamma(x - \alpha + \beta)^2 + \delta(x - \alpha)}{(x - \alpha + \beta)^2}.$$

Hieraus folgt: $y = \frac{\gamma_1 (x - \alpha + \beta)^2 + \delta_1 (x - \alpha)}{\gamma_2 (x - \alpha + \beta)^2 + \delta_2 (x - \alpha)}$. Da α, β, γ_1, δ_1, γ_2, δ_2 willkürliche Constanten sind, so kann man hierfür auch schreiben: $y = \frac{A + Bx + Cx^2}{A' + B'x + C'x^2}$.

24. (1) $y = Cx$. (Gerade Linie.)

(2) $\left(x - \frac{c}{2} \sin \alpha\right)^2 + \left(y - \frac{c}{2} \cos \alpha\right)^2 = \frac{c^2}{4}$. (Kreis.)

(3) $(y + C) \{(y + C)^2 - a^2\}^{1/2} - a^2 \log \{y + C - [(y + C)^2 - a^2]^{1/2}\} = 2a(x + C_1)$.

(4) $y + C_1 = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x+C}{a}} + e^{-\frac{x+C}{a}}\right)$. (Kettenlinie.)

(5) $(C - x)^{2/3} + y^{2/3} = C_1^{2/3}$.

(6) $x + C = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{y+\alpha}{c}} + e^{-\frac{y+\alpha}{c}}\right)$. (Kettenlinie.)

(7) $\frac{x}{C} = \left\{\frac{y + (y^2 + m x^2)^{1/2}}{x}\right\}^{\left(\frac{m}{m-1}\right)^{1/2}}$

In allen diesen Aufgaben sind die willkürlichen Constanten derart zu bestimmen, dass der vom festen Punkte A aus gemessene Bogen auch wirklich die in der Aufgabe dargestellte Bedingung erfüllt.

25. Die allgemeine Gleichung einer Parabel ist: $(ax + by)^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$. Soll die Parabel die Coordinatenachsen berühren, so muss $\alpha^2 = \gamma a^2$, $\beta^2 = \gamma b^2$ sein, und soll die Berührungssehne eine constante Länge l haben, so muss $\frac{\alpha^2}{a^4} + \frac{\beta^2}{b^4} = l^2$ sein. Eine weitere Gleichung erhält man, wenn man die Parabelgleichung differentiirt. Dies giebt: $ax + by = -\frac{\alpha + \beta p}{a + bp}$. Aus diesen fünf Gleichungen sind die Constanten a, b, α, β, γ zu eliminiren, wodurch man erhält: $(px - y)^4 (x^2 p^4 + y^2) = l^2 x^2 y^2 p^4$. Setzt man $x = \xi^2$, $y = \eta^2$ und $\frac{d\eta}{d\xi} = p_1$, so folgt: $\eta = p_1 \xi - l^{1/2} \frac{p_1}{(1 + p_1^4)^{1/4}}$, und hieraus $c\xi - \eta = c\, l^{1/2} (1 + c^4)^{1/4}$ oder in rationaler Form, und wenn man $c^2 = \cot \alpha$ setzt:

$$(x - y \tan \alpha)^2 - 2l \sin \alpha (x + y \tan \alpha) + l^2 \sin^2 \alpha = 0.$$

Ist die Berührungssehne nicht von constanter Länge, so hat man a, b, α, β, γ aus den Gleichungen

$$(ax+by)^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma=0,\ ax+by=-\frac{\alpha+\beta p}{a+bp},$$

$$(a+bp)^2+\{b(ax+by)+\beta\}\frac{d^2y}{dx^2}=0,\ \alpha^2=\gamma a^2,\ \beta^2=\gamma b^2$$

zu eliminiren. Man erhält dann:

$$2xy\frac{d^2y}{dx^2}-x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\frac{dy}{dx}=0.$$

26. Die Differentialgleichung der Curve ist:

$$\frac{d^3y}{dx^3}\left(1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right)-3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+n\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0.$$

Ein erstes Integral derselben ist, wenn $\frac{dy}{dx}=p$ gesetzt wird:

$$C\,e^{n\,arc\,tang\,p}\frac{dp}{dx}=(1+p^2)^{3/2}.$$

Für $arc\ tang\ p=\tau$ erhält man die beiden simultanen Gleichungen der Curve:

$$x-a=C'e^{n\tau}(n\cos\tau+\sin\tau),\ y-b=C'e^{n\tau}(n\sin\tau-\cos\tau).$$

Die Curve ist eine logarithmische Spirale.

27. Nimmt man die Verbindungslinie der beiden festen Punkte zur x-Achse, ihre Mitte als Coordinatenanfangspunkt und setzt die Entfernung beider festen Punkte gleich $2e$, das Product der von ihnen auf die Tangenten gefällten Lothe gleich b^2 und endlich $b^2+e^2=a^2$, so wird $y=px+(b^2+a^2p^2)^{1/2}$, daher als allgemeines Integral: $y=Cx+(b^2+a^2C^2)^{1/2}$, als singuläres: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Liegen die festen Punkte auf verschiedenen Seiten der Tangente, so ist $-b^2$ an die Stelle von b^2 zu setzen.

28. Bezeichnet ϱ den Krümmungsradius in einem Punkte der gesuchten Curve und φ den Winkel, welchen derselbe mit einer constanten Richtung, die wir als x-Achse nehmen, bildet, so ist $dx=\varrho\cos\varphi\,d\varphi$, $dy=\varrho\sin\varphi\,d\varphi$. Sind ϱ_1 und φ_1 die Coordinaten des dem Punkte (ϱ,φ) entsprechenden Punktes der abgewickelten Curve, so ist $\varphi_1=\varphi+\frac{\pi}{2}$, daher $d\varphi_1=d\varphi$, und da das Bogenelement der Abgewickelten gleich $d\varrho$ ist, so ist $d\varrho=\varrho_1\,d\varphi$. Ist die abgewickelte Curve der ersten ähnlich und n das Aehnlichkeitsverhältniss, so ist $\varrho_1=n\varrho$, somit $\frac{d\varrho}{\varrho}=n\,d\varphi$, also $\varrho=ce^{n\varphi}$,

Mithin wird: $dx = c e^{n\varphi} \cos\varphi \, d\varphi$, $dy = c e^{n\varphi} \sin\varphi \, d\varphi$. Hieraus folgt:

$$x - a = \frac{c}{n^2+1} e^{n\varphi} (n \cos\varphi + \sin\varphi),$$

$$y - b = \frac{c}{n^2+1} e^{n\varphi} (n \sin\varphi - \cos\varphi),$$

die simultanen Gleichungen einer logarithmischen Spirale.

29. Die Differentialgleichung der Curve ist:

$$n y \frac{d^2 y}{dx^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \text{ oder: } n \frac{p\,dp}{1+p^2} = \frac{dy}{y},$$

woraus folgt: $x - a = b^{\frac{1}{n}} \int (y^{\frac{2}{n}} - b^{\frac{2}{n}})^{-\frac{1}{2}} dy$. Setzt man $y = u^{\frac{n}{2}}$, so wird: $x - a = \frac{n}{2} b^{\frac{1}{n}} \int u^{\frac{n}{2}-1} (u - b^{\frac{2}{n}})^{-\frac{1}{2}} du$, und hieraus sieht man, dass sich die Integration in endlicher Form wirklich ausführen lässt, wenn n eine ganze Zahl ist. Ist $n = 2$, so wird $(x-a)^2 = 4b(y-b)$, die Gleichung einer Parabel. Ist $n = -2$, so wird:

$$x - a = \frac{b}{2} \operatorname{arc\,cos} \frac{b - 2y}{b} - (by - y^2)^{\frac{1}{2}},$$

die Gleichung einer Cycloide. Für $n = 1$ erhält man:

$$y = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{x-a}{b}} + e^{-\frac{x-a}{b}}\right),$$

die Gleichung einer Kettenlinie, und für $n = -1$ wird: $(x - a)^2 + y^2 = b^2$, die Gleichung eines Kreises.

30. Bezeichnet m die trigonometrische Tangente des Schnittwinkels, so sind die Grössen a und b aus den Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \; a^2 - b^2 = e^2, \; p = \frac{m\frac{y}{b^2} - \frac{x}{a^2}}{\frac{y}{b^2} + m\frac{x}{a^2}}$$

zu eliminiren. Man erhält:

$$[mx + y + (my - x)p]\,[x - my + (mx + y)p] = e^2 (m - p)(1 + mp).$$

Setzt man $x - my + (mx + y)p = M(1 + mp)$ und $M[mx + y + (my - x)p] = e^2(m - p)$, und eliminirt p aus diesen beiden Gleichungen, so folgt: $(x^2 + y^2 + e^2) M = x(M^2 + e^2)$. Differentiirt man diese Gleichung und eliminirt man dann aus der dadurch ent-

stehenden Gleichung und aus irgend zwei der letzten drei Gleichungen die Grössen y und p, so erhält man eine Differentialgleichung zwischen M und x, die sich darstellen lässt in der Form:

$$\frac{m\,d\,(xM)}{\{e^2(xM)-(xM)^2\}^{1/2}}+\frac{d\,\frac{M}{x}}{\frac{M}{x}\left(1-\frac{M}{x}\right)}=0$$

und die integrirt giebt:

$$-2\,m\,arc\,tang\left(\frac{e^2}{xM}-1\right)^{1/2}+log\,\frac{1-\left(1-\frac{M}{x}\right)^{1/2}}{1+\left(1-\frac{M}{x}\right)^{1/2}}=C.$$

Hierin hat man nur noch für M seinen aus der Gleichung

$$(x^2+y^2+e^2)\,M=x\,(M^2+e^2)$$

sich ergebenden Werth einzusetzen, um die Gleichung der gesuchten Curve zu erhalten. (Mainardi in Tortolini's Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, T. 1, p. 251.)

31. (1) $\xi^2+\eta^2=C\eta.$

(2) $\xi(1-\xi^2)^{1/2}-\eta(1-\eta^2)^{1/2}+arc\,sin\,\{\xi(1-\eta^2)^{1/2}-\eta(1-\xi^2)^{1/2}\}=C.$

(3) Die Differentialgleichung der Trajectorie ist:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi(2\eta^3-\xi^3)}{\eta(2\xi^3-\eta^3)}.$$

Hierin setze man $\eta=\xi u$. Dann wird:

$$C+log\,\xi=\int\frac{(u^3-2)\,u\,du}{(1-u)(1+u+3u^2+u^3+u^4)}=-log\,(1-u)-\int\frac{(1+u)^3\,du}{(1-u)(1+u+3u^2+u^3+u^4)}$$

In diesem Integrale substituire man $u+\frac{1}{u}=z$, dadurch erhält man:

$$C+log\,(\xi-\eta)=\int\frac{(z+2)\,dz}{(z-2)(z^2+z+1)}=\frac{1}{7}\,log\,\frac{(z-2)^4}{(z^2+z+1)^2}-\frac{2}{7}\cdot 3^{1/2}\,arc\,tang\,\frac{2z+1}{3^{1/2}},$$

somit, da $z=\frac{\xi^2+\eta^2}{\xi\eta}$ ist:

$$C = \frac{1}{7} \log \frac{\xi - \eta}{\{(\xi^2 + \eta^2)^2 + \xi\eta(\xi^2 + \eta^2) + \xi^2\eta^2\}^2}$$
$$- \frac{2}{7} \cdot 3^{1/2} \operatorname{arc\,tang} \frac{2(\xi^2 + \eta^2) + \xi\eta}{\xi\eta \, . \, 3^{1/2}}.$$

(4) Die Differentialgleichung der Trajectorien lautet:

$$(\xi^2 + \eta^2)\left(\xi \frac{d\eta}{d\xi} - \eta\right) = e^2\left(\xi \frac{d\eta}{d\xi} + \eta\right),$$

wenn $2e$ die Entfernung der beiden festen Punkte bezeichnet, die Verbindungslinie derselben als x-Achse und die Mitte dieser Verbindungslinie als Anfangspunkt genommen wird. Setzt man dann $\xi\eta = u$, $\frac{\eta}{\xi} = v$, so geht die Gleichung über in: $dv + \frac{dv}{v^2} = e^2 \frac{du}{u^2}$, und es wird: $\xi^2 - \eta^2 + C\xi\eta = e^2$. Die orthogonalen Trajectorien einer Schaar confocaler Cassini'scher Curven sind daher gleichseitige Hyperbeln, welche denselben Mittelpunkt haben wie jene, und deren Achsen sich der Lage und Grösse nach ändern.

32. Es soll sein: $x\int_a^x y^2\,dx = 2y\int_a^x xy\,dx$. Hieraus folgt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{4}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{4}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

und daher nach der 2. Aufgabe in §. 67: $\frac{Ab^3}{x^3} - \frac{b^3}{y^3} = 1$. Die Verification zeigt, dass $A = \left(\frac{a}{b}\right)^3$ zu setzen ist, demnach ist die Gleichung der Curve: $\left(\frac{a}{x}\right)^3 - \left(\frac{b}{y}\right)^3 = 1$.

33. Um derartige Probleme zu lösen, bemerke man, dass, wenn RTS die gegebene Curve darstellt, welche auf der Geraden OX rollt und dieselbe in T berührt, ferner APC die vom Pole P beschriebene Curve ist und sodann OX als x-Achse genommen, also $OM = x$, $PM = y$ gesetzt wird, die gerade Linie PT ein Radiusvector der gegebenen Curve und zugleich Normale an die gesuchte Curve ist. Sind daher r und ϑ die Polarcoordinaten des Punktes T, so ist zunächst die Gleichung der rollenden Curve dadurch erfüllt, also (1) $F(r, \vartheta) = 0$, und ferner: (2) $r = y(1 + p^2)^{1/2}$, wo $p = \frac{dy}{dx}$. Da nun PM senkrecht auf der Tangente an die gegebene Curve

und zugleich Ordinate y der gesuchten Curve ist, so ist weiter: (3) $r^2 d\vartheta = y(dr^2 + r^2 d\vartheta^2)^{1/2}$. Aus (1), (2), (3) hat man schliesslich die Grössen r und ϑ zu eliminiren, um die Gleichung der gesuchten Curve zu erhalten. — In unserem Beispiel ergiebt sich: $y = a(1+p^2)^{\frac{1-m}{2m}}$, oder $dx = \left\{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2m}{1-m}} - 1\right\}^{-1/2} dy$. Ist $m = \frac{1}{2}$, so wird $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-b}{a}} + e^{-\frac{x-b}{a}}\right)$. Die beschriebene Curve ist also eine Kettenlinie, die vom Brennpunkt einer Parabel beschrieben wird. Ist $m = 2$, so wird $x - b = a^2 \int \frac{dy}{(y^4 - a^4)^{1/2}}$. Die Curve ist eine sogenannte elastische Curve, die vom Mittelpunkte einer gleichseitigen Hyperbel beschrieben wird. (Frenet, Recueil d'Exercices p. 365.)

34. Differentiirt man die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, c)$ nach x, so wird: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi$, also: $f(x, y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi$. Differentiirt man dies in Bezug auf c, so ergiebt sich:

$$0 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial c} + \frac{\partial\varphi}{\partial c}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial c}\varphi$$

oder:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c}\varphi\right).$$

Dies ist aber die Bedingung dafür, dass der Ausdruck $\frac{\partial\varphi}{\partial c}dy - \frac{\partial\varphi}{\partial c}\varphi\,dx$ ein exactes Differential ist. Man erhält daher als Integral: $\int\frac{\partial\varphi}{\partial c}(dy - \varphi\,dx) = C$.

Differentiirt man $\frac{dy}{dx} = y\varphi(x) + c\psi(x)$, so folgt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y(\varphi^2 + \varphi') + c(\varphi\psi + \psi'),$$

also $y(1 + 2\,tang^2\,x) = y(\varphi^2 + \varphi') + c(\varphi\psi + \psi')$. Differentiirt man diese Gleichung nach c, so erhält man:

$$\psi(x)\varphi(x) + \frac{d\psi(x)}{dx} = 0,$$

also $\psi(x) = e^{-\int \varphi(x)\,dx}$, ferner: $\varphi^2 + \varphi' = 1 + 2\,tang^2 x$, also $\varphi(x) = tang\,x$ und $\psi(x) = \cos x$, somit $\frac{dy}{dx} = y\,tang\,x + c\cos x$. Demnach:

$$\int \cos x\,(dy - y\,tang\,x\,dx - c\cos x\,dx) = C$$
$$= \int (\cos x\,dy - y\sin x\,dx) - c\int \cos^2 x\,dx,$$

und schliesslich: $y\cos x - \frac{1}{2}c\,(x + \sin x\cos x) = C.$

V. Capitel.

§. 83.

2. Aufgabe.

(1) Setzt man $xy = u$, so geht die Gleichung über in

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + c^3 x u = 0.$$

Ist also $u = A$ und $\frac{du}{dx} = B$ für $x = 0$, so folgt:

$$u = xy = A\left\{1 - \frac{1}{3!}(cx)^3 + \frac{1.4}{6!}(cx)^6 - \frac{1.4.7}{9!}(cx)^9 + \cdots\right\}$$
$$+ Bx\left\{1 - \frac{2}{4!}(cx)^3 + \frac{2.5}{7!}(cx)^6 - \frac{2.5.8}{10!}(cx)^9 + \cdots\right\}.$$

(2) $$y = A\left\{1 - \frac{ax^4}{3\cdot 4} + \frac{a^2x^8}{3.4.7.8} - \frac{a^3x^{12}}{3.4.7.8.11.12} + \cdots\right\}$$
$$+ Bx\left\{1 - \frac{ax^4}{4.5} + \frac{a^2x^8}{4.5.8.9} - \frac{a^3x^{12}}{4.5.8.9.12.13} + \cdots\right\}.$$

3. Aufgabe. Die angegebene Lösung erhält man bei der Annahme, dass $y = A$ sein solle für $x = 0$. Es ist dann $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -mA$ und allgemein: $\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0 = (-1)^n m^n \frac{A}{n!}$.

§. 85.

1. Aufgabe. Setzt man $y = A_0 x^p + A_1 x^{p+1} + A_2 x^{p+2} + \cdots$, so folgt: $p(p + 2n - 1) = 0$, also $p = 0$ oder $p = 1 - 2n$, ferner

$A_1 = 0$ und $A_\varkappa (p + \varkappa)(p + \varkappa + 2n - 1) + m A_{\varkappa-2} = 0$. Hieraus erhält man: $A_{2\varkappa+1} = 0$ und ferner für $p = 0$:

$$A_{2\varkappa} = (-1)^\varkappa \frac{m^\varkappa}{2.4\ldots 2\varkappa.(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2\varkappa-1)} A_0,$$

dagegen für $p = 1 - 2n$:

$$A_{2\varkappa} = (-1)^\varkappa \frac{m^\varkappa}{2.4\ldots 2\varkappa.(3-2n)(5-2n)\ldots(2\varkappa+1-2n)} A_0.$$

Mithin ergiebt sich:

$$y = A\left\{1 - \frac{m x^2}{2.(2n+1)} + \frac{m^2 x^4}{2.4.(2n+1)(2n+3)} - \cdots\right\}$$

$$+ B x^{1-2n}\left\{1 - \frac{m x^2}{2.(3-2n)} + \frac{m^2 x^4}{2.4.(3-2n)(5-2n)} - \cdots\right\}.$$

3. Aufgabe. Nach der 3. Aufgabe in §. 83 ist ein particuläres Integral dieser Gleichung:

$$y_1 = 1 - \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} - \frac{x^3}{(3!)^2} + \cdots$$

Setzt man $y = y_1 (A + B \log x) + w$, so folgt für w die Gleichung:

$$x\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{dw}{dx} + w = -2B\frac{dy_1}{dx}$$

$$= 2B\left(1 - \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{(2!)^2.3} - \frac{x^3}{(3!)^2.4} + \frac{x^4}{(4!)^2.5} - \cdots\right),$$

von welcher ein particuläres Integral zu bestimmen ist. Setzt man dazu: $w = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots$, so wird: $B_0 = 0$, $B_1 = 2B$, $4B_2 + B_1 = -B, \ldots, (n+1)^2 B_{n+1} + B_n = (-1)^n \frac{2B}{(n!)^2 (n+1)}$, daher $w = 2B\left\{x - \frac{3x^2}{(2!)^3} + \frac{11x^3}{(3!)^3} - \frac{50x^4}{(4!)^3} + \cdots\right\}$.

4. Aufgabe.

$$(1)\quad y = A_0\left\{1 - \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a^2(a^2-4)}{4!}x^4 - \frac{a^2(a^2-4)(a^2-16)}{6!}x^6 + \cdots\right\}$$

$$+ A_1\left\{x - \frac{a^2-1}{3!}x^3 + \frac{(a^2-1)(a^2-9)}{5!}x^5 - \cdots\right\},$$

oder: $y = A_0 \cos(a \arcsin x) + \frac{A_1}{a}\sin(a \arcsin x)$.

(2) Ein particuläres Integral ist:

$$y_1 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 x^6 + \cdots$$

Wir setzen dann $y = y_1 (A + B \log x) + w$ und erhalten dadurch für w die Gleichung:

$$x(1 - x^2)\frac{d^2 w}{dx^2} + (1 - 3x^2)\frac{dw}{dx} - xw = -2B\left\{(1 - x^2)\frac{dy_1}{dx} - xy_1\right\}.$$

Nimmt man $w = \alpha_1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \alpha_2 \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 x^4 + \alpha_3 \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 x^6 + \cdots$ an, so ergiebt sich zunächst:

$$x(1 - x^2)\frac{d^2 w}{dx^2} + (1 - 3x^2)\frac{dw}{dx} - xw = \alpha_1 x + 3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 (\alpha_2 - \alpha_1) x^3$$
$$+ 5^2 \cdot \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 (\alpha_3 - \alpha_2) x^5 + 7^2 \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 (\alpha_4 - \alpha_3) x^7 + \cdots$$

Andererseits ist:

$$-2B\left\{(1 - x^2)\frac{dy_1}{dx} - xy_1\right\} = B\left\{x + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^3 + \frac{5}{3}\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 x^5 \right.$$
$$\left. + \frac{7}{4}\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 x^7 + \cdots\right\},$$

und hieraus findet man:

$$w = B\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{3 \cdot 4}\right) x^4 \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{5 \cdot 6}\right) x^6 + \cdots\right\}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch anders schreiben. Setzt man nämlich $y_1 = \mathfrak{K}$, ferner: $\mathfrak{K}_0 = 1$, $\mathfrak{K}_1 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2$, $\mathfrak{K}_2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 x^4, \ldots$, so erhält man:

$$w = 2B\left\{\frac{1}{1 \cdot 2}(\mathfrak{K} - \mathfrak{K}_0) + \frac{1}{3 \cdot 4}(\mathfrak{K} - \mathfrak{K}_1) + \frac{1}{5 \cdot 6}(\mathfrak{K} - \mathfrak{K}_2) + \cdots\right\}.$$

Somit ist das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung:

$$y = \mathfrak{K}(A + B \log x) + 2B\left\{\frac{1}{1 \cdot 2}(\mathfrak{K} - \mathfrak{K}_0) + \frac{1}{3 \cdot 4}(\mathfrak{K} - \mathfrak{K}_1) + \cdots\right\}.$$

Sind nun K und K' die beiden vollständigen elliptischen Integrale erster Art, also:

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\{(1-z^2)\,(1-x^2 z^2)\}^{1/2}},\quad K' = \int_0^1 \frac{dz}{\{(1-z^2)(1-(1-x^2)z^2)\}^{1/2}},$$

so ist $\mathfrak{K} = \frac{2}{\pi} K$ und

$$K' = \frac{K}{\pi} \log \frac{4}{x} - \left\{\frac{1}{1\,.\,2}(\mathfrak{K} - \mathfrak{K}_0) + \frac{1}{3\,.\,4}(\mathfrak{K} - \mathfrak{K}_1) + \cdots\right\}.$$

Setzt man daher schliesslich noch $\frac{2}{\pi}(A + B \log 4) = C_1$ und $-2B = C_2$, so wird: $y = C_1 K + C_2 K'$, woraus hervorgeht, dass der gegebenen Gleichung als particuläre Integrale die beiden Periodicitätsmoduln der elliptischen Functionen genügen.

§. 86.

1. Aufgabe. Setzt man $y = y_1 v$, wo $y_1 = x^4 e^x$ ist, so folgt:
$x \frac{d^2 v}{dx^2} + (x+4)\frac{dv}{dx} = 0$, also $v = A + B \int \frac{dx}{e^x x^4}$.

2. Aufgabe. Ein particuläres Integral ist:

$$y_1 = x - \frac{4}{2^2-1} x^2 + \frac{4\,.\,5}{(2^2-1)(3^2-1)} x^3 - \frac{4\,.\,5\,.\,6}{(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)} x^4 + \cdots,$$

oder in endlicher Form: $y_1 = e^{-x}\left(x - \frac{1}{3}x^2\right)$. Das andere findet man am einfachsten durch Anwendung von §. 65, wonach wird:

$$y_2 = e^{-x}\left(x - \frac{1}{3}x^2\right) \int \frac{e^x\, dx}{x^3 \left(1 - \frac{1}{3}x\right)^2}.$$

§. 87.

2. Aufgabe. Man erhält:

$$y = A x^{-2}\left(1 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}x^2\right) + B x^2 \left(1 - \frac{4}{3^2-4} x + \frac{4\,.\,6}{(3^2-4)(4^2-4)} x^2 - \cdots\right).$$

3. Aufgabe. Setzt man $y = \frac{z}{x} e^{-\frac{q-2m}{2}x}$, so erhält man für z die Gleichung: $\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{2}{x}\frac{dz}{dx} = \frac{q^2}{4} z$. Daher ergiebt sich nach der 1. Aufgabe in §. 85, wenn man daselbst $n = -1$ und $m = -\frac{q^2}{4}$ setzt:

$$z = A\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{qx}{2}\right)^2 - \frac{1}{2.4}\left(\frac{qx}{2}\right)^4 - \frac{1}{2.4.6.1.3}\left(\frac{qx}{2}\right)^6 - \frac{1}{2.4.6.8.1.3.5}\left(\frac{qx}{2}\right)^8 - \cdots\right\}$$
$$+ Bx^3\left\{1 + \frac{1}{2.5}\left(\frac{qx}{2}\right)^2 + \frac{1}{2.4.5.7}\left(\frac{qx}{2}\right)^4 + \frac{1}{2.4.6.5.7.9}\left(\frac{qx}{2}\right)^6 + \cdots\right\},$$

oder in endlicher Form:

$$z = A_1\left(1 - \frac{qx}{2}\right)e^{\frac{qx}{2}} + B_1\left(1 + \frac{qx}{2}\right)e^{-\frac{qx}{2}}.$$

§. 90.

1. Aufgabe. Soll aus der Gleichung $u = x + t\varphi(u)$, in welcher φ eine gegebene stetige Function ist, u als Potenzreihe von t dargestellt werden, so geschieht dies nach Lagrange durch die Formel: $u = x + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{d^{n-1}[\varphi(x)]^n}{dx^{n-1}} \frac{t^n}{n!}$, und zwar stellt diese Reihe diejenige Wurzel jener Gleichung dar, welche den kleinsten absoluten Betrag hat, und sie convergirt für $|t| < T$, wo T den kleinsten absoluten Werth darstellt, den man t ertheilen muss, damit die Gleichung $u = x + t\varphi(u)$ zwei gleiche Wurzeln besitze. Setzt man nun $\varphi = u^2 - 1$, $t = \frac{z}{2}$, also $u = x + \frac{1}{2}z(u^2 - 1)$, so folgt: $u = \frac{1}{z} \pm \frac{1}{z}(1 - 2zx + z^2)^{1/2}$. Ferner ist für reelle, zwischen $+1$ und -1 gelegene Werthe von x: $T = 1$; daher lässt sich für alle z, deren absoluter Betrag < 1 ist, diejenige Wurzel von

$$u = x + \frac{z}{2}(u^2 - 1),$$

welche den kleinsten absoluten Betrag besitzt, in eine convergente, nach ganzen positiven Potenzen von z fortschreitende Reihe entwickeln, also:

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{z}(1 - 2xz + z^2)^{1/2} = x + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} \frac{z^n}{2^n . n!}.$$

Differentiirt man beiderseits nach x, so folgt:

$$(1 - 2xz + z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \frac{z^n}{2^n . n!}.$$

Nun ist:

$$(x^2-1)^n = x^{2n} - \frac{n}{1} x^{2n-2} + \cdots$$
$$+ (-1)^k \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} x^{2n-2k} + \cdots$$

Differentiirt man dieses n-mal nach einander, so wird:

$$\frac{1}{2^n . n!} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{n!} \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^k \frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{2.4\ldots 2k.(2n-1)\ldots(2n-2k+1)} x^{n-2k} + \cdots \right\}.$$

Dies ist aber genau die Reihe für $P_n(x)$, daher:

$$(1 - 2xz + z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \frac{z^n}{2^n . n!} = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n(x) z^n.$$

Setzt man: $v = (1 - 2xz + z^2)^{-1/2}$, so folgt:

$$\frac{\partial \frac{1}{v}}{\partial x} = - zv, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{v}}{\partial x^2} = - z^2 v^3,$$

ferner: $$\frac{\partial \frac{1}{v}}{\partial z} = (z - x) v, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{v}}{\partial z^2} = (1 - x^2) v^3.$$

Demnach wird: $$(1 - x^2) \frac{\partial^2 \frac{1}{v}}{\partial x^2} + z^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{v}}{\partial z^2} = 0.$$

Differentiirt man dies nochmals nach x und setzt dann für $\frac{\partial \frac{1}{v}}{\partial x}$ seinen Werth $- zv$, so folgt: $\frac{\partial}{\partial x}\left\{(1 - x^2)\frac{\partial v}{\partial x}\right\} + z \frac{\partial^2 (zv)}{\partial z^2} = 0.$

2. Aufgabe. Sind die Wurzeln einer Gleichung $\psi(x) = 0$ sämmtlich reell und zwischen a und b gelegen, so gilt dasselbe bekanntlich auch von den Wurzeln aller Ableitungen jener Gleichung. Ist im Besonderen $\psi(x) = (x^2 - 1)^n$, also $a = -1$, $b = +1$, so müssen sämmtliche Wurzeln von $P_n(x) = \frac{1}{2^n \,.\, n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{d x^n} = 0$ reell sein und zwischen -1 und $+1$ liegen.

3. Aufgabe. Setzt man in $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n(x) z^n$ für x den Werth 1, so ist: $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n(1) z^n$. Andererseits ist $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{n=\infty} z^n$, somit $P_n(1) = 1$ für jeden Werth von n.

4. Aufgabe.

(1) Ist $v = (1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, so folgt:

$$log\ v = -\frac{1}{2} log\ (1 - 2xz + z^2),$$

und wenn man dies nach z differentiirt:

$$(1 - 2xz + z^2) \frac{\partial v}{\partial z} + (z - x) v = 0.$$

Setzt man nun für v die Entwickelung $\sum_{n=0}^{n=\infty} P_n(x) z^n$ ein und setzt die Coefficienten der einzelnen Potenzen von z gleich Null, so wird $P_1(x) = x P_0(x)$ und $n P_n = (2n - 1) x P_{n-1} - (n-1) P_{n-2}$.

(2) Aus $\frac{d}{dx}\left\{(1 - x^2) \frac{dP_n}{dx}\right\} + n(n+1) P_n = 0$ folgt: $(x^2 - 1) \frac{dP_n}{dx} = n(n+1) \int_1^x P_n\, dx$. Setzt man für P_n die Reihe:

$$P_n = \frac{1 \,.\, 3 \ldots (2n-1)}{n!} \sum_{k=0}^{k=n'} (-1)^k \frac{n(n-1) \ldots (n-2k+1)}{2 \,.\, 4 \,.\,.\, 2k \,.\, (2n-1) \,.\,.\, (2n-2k+1)} x^{n-2k},$$

in welcher $n' = \frac{n}{2}$ oder $n' = \frac{n-1}{2}$ ist, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist, so erhält man: $(x^2 - 1) \frac{dP_n}{dx} = n(n+1) \times$

$$\left\{ \frac{1 \,.\, 3 \,.\,.\, (2n-1)}{n!\,(n+1)} \sum_{k=0}^{k=n'} (-1)^k \frac{(n+1)\, n \,.\,.\, (n-2k+2)}{2 \,.\, 4 \ldots 2k \,.\, (2n-1) \,.\,.\, (2n-2k+1)} x^{n-2k+1} \right\}_1^x .$$

Bildet man andererseits den Ausdruck $x P_n - P_{n-1}$, indem man für P_n und P_{n-1} ihre Reihenentwickelungen einsetzt, so findet man, dass der in $\{\cdots\}$ eingeschlossene Ausdruck gleich $\frac{1}{n+1}(x P_n - P_{n-1})$ ist. Da ferner dieser Werth nach der 3. Aufgabe für die untere Grenze verschwindet, so ist schliesslich:

$$(x^2 - 1) \frac{d P_n}{d x} = n (x P_n - P_{n-1}).$$

§. 94.

1. Aufgabe. Setzt man in der 1. Aufgabe §. 64 $n = -\frac{1}{2}$ und $z = y$, so sieht man, dass diese beiden Gleichungen durch die Substitutionen $x = \frac{1+k^2}{1-k^2}$, $y = v(1-k^2)^{1/2}$ (vergl. 1. Aufg. §. 64, S. 515) in einander transformirbar sind. Der allgemeine Werth von v, sei es durch unendliche Reihen, sei es durch bestimmte Integrale ausgedrückt, kann dann unmittelbar aus Nr. 2 der 4. Aufgabe §. 85, S. 548 entnommen werden, wenn man daselbst v für y und k für x setzt.

2. Aufgabe. Setzt man, da $\frac{d P_n}{d x}$ eine Function $(n-1)$ten Grades ist, $w = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-3} + C_3 x^{n-5} + \cdots$, so findet man leicht:

$$w = \frac{1}{2} \cdot \frac{1.3..(2n-3)}{(n-1)!} \left\{ x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{2.(2n-3)} x^{n-3} \right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.4.(2n-3)(2n-5)} x^{n-5} - \cdots \right\},$$

also: $w = \frac{1}{2} P_{n-1}$. Es ist somit $\lambda = \frac{1}{2}$. — In analoger Weise findet man für die zweite Gleichung: $w = \frac{1}{4(n+1)} Q_{n+1}$, also $\lambda' = \frac{1}{4(n+1)}$.

§. 99.

1. Aufgabe.

(1) Differentiirt man die Reihe

$$Q_n = \frac{2^n . n!}{(n+1)\ldots(2n+1)} \left\{ x^{-(n+1)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-(n+3)} + \ldots \right\}$$

$(n+1)$ mal nach x, so folgt: $\frac{d^{n+1} Q_n}{d x^{n+1}} = (-2)^n n! \Big\{ x^{-(2n+2)} + (n+1) x^{-(2n+4)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2!} x^{-(2n+6)} + \dots \Big\}$. Die Reihe in der Parenthese ist genau die Entwickelung von $(x^2-1)^{-(n+1)}$, vorausgesetzt, dass $x > 1$ sei, was hier der Fall ist. Demnach $\frac{d^{n+1} Q_n}{d x^{n+1}} = \frac{(-2)^n . n!}{(x^2-1)^{n+1}}$. Es folgt hieraus, dass sich Q_n als $(n+1)$-faches Integral darstellen lässt, ähnlich wie sich P_n als n ter Differentialquotient ausdrücken liess. Da nämlich Q_n und sämmtliche Ableitungen von Q_n für $x = \infty$ verschwinden, so ist:

$$Q_n = 2^n . n! \int_x^\infty \frac{(dx)^{n+1}}{(x^2-1)^{n+1}}.$$

(2) Es ist:

$$\frac{d Q_{n+1}}{dx} = -\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+3)\dots(2n+3)} \Big\{ x^{-(n+3)} + \frac{(n+3)(n+4)}{2.(2n+5)} x^{-(n+5)} + \dots + \frac{(n+3)(n+4)\dots(n+2r)}{2.4\dots2(r-1)(2n+5)\dots(2n+2r+1)} x^{-(n+2r+1)} + \dots \Big\}.$$

Ferner:

$$\frac{d Q_{n-1}}{dx} = -\frac{2^{n-1}(n-1)!}{(n+1)\dots(2n-1)} \Big\{ x^{-(n+1)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2.(2n+1)} x^{-(n+3)} + \dots + \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+2r)}{2.4\dots2r.(2n+1)\dots(2n+2r-1)} x^{-(n+2r+1)} + \dots \Big\}.$$

Also:

$$\frac{d Q_{n+1}}{dx} - \frac{d Q_{n-1}}{dx} = \frac{2^n . n!}{(n+1)\dots(2n)} \Big\{ x^{-(n+1)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2.(2n+3)} x^{-(n+3)} + \dots + \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+2r)}{2.4\dots2r.(2n+3)\dots(2n+2r+1)} x^{-(n+2r+1)} + \dots \Big\}.$$

Demnach:

$$\frac{d Q_{n+1}}{dx} - \frac{d Q_{n-1}}{dx} = (2n+1) Q_n.$$

(3) Aus den soeben in Nr. 2 angegebenen Werthen von $\frac{d Q_{n+1}}{dx}$ und $\frac{d Q_{n-1}}{dx}$ folgt:

$$n \frac{d\,Q_{n+1}}{d\,x} + (n+1) \frac{d\,Q_{n-1}}{d\,x} = - \frac{2^n \,.\, n!}{(n+2)\ldots(2n)} \Big\{ x^{-(n+1)}$$

$$+ \frac{(n+2)(n+3)}{2\,.\,(2n+3)} x^{-(n+3)} + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{2\,.\,4\,.\,(2n+3)(2n+5)} x^{-(n+5)} + \ldots \Big\},$$

daher:

$$n \frac{d\,Q_{n+1}}{d\,x} + (n+1) \frac{d\,Q_{n-1}}{d\,x} = (2n+1)\, x \frac{d\,Q_n}{d\,x}.$$

2. Aufgabe.

(1) Integrirt man die soeben in der 1. Aufgabe Nr. (3) erhaltene Formel zwischen den Grenzen ∞ und x und beachtet man, dass Q_n für unendlich grosse x von höherer Ordnung als der ersten unendlich klein wird, so ist:

$$n\,Q_{n+1} + (n+1)\,Q_{n-1} = (2n+1)\,\Big\{x\,Q_n - \int_\infty^x Q_n\,d\,x\Big\}.$$

Nach Nr. (2) der vorigen Aufgabe ist aber:

$$Q_{n+1} - Q_{n-1} = (2n+1) \int_\infty^x Q_n\,d\,x.$$

Folglich erhält man:

$$(n+1)\,Q_{n+1} + n\,Q_{n-1} = (2n+1)\,x\,Q_n$$

oder:

$$n\,Q_n = (2n-1)\,x\,Q_{n-1} - (n-1)\,Q_{n-2}.$$

(2) Aus der Gleichung $\frac{d}{d\,x} \Big\{(x^2-1) \frac{d\,Q_n}{d\,x}\Big\} = n\,(n+1)\,Q_n$ erhält man, wenn man zwischen den Grenzen ∞ und x integrirt und beachtet, dass für jedes $n > 0$ der Differentialquotient $\frac{d\,Q_n}{d\,x}$ für $x = \infty$ von höherer als der zweiten Ordnung unendlich klein wird:

$$(x^2-1) \frac{d\,Q_n}{d\,x} = n(n+1) \int_\infty^x Q_n\,d\,x = \frac{n\,(n+1)}{2n+1}\,(Q_{n+1} - Q_{n-1}).$$

Nach (1) ist aber:

$$(n+1)\,Q_{n+1} = (2n+1)\,x\,Q_n - n\,Q_{n-1},$$

mithin:

$$(x^2-1) \frac{d\,Q_n}{d\,x} = n\,(x\,Q_n - Q_{n-1}).$$

§. 103.

Aufgabe. Es ist $\frac{d I_n}{dx} = \frac{n}{x} I_n - I_{n-1}$, und ferner:

$$I_{n+r} + I_{n+r+2} = \frac{2}{x}(n+r+1) I_{n+r+1}.$$

Setzt man in der letzten Gleichung der Reihe nach $r = 1, 3, 5, \ldots$ und subtrahirt und addirt die entstehenden Gleichungen abwechselnd zu der erst hingeschriebenen, so findet man:

$$\frac{d I_n}{dx} = \frac{2}{x}\left\{\frac{n}{2} I_n - (n+2) I_{n+2} + (n+4) I_{n+4} - \cdots\right\}.$$

§. 105.

1. Aufgabe. Es sei $n = \varkappa - h$, wo $\varkappa$ eine ganze positive Zahl und h eine sehr kleine Grösse bedeutet, die schliesslich gleich 0 gesetzt werden soll. Dann kann man I_{-n} auch schreiben:

$$I_{-n} = \sum_{r\,0}^{r=\varkappa-1} \frac{(-1)^r}{\Pi(-\varkappa+h+r)\Pi(r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\varkappa+h+2r}$$

$$+ \sum_{r=\varkappa}^{r=\infty} \frac{(-1)^r}{\Pi(-\varkappa+h+r)\Pi(r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\varkappa+h+2r}.$$

In der zweiten Summe setze man $\varkappa + p$ für r, also:

$$I_{-n} = \sum_{r=0}^{r=\varkappa-1} \frac{(-1)^r}{\Pi(-\varkappa+h+r)\Pi(r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\varkappa+h+2r}$$

$$+ (-1)^\varkappa \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p}{\Pi(p+h)\Pi(p+\varkappa)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\varkappa+h+2p}.$$

Für jeden Werth von z gilt nun die Gleichung: $\Pi(-z)\Pi(z-1) = \frac{\pi}{\sin z\pi}$, daher, wenn wir $z = \varkappa - r - h$ setzen:

$$\Pi(-\varkappa+r+h) = \frac{\pi}{\Pi(\varkappa-r-h-1)\sin(\varkappa-r-h)\pi}$$

$$= (-1)^{\varkappa-r+1} \frac{\pi}{\Pi(\varkappa-r-h-1)\sin h\pi},$$

folglich:

$$I_{-n} = (-1)^{\varkappa} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Pi(p+h)\,\Pi(p+\varkappa)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\varkappa+h+2p} \right.$$

$$\left. - \frac{\sin h\pi}{\pi} \sum_{p=0}^{\varkappa-1} \frac{\Pi(\varkappa-p-h-1)}{\Pi(p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\varkappa+h+2p} \right\}.$$

Aus dieser Form ist unmittelbar ersichtlich, dass I_{-n} für $h=0$ mit $(-1)^n I_n$ identisch wird. Um nun den wahren Werth des Bruches $2\pi e^{(\varkappa-h)\pi i} \dfrac{I_n \cos(\varkappa-h)\pi - I_{-n}}{\sin 2(\varkappa-h)\pi}$ für $h=0$ zu finden, hat man Zähler und Nenner desselben nach h zu differentiiren und dann $h=0$ zu setzen. Man findet so zunächst:

$$(-1)^{\varkappa+1} \left\{ (-1)^{\varkappa} \left(\frac{d I_n}{d h}\right)_{h=0} - \left(\frac{d I_{-n}}{d h}\right)_{h=0} \right\}.$$

Nach den für I_n und I_{-n} geltenden Reihen hat man nun, wenn $\Psi(z) = \dfrac{d}{dz} \log \Pi(z)$ gesetzt wird:

$$\left(\frac{d I_n}{d h}\right)_{h=0} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{\varkappa+2p}}{\Pi(\varkappa+p)\,\Pi(p)} \left\{ -\log\frac{x}{2} + \Psi(\varkappa+p) \right\}$$

und:

$$\left(\frac{d I_{-n}}{d h}\right)_{h=0} = (-1)^{\varkappa} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{\varkappa+2p}}{\Pi(\varkappa+p)\,\Pi(p)} \left(\log\frac{x}{2} - \Psi(p)\right)$$

$$- (-1)^{\varkappa} \sum_{p=0}^{\varkappa-1} \frac{\Pi(\varkappa-p+1)}{\Pi(p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\varkappa+2p}.$$

Demnach ergiebt sich schliesslich als Werth jenes Bruches:

$$-\left(\frac{2}{x}\right)^n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\Pi(n-p+1)}{\Pi(p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$$

$$+ \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Pi(n+p)\,\Pi(p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \left\{ \log\frac{x^2}{4} - \Psi(n+p) - \Psi(p) \right\}.$$

Dieser Ausdruck stellt also im Falle eines ganzzahligen n neben I_n das zweite particuläre Integral der Bessel'schen Differentialgleichung dar und zwar ist derselbe gleich $2Y_n$, wo Y_n die in §. 105 angegebene Bedeutung hat.

2. Aufgabe. Setzt man in der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d z^2} + \frac{1}{z}\frac{d y}{d z} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) y = 0$$

für y den Werth $z^{-1/2} u$, so geht dieselbe über in:

$$\frac{d^2 u}{d z^2} + \left(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{z^2}\right) u = 0.$$

Setzt man hierin: $u = P \cos(x + \alpha) + Q \sin(x + \alpha)$, so wird diese Gleichung befriedigt, wenn man P und Q durch die Gleichungen bestimmt:

$$\frac{d^2 P}{d z^2} + 2\frac{d Q}{d z} - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{z^2} P = 0 \text{ und } \frac{d^2 Q}{d z^2} - 2\frac{d P}{d z} - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{z^2} Q = 0.$$

Nimmt man sodann für P und Q Reihen an, welche nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{z}$ fortschreiten, so findet man mit Hülfe der eben angeführten Gleichungen die im Texte enthaltenen Reihen bis auf eine multiplicative Constante. Man sieht jedoch nicht, wie man diese Constante sowie auch α, die bei diesem Verfahren willkürlich bleiben, derart bestimmen könne, dass der gefundene Ausdruck genau die Entwickelung von $I_n(z)$ nach negativen Potenzen von z darstelle. Vielmehr muss man dazu einen ganz anderen Weg einschlagen, nämlich I_n durch ein bestimmtes Integral ausdrücken, wozu uns hier noch die Hülfsmittel fehlen. Vergl. Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen, §§. 16 und 17.

§. 106.

Aufgabe. Wie im §. 106 findet man zunächst:

$$\frac{d Y_n}{d x} I_n - \frac{d I_n}{d x} Y_n = \frac{A}{x}.$$

Um A zu bestimmen, suche man links den Coefficienten von $\frac{1}{x}$ und setze denselben gleich A. Man erhält $A = 1$, also:

$$\frac{d Y_n}{d x} I_n - \frac{d I_n}{d x} Y_n = \frac{1}{x}.$$

§. 107.

Aufgabe. Führt man in die Gleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2\xi}{dx^2}-2x\frac{d\xi}{dx}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}\xi=0,$$

von welcher ein Integral $\xi=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$ ist, an Stelle von x die neue Veränderliche ϱ ein durch die Gleichung: $1-x^2=\varrho^2$, so erhält man die Gleichung:

$$\varrho^2(1-\varrho^2)\frac{d^2\xi}{d\varrho^2}+\varrho(1-2\varrho^2)\frac{d\xi}{d\varrho}+\{n(n+1)\varrho^2-m^2\}\xi=0,$$

und dieser wird genügt durch die Reihe:

$$\xi=A\varrho^m\left\{1-\frac{(n-m)(n+m+1)}{2^2.(m+1)}\varrho^2\right.$$

$$\left.+\frac{(n-m)(n-m-2)(n+m+1)(n+m+3)}{2!\,2^4.(m+1)(m+2)}\varrho^4-\cdots\right\}.$$

Dieselbe ist identisch mit $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$, wenn $\left(\frac{\xi}{\varrho^m}\right)_{\varrho=0}$ $=\left\{\frac{\xi}{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}\right\}_{x=1}$, also $A=\frac{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n+m)}{2.4\ldots(2m)}$ ist. Setzt man sodann $\varrho=\frac{\varphi}{n}$ und lässt n unendlich gross werden, so erhält man, abgesehen von einer allerdings unendlich grossen Constanten, die Reihe:

$$\frac{\varphi^m}{2^m.m!}\left\{1-\frac{1}{2^2(m+1)}\varphi^2+\frac{1}{2!\,2^4(m+1)(m+2)}\varphi^4-\cdots\right\},$$

welches der Ausdruck für $I_m(\varphi)$ ist. Es ist also:

$$I_m(\varphi)=\lim_{n=\infty}\frac{(-\varphi)^m}{(n+1)(n+2)..(n+m)}\left\{\frac{(n^2-\varphi^2)^{1/2}}{\varphi}\frac{d}{d\varphi}\right\}^m P_n\left\{\left(1-\frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{1/2}\right\}.$$

Dieser Uebergang von der Laplace'schen Function zur Bessel'schen ist jedoch aus mehrfachen Gründen nicht ganz einwurfsfrei.

§. 110.

Aufgabe. Setzt man $u = x^{-(k+1)} y$, so erhält die Gleichung die Form:

$$x \frac{dy}{dx} - (k+1) y + b y^2 = c x^{m+k+2},$$

woraus nach dem Satze in §. 109 sofort die Richtigkeit der Behauptung folgt.

§. 112.

1. Aufgabe. Hier ist $m = 2$ und für n steht ni. Führt man zunächst in $y = x^3 \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^2 \left(\frac{A e^{nx} + B e^{-nx}}{x}\right)$ die angedeutete Differentiation aus, setzt dann ηi für n und ferner $n^2 (A + B) = C \sin \alpha$, $i n^2 (A - B) = C \cos \alpha$, so folgt:

$$y = C \left\{\left(1 - \frac{3}{n^2 x^2}\right) \sin (nx + \alpha) + \frac{3}{nx} \cos (nx + \alpha)\right\}.$$

2. Aufgabe. Aus §. 111 folgt unmittelbar, dass diese Gleichung in endlicher Form integrirbar ist, wenn q, wie behauptet, das Reciproke einer ungeraden ganzen Zahl ist. Für $\frac{1}{q} = 2p + 1$ und $t = \frac{z^q}{q}$ geht die Gleichung über in: $\frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{2p}{t} \frac{dv}{dt} - n^2 v = 0$ und diese nimmt wieder durch die Substitution $v = y t^p$ die in §. 112 behandelte Form an:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - n^2 y = \frac{p(p+1)}{t^2} y.$$

Daher ist:

$$y = t^{p+1} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt}\right)^{p+1} (A' e^{nt} + B' e^{-nt}),$$

oder:

$$y = t^{p+1} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt}\right)^{p} \left(\frac{A e^{nt} + B e^{-nt}}{t}\right),$$

und

$$y = t^{-p} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt}\right)^{-p} (A' e^{nt} + B' e^{-nt})$$

$$= t^{-p} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt}\right)^{-p-1} \left(\frac{A e^{nt} + B e^{-nt}}{t}\right).$$

Führt man hierin wieder z für t und q für p ein und setzt $y = v t^{-p}$, so erhält man die im Texte angegebenen Formeln.

3. Aufgabe. Für $u = y x^{p+1}$ folgt:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{2(p+1)}{x} \frac{dy}{dx} + a^2 y = 0.$$

Auf genau dieselbe Weise wie in §. 112 erhält man daher, da

$$v = C \frac{\cos(a x + \alpha)}{a}$$

das allgemeine Integral der Gleichung $\frac{d^2 v}{d x^2} + a^2 v = 0$ ist,

$$u = C_1 x^{p+1} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^{p+1} \frac{\cos(a x + \alpha)}{a},$$

oder auch, da die ursprüngliche Gleichung durch Vertauschung von $p + 1$ mit $-p$ ungeändert bleibt:

$$u = C_1 x^{-p} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^{-p} \frac{\cos(a x + \alpha)}{a}.$$

Diese Gleichung kann noch anders geschrieben werden. Es ist nämlich:

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^{-1} \frac{\cos(a x + \alpha)}{a} = \int \frac{x \cos(a x + \alpha)}{a} dx$$

$$= \frac{x \sin(a x + \alpha)}{a^2} + \frac{\cos(a x + \alpha)}{a^3}.$$

Andererseits ist, wenn man $a^2 = r$ setzt:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\cos(r^{1/2} x + \alpha)}{r^{1/2}}\right) = -\frac{x \sin(r^{1/2} x + \alpha)}{2r} - \frac{\cos(r^{1/2} x + \alpha)}{2 . r^{3/2}},$$

folglich: $\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^{-1} = -2 \frac{d}{dr}$, also $\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^{-p} = (-2)^p \left(\frac{d}{dr}\right)^p$ und:

$u = C x^{-p} \left(\frac{d}{dr}\right)^p \frac{\cos(r^{1/2} x + \alpha)}{r^{1/2}}$, wo nach der Differentiation wieder a^2 für r zu schreiben ist.

Vermischte Aufgaben.

1. (1) Für $x^{1/3} = z$ geht die Gleichung über in:

$$\frac{d^2 y}{d z^2} - \frac{2}{z} \frac{dy}{dz} - (3c)^2 y = 0;$$

daher nach der 1. Aufgabe in §. 85:

$$y = A \left(1 - \frac{(3cz)^2}{1.2} + \frac{(3cz)^4}{1.2.4} - \frac{(3cz)^6}{1.2.3.4.6} + \cdots\right)$$

$$+ B z^3 \left(1 + \frac{(3cz)^2}{2.5} + \frac{(3cz)^4}{2.4.5.7} + \frac{(3cz)^6}{2.4.6.5.7.9} + \cdots\right)$$

$$= C_1 (1 - 3cz) e^{3cz} + C_2 (1 + 3cz) e^{-3cz}.$$

(2) Man setze wieder $x^{1/5} = z$, so erhält man die Gleichung: $\frac{d^2 y}{d z^2} - \frac{4}{z}\frac{d y}{d z} - (5c)^2 y = 0$. Mit Benutzung des Resultats in der 1. Aufgabe des §. 85 für $n = -2$, $m = -(5c)^2$ ergiebt sich dann: $y = A(3 - 15cz + 25c^2 z^2) e^{5cz} + B(3 + 15cz + 25c^2z^2) e^{-5cz}$.

2. Berechnet man aus der Gleichung $y^3 + y + x = 0$ die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$, setzt dieselben in die Differentialgleichung ein und drückt sodann die dritte und die höheren Potenzen von y durch die niedrigeren Potenzen von y und durch x mit Hülfe der Gleichung $y^3 + y + x = 0$ aus, so findet man, dass die Differentialgleichung identisch befriedigt wird. Da die cubische Gleichung drei verschiedene Wurzeln, die Differentialgleichung aber nur zwei verschiedene particuläre Integrale besitzt, so lässt sich vermuthen, dass die beiden Theile, aus denen jede Wurzel von $y^3 + y + x = 0$ nach der Cardani'schen Formel besteht, selbst die particulären Integrale der Differentialgleichung sind. Dies bestätigt sich in der That.

3. Setzt man $qx = u$ und $y = \frac{z}{u}$, so folgt:

$$u\frac{d^2 z}{du^2} + (u-2)\frac{dz}{du} - z = 0.$$

Hieraus:

$$z = A_0\left(1 - \frac{1}{2}u\right) + A_1 u^3\left(1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{20}u^2 - \frac{1}{30}u^3 + \frac{1}{168}u^4 - \cdots\right).$$

Die in Parenthese stehende Reihe ist gleich:

$$12\,u^{-3}\left\{\left(1+\frac{1}{2}u\right)e^{-u} - \left(1 - \frac{1}{2}u\right)\right\}.$$

Mithin wird: $z = A'\left(1 - \frac{1}{2}u\right) + B'\left(1 + \frac{1}{2}u\right)e^{-u}$, also:

$$qxy = A(qx - 2) + B(qx + 2)e^{-qx}.$$

4. (1) Diese Gleichung besitzt die drei particulären Integrale:

$$y_1 = x^{-6}\left\{1 - \frac{4^2}{5.(31-5^2)}x + \frac{4^2.3^2}{5.4.(31-5^2)(31-4^2)}x^2 - \frac{4^2.3^2.2^2}{5.4.3.(31-5^2)(31-4^2)(31-3^2)}x^3 + \frac{4^2.3^2.2^2.1^2}{5.4.3.2(31-5^2)(31-4^2)(31-3^2)(31-2^2)}x^4\right\},$$

$$y_2 = x\left\{1 + \frac{3^2}{2(31-2^2)}x + \frac{3^2.4^2}{2.3(31-2^2)(31-3^2)}x^2 + \frac{3^2.4^2.5^2}{2.3.4.(31-2^2)(31-3^2)(31-4^2)}x^3\right\},$$

$$y_3 = x^5\left\{1 - \frac{7^2}{6(6^2-31)}x + \frac{7^2.8^2}{6.7(6^2-31)(7^2-31)}x^2 - \frac{7^2.8^2.9^2}{6.7.8.(6^2-31)(7^2-31)(8^2-31)}x^3 + \cdots\right\}.$$

(2) Die drei particulären Integrale dieser Gleichung sind

$$y_1 = 1 + \frac{a.b}{3!}x^3 + \frac{a(a-3)b(b-3)}{6!}x^6 + \frac{a(a-3)(a-6).b(b-3)(b-6)}{9!}x^9 + \cdots$$

$$y_2 = x + \frac{(a-1)(b-1)}{4!}x^4 + \frac{(a-1)(a-4)(b-1)(b-4)}{7!}x^7 + \cdots$$

$$y_3 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{(a-2)(b-2)}{5!}x^5 + \frac{(a-2)(a-5)(b-2)(b-5)}{8!}x^8 + \cdots$$

(3) Die beiden particulären Integrale dieser Gleichung sind:

$$y_1 = x^{-b}\left\{1 - \frac{(a-b+1)(b-1)}{1.(b+c-1)}qx + \frac{(a-b+1)(a-b+2)(b-1)(b-2)}{2!(b+c-1)(b+c-2)}(qx)^2 - \cdots\right\}$$

$$y_2 = x^c\left\{1 - \frac{(a+c+1)(c+1)}{1.(b+c+1)}qx + \frac{(a+c+1)(a+c+2)(c+1)(c+2)}{2!(b+c+1)(b+c+2)}(qx)^2 - \cdots\right\}.$$

5. $$\xi = A\left\{1 + \frac{p}{2!}\xi^2 + \frac{p(p+2)}{4!}\xi^4 + \frac{p(p+2)(p+4)}{6!}\xi^6 + \cdots\right\} + B\left\{\xi + \frac{p+1}{3!}\xi^3 + \frac{(p+1)(p+3)}{5!}\xi^5 + \cdots\right\}.$$

6. Die particulären Integrale dieser Gleichung sind:

$$u_1 = 1 - \frac{p}{1}x + \frac{p(p-3)}{2!}x^2 - \frac{p(p-4)(p-5)}{3!}x^3 + \frac{p(p-5)(p-6)(p-7)}{4!}x^4 - \cdots,$$

und:

$$u_2 = x^p \left\{1 + \frac{p}{1} x + \frac{p(p+3)}{2!} x^2 + \frac{p(p+4)(p+5)}{3!} x^3 \right.$$
$$\left. + \frac{p(p+5)(p+6)(p+7)}{4!} x^4 + \cdots \right\}.$$

Führt man aber in die gegebene Gleichung durch $1 - 4x = z^2$ für x die neue Veränderliche z ein, so ergiebt sich die Gleichung

$$(1 - z^2) \frac{d^2 u}{d z^2} + 2(p-1) z \frac{d u}{d z} - p(p-1) u = 0,$$

deren allgemeines Integral lautet: $u = A(1-z)^p + B(1+z)^p$. Es ist daher auch: $u = A\{1-(1-4x)^{1/2}\}^p + B\{1+(1-4x)^{1/2}\}^p$. Ist $p > 0$, so ist bis auf einen von x unabhängigen Factor das particuläre Integral $\{1-(1-4x)^{1/2}\}^p$ identisch mit u_2; denn es gilt der leicht zu beweisende Satz: Alle particulären Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche für das specielle Argument $x = x_1$ verschwinden, sind bis auf einen von x unabhängigen Factor mit einander identisch, wenn jene Gleichung ein Integral besitzt, welches für $x = x_1$ nicht verschwindet. Nun verschwinden aber u_2 und $\{1-(1-4x)^{1/2}\}^p$ für $x = 0$, während das Integral $\{1+(1-4x)^{1/2}\}^p$ für $x = 0$ nicht verschwindet. Daher ist $u_2 = C\{1-(1-4x)^{1/2}\}^p$, wo C eine bestimmte Constante ist. Durch wirkliche Ausführung der Entwickelung überzeugt man sich ferner, dass $\{1+(1-4x)^{1/2}\}^p$ bis auf den Factor 2^p identisch ist mit u_1.

7. Für $y = x^2 u$ geht die Gleichung über in:

$$\frac{d^3 u}{d x^3} + \frac{6}{x} \frac{d^2 u}{d x^2} + \left(q^3 - \frac{12}{x^3}\right) u = 0.$$

Betrachtet man nun zunächst die Gleichung $\frac{d^3 v}{d x^3} + q^3 v = 0$, deren allgemeines Integral lautet:

$$v = A_1 e^{-qx} + B_1 e^{1/2 qx} \sin\left(\frac{3^{1/2}}{2} qx + \alpha\right),$$

und setzt man darin $v = x^2 w$, so folgt:

$$\frac{d^3 w}{d x^3} + \frac{6}{x} \frac{d^2 w}{d x^2} + \frac{6}{x^2} \frac{d w}{d x} + q^3 w = 0.$$

Differentiirt man diese nochmals nach x und setzt $\frac{dw}{dx} = t$, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{d^3 t}{d x^3} + \frac{6}{x}\frac{d^2 t}{d x^2} + \left(q^3 - \frac{12}{x^3}\right) t = 0.$$

Demnach ist $u = t = \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{x^2}\right)$ und somit: $y = x^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{x^2}\right)$. Setzt man noch $-A_1 q = A$ und $\frac{1}{2} B_1 q = B$, so ergiebt sich schliesslich:

$$y = A e^{-qx}\left(1 + \frac{2}{qx}\right) + B e^{\frac{1}{2}qx}\left\{\left(1 - \frac{4}{qx}\right) \sin\left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2} q x + \alpha\right)\right.$$
$$\left. + 3^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2} q x + \alpha\right)\right\}.$$

8. Man zeigt leicht, dass der Ausdruck $v = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-n}$ der Differentialgleichung

$$(1 - x^2)^{\frac{1}{2} - n} \frac{\partial}{\partial x}\left\{(1 - x^2)^{\frac{1}{2} + n} \frac{\partial v}{\partial x}\right\} + \alpha^{1 - 2n} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left\{\alpha^{1 + 2n} \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right\} = 0$$

genügt. Setzt man nun für v eine nach Potenzen von α fortschreitende Reihe ein, so erhält man, indem man den Coefficienten von α^m auf der linken Seite jener Gleichung gleich Null setzt, für diesen Coefficienten die im Texte angegebene Differentialgleichung.

9. Differentiirt man $U = \{P_n(x)\}^2$, so folgt:

$$(1 - x^2)\frac{dU}{dx} = 2 P_n . (1 - x^2)\frac{d P_n}{dx},$$

und hieraus durch nochmalige Differentiation:

$$\frac{d}{dx}\left\{(1 - x^2)\frac{dU}{dx}\right\} = 2(1 - x^2)\left(\frac{d P_n}{dx}\right)^2 + 2 P_n \frac{d}{dx}\left\{(1 - x^2)\frac{d P_n}{dx}\right\}$$
$$= 2\ (1 - x^2)\left(\frac{d P_n}{dx}\right)^2 - 2n(n+1)\, U.$$

Setzt man: $(1 - x^2)\left(\frac{d P_n}{dx}\right)^2 = Z$, so ergiebt sich:

$$\frac{d}{dx}\left\{(1 - x^2)\frac{dU}{dx}\right\} + 2n(n+1)\, U = 2Z;$$

ferner ist:

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{d}{dx}\left\{(1 - x^2)\frac{dU}{dx}\right\}\right] + 2n(n+1)\frac{d}{dx}\{(1 - x^2)U\}$$
$$= 2\frac{d}{dx}\{(1 - x^2)Z\} = 4\ (1 - x^2)\frac{d P_n}{dx}\frac{d}{dx}\left\{(1 - x^2)\frac{d P_n}{dx}\right\}$$
$$= -4n(n+1)(1 - x^2) P_n \frac{d P_n}{dx} = -2n(n+1)(1 - x^2)\frac{dU}{dx},$$

mithin:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dU}{dx}\right\}\right]+4n(n+1)\left\{(1-x^2)\frac{dU}{dx}-xU\right\}=0.$$

Für $x = \cos\vartheta$ geht diese Gleichung, welche ausser durch $\{P_n(x)\}^2$ noch durch $P_n(x)\,Q_n(x)$ und $\{Q_n(x)\}^2$ befriedigt wird, über in:

$$\left(\frac{d}{d\vartheta}\sin\vartheta\right)^2\frac{dU}{d\vartheta}+4n(n+1)\sin\vartheta\left(\frac{d}{d\vartheta}\sin\vartheta\right)U=0.$$

10. Nach der 4. Aufgabe in §. 90 und der 2. Aufgabe in §. 99 gelten die Gleichungen: $(2n+1)xP_n = nP_{n-1}+(n+1)P_{n+1}$ und: $(2n+1)xQ_n = nQ_{n-1}+(n+1)Q_{n+1}$. Aus diesen folgt: $(n+1)\{P_{n+1}Q_n - Q_{n+1}P_n\} = n\{P_nQ_{n-1}-Q_nP_{n-1}\}$. Mithin schliesslich: $(n+1)\{P_{n+1}Q_n-Q_{n+1}P_n\} = P_1Q_0-Q_1P_0$. Nun ist: $P_0=1$, $P_1=x$. Ferner folgt aus der Gleichung:

$$Q_n = P_n\int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)P_n^2}$$

im §. 96, dass $Q_0=\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$ und $Q_1=-1+\frac{1}{2}x\log\frac{x+1}{x-1}$ ist. Setzt man diese Werthe ein, so erhält man:

$$P_{n+1}Q_n-Q_{n+1}P_n=\frac{1}{n+1}.$$

11. Der erste Theil folgt unmittelbar aus §. 107. — Um auch für den Fall $m>n$ das allgemeine Integral zu erhalten, sei zunächst $m=n$, also die Differentialgleichung:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2(n+1)x\frac{dy}{dx}=0.$$

Von dieser lautet ein particuläres Integral:

$$y=\int_x^\infty\frac{dx}{(x^2-1)^{n+1}}.$$

Differentiirt man sodann die vorige Gleichung und setzt $\frac{dy}{dx}=u$, so wird: $(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2}-2(n+2)x\frac{du}{dx}-2(n+1)u=0$ und ein particuläres Integral dieser ist: $(x^2-1)^{-n-1}$. Nach §. 65 folgt hieraus als allgemeines Integral der letzten Gleichung:

$$u=A(x^2-1)^{-n-1}+B(x^2-1)^{-n-1}\int_x^1(x^2-1)^n\,dx.$$

Differentiirt man nun die letzte Differentialgleichung $(m-n-1)$ mal nach x, so erhält man für $\frac{d^{m-n-1}u}{dx^{m-n-1}} = y$ wieder die gegebene Differentialgleichung, deren allgemeines Integral im Falle $m > n$ somit lautet:

$$y = A\,\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}\left\{(x^2-1)^{-n-1}\right\}$$

$$+ B\,\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}\left\{(x^2-1)^{-n-1}\int_x^1 (x^2-1)^n\,dx\right\}.$$

12. Dies folgt unmittelbar aus §. 107.

13. Setzt man $y = (x^2-1)^m u$, so geht die Gleichung in die unter Nr. 11 behandelte Gleichung über.

14. Setzt man $x = z^2$ und $y = z^{-n+1}u$, so wird:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{du}{dz} + \left(1 - \frac{(n-1)^2}{z^2}\right)u = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser letzteren ist, falls n eine ganze Zahl ist, $u = A\,I_{n-1}(z) + B\,Y_{n-1}(z)$, daher das der gegebenen:

$$y = x^{-\frac{1}{2}(n-1)}\left\{A\,I_{n-1}(x^{\frac{1}{2}}) + B\,Y_{n-1}(x^{\frac{1}{2}})\right\}.$$

15. Setzt man $y = x^{-\frac{1}{2}(n-1)}u$ und sodann $c^{\frac{1}{2}}x_m = mz$, so geht die Gleichung über in:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{du}{dz} + \left(1 - \frac{\frac{1}{4}(n-1)^2 - b}{m^2z^2}\right)u = 0,$$

deren allgemeines Integral lautet: $u = A\,I_\mu(z) + B\,I_{-\mu}(z)$, wo $\mu^2 m^2 = \frac{1}{4}(n-1)^2 - b$ gesetzt ist. Das allgemeine Integral der gegebenen ist daher:

$$y = x^{-\frac{1}{2}(n-1)}\left\{A\,I_\mu\left(c^{\frac{1}{2}}\frac{x^m}{m}\right) + B\,I_{-\mu}\left(c^{\frac{1}{2}}\frac{x^m}{m}\right)\right\}.$$

16. Nach Formel (2) in §. 103 ist:

$$\frac{d}{dx}\left\{x^m I_m(x)\right\} = x^m I_{m-1}.$$

Setzt man hierin $x = z^{\frac{1}{2}}$, so geht die Gleichung über in:

$$\frac{d}{dz}\left\{z^{\frac{m}{2}} I_m(z^{\frac{1}{2}})\right\} = \frac{1}{2}z^{\frac{m-1}{2}} I_{m-1}(z^{\frac{1}{2}}),$$

und nach p-maliger Differentiation wird hieraus:

$$\frac{d^p}{d z^p} \{z^{\frac{m}{2}} I_m(z^{1/2})\} = \frac{1}{2^p} z^{\frac{m-p}{2}} I_{m-p}(z^{1/2}).$$

Ist $p = m$, so folgt:

$$\frac{d^m}{d z^m} \{z^{\frac{m}{2}} I_m(z^{1/2})\} = \frac{1}{2^m} I_0(z^{1/2}).$$

Differentiirt man dies nochmals und beachtet, dass $\frac{d I_0}{d x} = - I_1$ ist, so folgt:

$$\frac{d^{m+1}}{d z^{m+1}} \{z^{\frac{m}{2}} I_m(z^{1/2})\} = -\frac{1}{2^{m+1}} z^{-1/2} I_1(z^{1/2}),$$

und hieraus durch $m - 1$ weitere Differentiationen:

$$\frac{d^{2m}}{d z^{2m}} \{z^{\frac{m}{2}} I_m(z^{1/2})\} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m}} z^{-\frac{m}{2}} I_m(z^{1/2}),$$

oder:

$$(-4z)^m \frac{d^{2m}}{d z^{2m}} \{z^{\frac{m}{2}} I_m(z^{1/2})\} = z^{\frac{m}{2}} I_m(z^{1/2}).$$

Setzt man nun noch $z = -4 \alpha_p x$, wo $\alpha_p^m = 1$ ist, so geht diese Gleichung über in:

$$x^m \frac{d^{2m}}{d x^{2m}} \{x^{\frac{m}{2}} I_m[2(-\alpha_p x)^{1/2}]\} = x^{\frac{m}{2}} I_m\{2(-\alpha_p x)^{1/2}\},$$

woraus man erkennt, dass $x^{\frac{m}{2}} I_m\{2(-\alpha_p x)^{1/2}\}$ ein particuläres Integral der Gleichung $x^m \frac{d^{2m} y}{d x^{2m}} = y$ ist. Da alle jene Formeln auch für die Bessel'sche Function zweiter Art gelten und die letztere, falls m eine ganze Zahl ist, durch Y_m dargestellt wird, so ist $x^{\frac{m}{2}} Y_m\{2(-\alpha_p x)^{1/2}\}$ ein zweites particuläres Integral unserer Differentialgleichung, und daher lautet das vollständige Integral derselben:

$$y = x^{\frac{m}{2}} \sum_{p=0}^{p=m-1} [A_p I_m\{2(-\alpha_p x)^{1/2}\} + B_p Y_m\{2(-\alpha_p x)^{1/2}\}],$$

wo $\alpha_p^m = 1$ ist.

Analog verfährt man bei der zweiten Gleichung. Man erhält nämlich leicht die Formeln:

$$\frac{d^{2m+1}}{dz^{2m+1}}\left\{z^{\frac{m}{2}+\frac{1}{4}} I_{m+\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}})\right\} = \frac{1}{2^{2m+1}} z^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}} I_{-m-\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}})$$

und

$$\frac{d^{2m+1}}{dz^{2m+1}}\left\{z^{\frac{m}{2}+\frac{1}{4}} I_{-m-\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}})\right\} = (-1)^{2m+1}\frac{1}{2^{2m+1}} z^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}} I_{m+\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}}),$$

und daher, wenn man beide addirt:

$$\frac{d^{2m+1}}{dz^{2m+1}}\left\{z^{\frac{m}{2}+\frac{1}{4}}\left[I_{-m-\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}}) + i\, I_{m+\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}})\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{2^{2m+1}} z^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}}\left\{- I_{m+\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}}) + i\, I_{-m-\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}})\right\},$$

oder:

$$(4z)^{m+\frac{1}{2}}\frac{d^{2m+1}}{dz^{2m+1}}\left\{z^{\frac{m}{2}+\frac{1}{4}}\left[I_{-m-\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}}) + i\, I_{m+\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}})\right]\right\}$$
$$= z^{\frac{m}{2}+\frac{1}{4}}\left\{- I_{m+\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}}) + i\, I_{-m-\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}})\right\}.$$

Setzt man nun noch $z = 4\alpha_p^2 x$, wo $\alpha_p^{2m+1} = -i$ ist, so geht diese Gleichung über in:

$$x^{m+\frac{1}{2}}\frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}}\left\{x^{\frac{m}{2}+\frac{1}{4}}\left[I_{-m-\frac{1}{2}}(2\alpha_p x^{\frac{1}{2}}) + i\, I_{m+\frac{1}{2}}(2\alpha_p x^{\frac{1}{2}})\right]\right\}$$
$$= x^{\frac{m}{2}+\frac{1}{4}}\left\{I_{-m-\frac{1}{2}}(2\alpha_p x^{\frac{1}{2}}) + i\, I_{m+\frac{1}{2}}(2\alpha_p x^{\frac{1}{2}})\right\},$$

woraus man erkennt, dass

$$x^{\frac{m}{2}+\frac{1}{4}}\left\{I_{-m-\frac{1}{2}}(2\alpha_p x^{\frac{1}{2}}) + i\, I_{m+\frac{1}{2}}(2\alpha_p x^{\frac{1}{2}})\right\}$$

ein particuläres Integral der Gleichung $x^{m+\frac{1}{2}}\dfrac{d^{2m+1}y}{dx^{2m+1}} = y$ ist. Das allgemeine Integral ist somit:

$$y = x^{\frac{m}{2}+\frac{1}{4}}\sum_{p=0}^{2m} C_p\left\{I_{-m-\frac{1}{2}}(2\alpha_p x^{\frac{1}{2}}) + i\, I_{m+\frac{1}{2}}(2\alpha_p x^{\frac{1}{2}})\right\},$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_{2m}$ die Wurzeln der Gleichung $\alpha^{2m+1} = -i$ sind.

(Lommel, Studien etc. S. 120 und Math. Ann. Bd. 2.)

17. Man setze in der ersten Gleichung $e^x = z$, in der zweiten $y = xv$ und sodann $e^{\frac{1}{x}} = z$.

18. Nach §. 106 gilt die Gleichung:

$$\frac{dI_n}{dx} I_{-n} - \frac{dI_{-n}}{dx} I_n = \frac{2\sin n\pi}{\pi x}.$$

Nach §. 103 ist aber: $\frac{d I_n}{d x} = I_{n-1} - \frac{n}{x} I_n$ und ferner:

$$\frac{d I_{-n}}{d x} = - I_{1-n} - \frac{n}{x} I_{-n}.$$

Setzt man diese Werthe ein, so folgt:

$$I_n I_{1-n} + I_{n-1} I_{-n} = \frac{2}{\pi x} \sin n \pi.$$

Ist aber n eine ganze Zahl, so ist nach der Aufgabe in §. 106:

$$\frac{d Y_n}{d x} I_n - \frac{d I_n}{d x} Y_n = \frac{1}{x}.$$

Nun ist $\frac{d Y_n}{d x} = Y_{n-1} - \frac{n}{x} Y_n$ und $\frac{d I_n}{d x} = I_{n-1} - \frac{n}{x} I_n$, daher:

$Y_{n-1} I_n - I_{n-1} Y_n = \frac{1}{x}$, oder: $Y_n I_{n+1} - I_n Y_{n+1} = \frac{1}{x}$.

19. Setzt man $u = e^{-\int Q dx} . v$, so geht die Gleichung über in $\frac{d^2 v}{d x^2} + \left(a - \frac{m(m+1)}{x^2}\right) v = 0$, welche in endlicher Form integrirbar ist, sobald m eine ganze Zahl ist.

20. Setzt man zunächst $u = x^{-\frac{r-1}{2}} v$, so erhält man für v die Gleichung:

$$\frac{d^2 v}{d x^2} + \frac{1}{x} \frac{d v}{d x} = \left(b x^m + \frac{c + \frac{1}{4}(r-1)^2}{x^2}\right) v.$$

Substituirt man hierin noch $b^{1/2} x^{\frac{m}{2}+1} = \left(\frac{m}{2} + 1\right) z$, so folgt:

$$\frac{d^2 v}{d z^2} + \frac{1}{z} \frac{d v}{d z} = \left(1 + \frac{4c + (r-1)^2}{(m+2)^2 z^2}\right) v.$$

Diese letztere ist aber in endlicher Form integrirbar, wenn $m + 2 = \frac{2 \{(r-1)^2 + 4c\}^{1/2}}{2i+1}$ und i eine positive ganze Zahl ist.

(Malmsten, Cambridge Math. Journ., 2 Serie, Bd. 5, S. 180.)

21. Die Function $y = e^{a(x^2 + xh)^{1/2}}$ genügt, wie man leicht verificirt, der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{h^2}{x^2} \frac{\partial^2 y}{\partial h^2} = a^2 y.$$

Setzt man hierin die Entwickelung von y, nämlich $y = \sum_{p=0}^{p=\infty} u_p h^p$, ein, so erhält man durch Gleichsetzung der Coefficienten gleicher Potenzen von h auf beiden Seiten für u_{p+1} die angegebene Differentialgleichung.

22. Multiplicirt man die Gleichung

$$\frac{d^m y}{d x^m} - \frac{p m}{x} \frac{d^{m-1} y}{d x^{m-1}} + k^m y = 0$$

mit x^m, setzt dann $x = e^\tau$ und wendet den in §. 37 enthaltenen Satz an, so kann man die Gleichung, wenn man noch $x \frac{d}{dx} = \frac{d}{d\tau}$ mit ϑ bezeichnet, in der symbolischen Form schreiben:

$$y + \frac{k^m}{\vartheta(\vartheta - 1) \ldots (\vartheta - m + 2)(\vartheta - m + 1 - p m)} e^{m\tau} y = 0.$$

Setzt man hierin $y = e^{[m(p+1)-1]\tau} y_1$, und wendet den II. Satz aus §. 36 an, so geht diese Gleichung über in:

$$y_1 + \frac{k^m}{\{\vartheta + m(p+1) - 1\}\{\vartheta + m(p+1) - 2\} \cdots} \times \frac{1}{\{\vartheta + m(p+1) - (m-1)\}\vartheta} e^{m\tau} y_1 = 0,$$

oder, wenn man noch $m\tau = \tau'$ und $\vartheta = m\vartheta' = m \frac{d}{d\tau'}$ setzt, so erhält man die Form:

$$y_1 + \left(\frac{k}{m}\right)^m \frac{1}{\left\{\vartheta' + p + 1 - \frac{1}{m}\right\}\left\{\vartheta' + p + 1 - \frac{2}{m}\right\} \cdots} \times \frac{1}{\left\{\vartheta' + p + 1 - \frac{m-1}{m}\right\}\vartheta'} e^{\tau'} y_1 = 0.$$

Durch analoge Transformationen geht andererseits die Gleichung $\frac{d^m X}{d x^m} + k^m X = 0$ über in:

$$X + \left(\frac{k}{m}\right)^m \frac{1}{\vartheta'\left(\vartheta' - \frac{1}{m}\right) \cdots \left(\vartheta' - \frac{m-1}{m}\right)} e^{\tau'} X = 0.$$

Man setze nun $e^{\tau'} = z$ und differentiire diese letzte Gleichung

$(p+1)$mal nach z. Beachtet man, dass, wie leicht zu beweisen, die Formel gilt:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{p+1} v = (\vartheta'+1)(\vartheta'+2)\ldots(\vartheta'+p+1)\, e^{-(p+1)\tau'} v,$$

so findet man:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{p+1} X + \left(\frac{k}{m}\right)^m (\vartheta'+1)(\vartheta'+2)\ \ldots\ (\vartheta'+p+1) \times$$

$$\left\{e^{-(p+1)\tau'} \frac{1}{\vartheta'\left(\vartheta'-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(\vartheta'-\frac{m-1}{m}\right)} e^{\tau'} X\right\} = 0$$

oder:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{p+1} X + \left(\frac{k}{m}\right)^m \frac{\vartheta'(\vartheta'+1)\ldots(\vartheta'+p)}{\vartheta'\left(\vartheta'+p+1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(\vartheta'+p+1-\frac{m-1}{m}\right)} e^{-p\tau'} X$$

$$= 0.$$

Nun ist aber: $\vartheta'(\vartheta'+1)\ldots(\vartheta'+p)\, e^{-p\tau'} X = e^{\tau'}(\vartheta'+1)(\vartheta'+2)\ldots\times$ $(\vartheta'+p+1)\, e^{-(p+1)\tau'} X = e^{\tau'}\left(\frac{d}{dz}\right)^{p+1} X$, mithin:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{p+1} X + \left(\frac{k}{m}\right)^m \frac{1}{\left\{\vartheta'+p+1-\frac{1}{m}\right\}\left\{\vartheta'+p+1-\frac{2}{m}\right\}\cdots} \times$$

$$\frac{1}{\left\{\vartheta'+p+1-\frac{m-1}{m}\right\}\vartheta'} e^{\tau'}\left(\frac{d}{dz}\right)^{p+1} X = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der für y_1 geltenden, so ergiebt sich: $y_1 = \left(\frac{d}{dz}\right)^{p+1} X$. Nun ist $z = e^{\tau'} = e^{m\tau} = x^m$, also

$$\frac{d}{dz} = \frac{1}{m x^{m-1}} \frac{d}{dx}$$

und daher, wenn man den constanten Factor m^{-p-1} sich in die willkürlichen Constanten von X aufgenommen denkt:

$$y_1 = \left(\frac{1}{x^{m-1}} \frac{d}{dx}\right)^{p+1} X,$$

oder wegen der Form von X (vergl. §. 112):

$$y_1 = \left(\frac{1}{x^{m-1}} \frac{d}{dx}\right)^{p} \frac{X}{x^{m-1}}.$$

Schliesslich erhält man also:

$$y = x^{m(p+1)-1}\left(\frac{1}{x^{m-1}}\frac{d}{dx}\right)^p \frac{X}{x^{m-1}}.$$

Diese Aufgabe bietet ein Beispiel für die grossen Erleichterungen, welche die symbolische Form der Differentialgleichung bei Transformationen der letzteren an die Hand giebt. Bei der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{4}{x}\frac{dy}{dx} + k^2 y = 0$$

ist $m = 2$, $p = 2$, also:

$$y = A x^5 \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^2 \frac{\sin(kx+\alpha)}{x},$$

also $y = A\,\{(3 - k^2x^2)\sin(kx+\alpha) - 3kx\cos(kx+\alpha)\}$.

23. Da Fragen, wie die in dieser und der nächsten Aufgabe gestellten, sich am einfachsten erledigen lassen, wenn man die symbolische Form der Differentialgleichung zu Grunde legt, so schicken wir hier das Geeignete über dieselbe voraus und verweisen im Uebrigen auf die Abhandlungen besonders von Boole (vergl. Boole, A Treatise on Diff. Equ. 4. Ed. und Suppl.). Setzt man $x = e^\tau$, $\frac{d}{d\tau} = \vartheta$, so gelten zunächst nach §. 36 und 37 folgende Formeln:

$$x^n \frac{d^n u}{dx^n} = \vartheta(\vartheta - 1)\ldots(\vartheta - n + 1)u;$$

ferner, wenn $f(x)$ eine rationale Function von x bedeutet:

$$f(\vartheta)e^{m\tau}u = e^{m\tau}f(\vartheta + m)u$$

und umgekehrt: $e^{m\tau}f(\vartheta)u = f(\vartheta - m)e^{m\tau}u$. Mit Hülfe dieser Sätze lässt sich jede lineare Differentialgleichung, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von x sind, sehr leicht auf die symbolische Form $f_0(\vartheta)y + f_1(\vartheta)e^\tau y + f_2(\vartheta)e^{2\tau}y + \cdots = T$ bringen, wo T eine gegebene Function von τ ist, und umgekehrt kann man jede solche symbolische Gleichung auf die gewöhnliche Form bringen, wenn man zuerst die Exponentialgrössen auf die linke Seite jeder symbolischen Function $f(D)$ schafft, letztere sodann in eine Reihe von Factoriellen von der Form $\vartheta(\vartheta - 1)\ldots(\vartheta - n + 1)$ verwandelt und für diese schliesslich $x^n \frac{d^n}{dx^n}$ setzt. So ist z. B. die symbolische Form der beiden Gleichungen:

$$(1 + ax^2)\frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} \pm n^2 y = 0$$

und

$$x^2(x^2+a)\frac{d^2y}{dx^2}+x(2x^2+a)\frac{dy}{dx}\pm n^2y=0,$$

welche sich durch die Substitutionen:

$$\int\frac{dx}{(1+ax^2)^{1/2}}=t \quad \text{und} \quad \int\frac{dx}{x(x^2+a)^{1/2}}$$

resp. in $\frac{d^2y}{dt^2}\pm n^2y=0$ verwandeln und daher in endlicher Form integriren lassen, resp. $\vartheta(\vartheta-1)y+\{a(\vartheta-2)^2\pm n^2\}e^{2\tau}y=0$ und: $(a\vartheta^2\pm n^2)y+(\vartheta-1)(\vartheta-2)e^{2\tau}y=0$. — Dividirt man die symbolische Gleichung durch die erste Function $f_0(\vartheta)$, so nimmt die Gleichung die Form an: $y+\varphi_1(\vartheta)e^{\tau}y+\varphi_2(\vartheta)e^{2\tau}y+\cdots+\varphi_n(\vartheta)e^{n\tau}y=\{f_0(\vartheta)\}^{-1}T=T_1$, wo T_1 eine bekannte Function von τ ist. Ist im Besonderen

$$\varphi_1(\vartheta)=a_1\varphi(\vartheta),\ \varphi_2(\vartheta)=a_2\varphi(\vartheta)\varphi(\vartheta-1),\ldots,$$
$$\varphi_n(\vartheta)=a_n\varphi(\vartheta)\varphi(\vartheta-1)\ldots\varphi(\vartheta-n+1),$$

so gilt der wichtige

Satz I. Jede Gleichung von der Form:

$$y+a_1\varphi(\vartheta)e^{\tau}y+\cdots+a_n\varphi(\vartheta)\varphi(\vartheta-1)\ldots\varphi(\vartheta-n+1)e^{n\tau}y=T$$

kann aufgelöst werden in ein System von Gleichungen von der Form: $y-q\varphi(\vartheta)e^{\tau}y=T$, wenn die q bestimmt werden durch die Gleichung: $q^n+a_1q^{n-1}+\cdots+a_n=0$.

Beweis. Es ist $\varphi(\vartheta)\varphi(\vartheta-1)e^{2\tau}y=\varphi(\vartheta)e^{\tau}.\varphi(\vartheta)e^{\tau}y=\{\varphi(\vartheta)e^{\tau}\}^2y$ und allgemein: $\varphi(\vartheta)\varphi(\vartheta-1)\ldots\varphi(\vartheta-n+1)e^{n\tau}y=\{\varphi(\vartheta)e^{\tau}\}^ny$, so dass wir, wenn das Symbol $\varphi(\vartheta)e^{\tau}=\varrho$ gesetzt wird, die Gleichung erhalten: $(1+a_1\varrho+a_2\varrho^2+\cdots+a_n\varrho^n)y=T$, oder, wenn wir an beiden Seiten mit $(1+a_1\varrho+\cdots+a_n\varrho^n)^{-1}$ operiren:

$$y=\frac{1}{1+a_1\varrho+a_2\varrho^2+\cdots+a_n\varrho^n}T$$
$$=\left\{\frac{A_1}{1-q_1\varrho}+\frac{A_2}{1-q_2\varrho}+\cdots+\frac{A_n}{1-q_n\varrho}\right\}T,$$

wo $q_1, q_2, \ldots, q_n$ die Wurzeln der Gleichung $q^n+a_1q^{n-1}+\cdots+a_n=0$ sind und

$$A_1=\frac{q_1^{n-1}}{(q_1-q_2)(q_1-q_3)\ldots(q_1-q_n)},\ \ldots$$
$$A_n=\frac{q_n^{n-1}}{(q_n-q_1)(q_n-q_2)\ldots(q_n-q_{n-1})}$$

ist. Ist nun $\frac{1}{1-q_1\varrho}\,T = y_1$, $\frac{1}{1-q_2\varrho}\,T = y_2$, ..., so wird $y = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots + A_n y_n$, wobei allgemein y_i bestimmt ist durch die Gleichung: $y_i - q_i\,\varphi(\vartheta)\,e^{\tau} y_i = T$.

Satz II. Die Gleichung $y + \varphi(\vartheta)\,e^{n\tau} y = T$ verwandelt sich durch die Substitutionen $y = e^{\alpha\tau} y_1$, $T = e^{\alpha\tau} T_1$, in denen α eine beliebige Constante ist, in $y_1 + \varphi(\vartheta + \alpha)\,e^{n\tau} y_1 = T_1$.

Beweis. Setzt man $y = e^{\alpha\tau} y_1$, so wird:

$$e^{\alpha\tau} y_1 + \varphi(\vartheta)\,e^{\alpha\tau} e^{n\tau} y_1 = e^{\alpha\tau}\{y_1 + \varphi(\vartheta + \alpha)\,e^{n\tau} y_1\} = T,$$

daher, wenn $T = e^{\alpha\tau} T_1$ ist: $y_1 + \varphi(\vartheta + \alpha)\,e^{n\tau} y_1 = T_1$.

Satz III. Bezeichnet $\psi(\vartheta)$ eine willkürlich gewählte rationale Function von ϑ, so kann man die Gleichung $y + \varphi(\vartheta)\,e^{n\tau} y = T$ in $y_1 + \psi(\vartheta)\,e^{n\tau} y_1 = T_1$ verwandeln, wenn man setzt:

$$y = \Pi_n \frac{\varphi(\vartheta)}{\psi(\vartheta)}\, y_1, \quad T = \Pi_n \frac{\varphi(\vartheta)}{\psi(\vartheta)}\, T_1,$$

wobei $\Pi_n \frac{\varphi(\vartheta)}{\psi(\vartheta)}$ durch die Gleichung

$$\Pi_n \frac{\varphi(\vartheta)}{\psi(\vartheta)} = \frac{\varphi(\vartheta)\,\varphi(\vartheta - n)\,\varphi(\vartheta - 2n)\ldots}{\psi(\vartheta)\,\psi(\vartheta - n)\,\psi(\vartheta - 2n)\ldots}$$

definirt wird.

Beweis. Setzt man in der ursprünglichen Gleichung zunächst $y = f(\vartheta)\,y_1$, so wird: $f(\vartheta)\,y_1 + \varphi(\vartheta)\,e^{n\tau} f(\vartheta)\,y_1 = T$, also:

$$y_1 + \frac{\varphi(\vartheta)\,f(\vartheta - n)}{f(\vartheta)}\,e^{n\tau} y_1 = \frac{1}{f(\vartheta)}\,T.$$

Vergleicht man dies mit $y_1 + \psi(\vartheta)\,e^{n\tau} y_1 = T_1$, so ist $T_1 = \frac{1}{f(\vartheta)} T$ und: $\psi(\vartheta) = \frac{\varphi(\vartheta)\,f(\vartheta - n)}{f(\vartheta)}$, oder $f(\vartheta) = \frac{\varphi(\vartheta)}{\psi(\vartheta)}\,f(\vartheta - n)$. Hieraus folgt ferner:

$$f(\vartheta - n) = \frac{\varphi(\vartheta - n)}{\psi(\vartheta - n)}\,f(\vartheta - 2n),\ f(\vartheta - 2n) = \frac{\varphi(\vartheta - 2n)}{\psi(\vartheta - 2n)}\,f(\vartheta - 3n),$$

u. s. w., also schliesslich:

$$f(\vartheta) = \frac{\varphi(\vartheta)\,\varphi(\vartheta - n)\,\varphi(\vartheta - 2n)\ldots}{\psi(\vartheta)\,\psi(\vartheta - n)\,\psi(\vartheta - 2n)\ldots}.$$

Setzt man also $y = \Pi_n \frac{\varphi(\vartheta)}{\psi(\vartheta)} y_1$ und $T = \Pi_n \frac{\varphi(\vartheta)}{\psi(\vartheta)} T_1$, so geht die ursprüngliche Gleichung über in $y_1 + \psi(\vartheta) e^{n\tau} y_1 = T_1$.

Der Nutzen dieses sehr wichtigen und häufig zur Anwendung kommenden Satzes beruht offenbar auf der Willkürlichkeit der Wahl von $\psi(\vartheta)$. Man wird diese Function stets so zu wählen suchen, dass das Product $\Pi_n \frac{\varphi(\vartheta)}{\psi(\vartheta)}$ aus einer endlichen Anzahl von Factoren besteht und die durch Transformation erhaltene Gleichung möglichst einfach und leicht integrirbar wird. Ersteres ist der Fall, wenn es zu jedem elementaren Factor von $\varphi(\vartheta)$ einen solchen von $\psi(\vartheta)$ giebt, dessen Argument sich von dem des ersteren um ein ganzes Vielfaches von n unterscheidet. Denn ist $\chi(\vartheta)$ ein elementarer Factor von $\varphi(\vartheta)$, so hat man:

$$\Pi_n \frac{\chi}{\chi(\vartheta + in)}$$
$$= \frac{\chi(\vartheta)\chi(\vartheta - n)\ldots}{\chi(\vartheta + in)\chi\{\vartheta + (i-1)n\}\ldots\chi(\vartheta + n)\chi(\vartheta)\chi(\vartheta - n)\ldots}$$
$$= \frac{1}{\chi(\vartheta + in)\chi\{\vartheta + (i-1)n\}\ldots\chi(\vartheta + n)},$$

und ferner:

$$\Pi_n \frac{\chi(\vartheta)}{\chi(\vartheta - in)}$$
$$= \frac{\chi(\vartheta)\chi(\vartheta - n)\ldots\chi\{\vartheta - (i-1)n\}\chi(\vartheta - in)\ldots}{\chi(\vartheta - in)\chi\{\vartheta - (i+1)n\}\cdots}$$
$$= \chi(\vartheta)\chi(\vartheta - n)\ldots\chi\{\vartheta - (i-1)n\}.$$

Das Product einer beliebigen Anzahl solcher Ausdrücke ist ebenfalls endlich. — Hieraus folgen zwei wichtige Bemerkungen. Ist nämlich $\chi(\vartheta)$ ein elementarer Factor von $\varphi(\vartheta)$, so kann man die Gleichung in eine andere verwandeln, in welcher $\chi(\vartheta \pm in)$ für $\chi(\vartheta)$ steht. Denn ist $\varphi(\vartheta) = \chi(\vartheta)\varphi_1(\vartheta)$ und setzt man $\psi(\vartheta) = \chi(\vartheta \pm in)\varphi_1(\vartheta)$, so wird $\Pi_n \frac{\varphi(\vartheta)}{\psi(\vartheta)} = \Pi_n \frac{\chi(\vartheta)}{\chi(\vartheta \pm in)}$ und dieses Product ist endlich. Diese Transformation wollen wir kurz mit (A) bezeichnen. Besitzt ferner $\varphi(\vartheta)$ einen Factor von der Form $\frac{\chi(\vartheta)}{\chi(\vartheta \pm in)}$, so kann man die Gleichung in eine andere verwandeln, in welcher dieser Factor fehlt. Denn ist $\varphi(\vartheta) = \frac{\chi(\vartheta)}{\chi(\vartheta \pm in)} \varphi_1(\vartheta)$

und setzt man $\psi(\vartheta) = \varphi_1(\vartheta)$, so ist wiederum

$$\Pi_n \frac{\varphi(\vartheta)}{\psi(\vartheta)} = \Pi_n \frac{\chi(\vartheta)}{\chi(\vartheta \pm i n)}.$$

Diese Transformation bezeichnen wir mit (B). Bei der Transformation (A) bleibt die Ordnung der Differentialgleichung dieselbe; enthält daher die Lösung der transformirten Gleichung die genügende Anzahl von willkürlichen Constanten, so brauchen keine anderen mehr eingeführt zu werden, weder bei der vorhergehenden Bestimmung von T_1, noch bei der nachfolgenden Bestimmung von y. Bei der Transformation (B) ist aber die transformirte Gleichung von niedrigerer Ordnung als die gegebene; es müssen daher die zur allgemeinen Lösung fehlenden Constanten ergänzt werden, entweder bei der Bestimmung von T_1 oder bei der Ableitung von y. Im ersteren Falle braucht man nur so viel Constanten beizubehalten, als eben nöthig sind, im letzteren muss man aber alle Constanten, welche durch Bildung von $\Pi_n \frac{\varphi(\vartheta)}{\psi(\vartheta)} y_1$ eingeführt werden, beibehalten und sodann die etwa zwischen ihnen stattfindenden Beziehungen mit Hülfe der Differentialgleichung bestimmen. Näheres hierüber siehe bei Boole, A Treatise on Diff. Equ. Supplementband.

Diese Sätze wenden wir nun auf unser Beispiel an. Die symbolische Form der Gleichung $(1 - a x^2) \frac{d^2 y}{d x^2} - b x \frac{d y}{d x} - c y = 0$ ist: $y - a \frac{(\vartheta - 2 + \alpha_1)(\vartheta - 2 + \alpha_2)}{\vartheta(\vartheta - 1)} e^{2\tau} y = 0$, wo α_1, α_2 die Wurzeln der Gleichung $a\alpha(\alpha + 1) - b\alpha + c = 0$ sind. 1) Ist $\alpha_1 + \alpha_2$ eine gerade ganze Zahl, also $\frac{b}{a}$ eine ungerade ganze Zahl $= 2h + 1$, so erhält man:

$$y - a \frac{(\vartheta - 2 + \alpha_1)(\vartheta - 2 - \alpha_1 + 2h)}{\vartheta(\vartheta - 1)} e^{2\tau} y = 0,$$

daher nach Transformation (A), wenn man $y = \Pi_2 \frac{\vartheta - 2 - \alpha_1 + 2h}{\vartheta - 2 - \alpha_1} y_1$ setzt: $y_1 - a \frac{(\vartheta - 2)^2 - \alpha_1^2}{\vartheta(\vartheta - 1)} e^{2\tau} y_1 = 0$. Dies ist aber die symbolische Form der in endlicher Form integrirbaren Gleichung:

$$(1 - a x^2) \frac{d^2 y_1}{d x^2} - a x \frac{d y_1}{d x} + a \alpha_1^2 y_1 = 0.$$

Ist y_1 gefunden, so wird

$$y = \{\vartheta - \alpha_1 + 2(h-1)\}\{\vartheta - \alpha_1 + 2(h-2)\}\cdots\{\vartheta - \alpha_1\}\, y_1$$
$$= x^{\alpha_1+2}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^h \frac{y_1}{x^{2-\alpha_2}}.$$

2) Ist $\alpha_1 - \alpha_2 = \left\{\left(1-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}\right\}^{1/2}$ eine ungerade ganze Zahl $= 2h+1$, so ergiebt sich:

$$y - a\,\frac{(\vartheta - 2 + \alpha_2)(\vartheta - 2 + \alpha_2 + 2h + 1)}{\vartheta(\vartheta - 1)}\, e^{2\tau}\, y = 0$$

und, wenn man $y = \Pi_2 \frac{\vartheta + \alpha_2 + 2h - 1}{\vartheta + \alpha_2 - 1}$ setzt, nach Transformation (A):

$$y_1 - a\,\frac{(\vartheta + \alpha_2 - 1)(\vartheta + a_2 - 2)}{\vartheta(\vartheta - 1)}\, e^{2\tau}\, y_1 = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich aber nach Satz I auf zwei Gleichungen erster Ordnung reduciren, wenn man $\frac{\vartheta + \alpha_2 - 1}{\vartheta} = \varrho$ setzt. 3) Ist eine der beiden Wurzeln α_1, α_2 eine ganze Zahl, also

$$\frac{b}{a} \pm \left\{\left(1 - \frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}\right\}^{1/2}$$

eine ungerade ganze Zahl, so wird

$$y - a\,\frac{(\vartheta - 2 + h)(\vartheta - 2 + \alpha_2)}{\vartheta(\vartheta - 1)}\, e^{2\tau}\, y = 0.$$

Je nachdem nun h eine gerade oder ungerade ganze Zahl ist, setze man $y = \Pi_2 \frac{\vartheta + h - 2}{\vartheta}\, y_1$ oder $y = \Pi_2 \frac{\vartheta + h - 2}{\vartheta - 1}\, y_1$; dadurch reducirt sich die Gleichung auf eine Gleichung erster Ordnung, nämlich im ersten Falle auf $y_1 - a\frac{\vartheta - 2 + \alpha_2}{\vartheta - 1} e^{2\tau}\, y_1 = V$, im zweiten auf $y_1 - a\frac{\vartheta - 2 + \alpha_2}{\vartheta} e^{2\tau} y_1 = V$. Hierbei ist V im ersten Falle bestimmt durch $\{\vartheta + 2(h'-1)\}\{\vartheta + 2(h'-2)\}\cdots(\vartheta + 2)\, V = 0$ oder $V = C_1 e^{-2\tau} + C_2 e^{-4\tau} + \cdots + C_{h'-1} e^{-2(h'-1)\tau}$, wo $h = 2h'$ ist, im zweiten durch $(\vartheta + 2h' - 1)(\vartheta + 2h' - 3)\ldots(\vartheta + 1)\, V = 0$, oder $V = C_1 e^{-\tau} + C_2 e^{-3\tau} + \cdots + C_{h'} e^{-(2h'-1)\tau}$, wenn $h = 2h' + 1$ gesetzt wird. In beiden Fällen braucht man aber von V nur ein Glied, z. B. das erste, beizubehalten, da hierdurch die genügende Anzahl willkürlicher Constanten eingeführt wird.

24. Es genügt, um diese Aufgabe zu lösen, wenn wir $X = 0$ annehmen. Die symbolische Form der Gleichung ist:

$$u + \frac{b(\vartheta - n)(\vartheta - n - 1) + e(\vartheta - n) + g}{a\vartheta(\vartheta - 1) + c\vartheta + f} e^{n\tau} u = 0.$$

Ist n nicht schon selbst gleich 2, so setze man $n\tau = 2\tau'$, also $\vartheta = \frac{n}{2}\frac{d}{d\tau'} = \frac{n}{2}\vartheta'$; dadurch geht die Gleichung über in:

$$u + \frac{b}{a}\frac{(\vartheta' - \alpha_1)(\vartheta' - \alpha_2)}{(\vartheta' - \beta_1)(\vartheta' - \beta_2)} e^{2\tau'} u = 0,$$

wo α_1, α_2 die Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{4} bn(\alpha - 2)(n\alpha - 2n - 2) + \frac{1}{2} en(\alpha - 2) + g = 0$ und β_1, β_2 die Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{4} an\beta(n\beta - 2) + \frac{1}{2} cn\beta + f = 0$ sind. — 1) Sind $\alpha_1 - \alpha_2$ und $\beta_1 - \beta_2$ gleichzeitig ungerade Zahlen, also $\alpha_1 - \alpha_2 = 2h - 1$, $\beta_1 - \beta_2 = 2i - 1$, so geht die Gleichung nach Transformation (A) über in

$$v + \frac{b}{a}\frac{(\vartheta' - \alpha_1)(\vartheta' - \alpha_1 - 1)}{(\vartheta' - \beta_1)(\vartheta' - \beta_1 - 1)} e^{2\tau'} v = 0,$$

wenn

$$u = \Pi_2 \frac{(\vartheta' - \alpha_1 + 2h - 1)(\vartheta' - \beta_1 - 1)}{(\vartheta' - \alpha_1 - 1)(\vartheta' - \beta_1 + 2i - 1)} v$$

gesetzt wird, und diese Gleichung reducirt sich nach Satz I für $\varrho = \frac{\vartheta' - \alpha_1}{\vartheta' - \beta_1}$ auf zwei Gleichungen erster Ordnung. — 2) Ist irgend eine der Grössen $\alpha_1 - \beta_1$, $\alpha_1 - \beta_2$, $\alpha_2 - \beta_1$, $\alpha_2 - \beta_2$ eine gerade ganze Zahl, so sieht man leicht, dass sich die Gleichung mittelst der Transformation (B) auf eine Gleichung erster Ordnung reduciren lässt. — 3) Setzt man $u = e^{\beta_1\tau'} u_1$, so geht die Gleichung nach Satz II über in:

$$u_1 + \frac{b}{a}\frac{(\vartheta' + \beta_1 - \alpha_1)(\vartheta' + \beta_1 - \alpha_2)}{\vartheta'(\vartheta' + \beta_1 - \beta_2)} e^{2\tau'} u_1 = 0.$$

Ist also zunächst $\beta_1 - \beta_2$ eine ungerade ganze Zahl, so kann man diese Gleichung nach Transformation (A) verwandeln in:

$$v + \frac{b}{a}\frac{(\vartheta' + \beta_1 - \alpha_1)(\vartheta' + \beta_1 - \alpha_2)}{\vartheta'(\vartheta' - 1)} e^{2\tau'} v = 0.$$

Ist überdies noch $\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2$ eine ungerade ganze Zahl,

so wird $\beta_1 - \alpha_1 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} + \lambda$, $\beta_1 - \alpha_2 = -\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} + \lambda$, wo λ eine ganze Zahl ist, also

$$v + \frac{b}{a} \frac{(\vartheta' + \lambda)^2 - \frac{1}{4}(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{\vartheta'(\vartheta' - 1)} e^{2\tau'} v = 0.$$

Dies ist aber die symbolische Form der Gleichung

$$(a + bx^2)\frac{d^2 v}{dx^2} + b\{2(\lambda + 2) + 1\} x \frac{dv}{dx} + b\left\{(\lambda + 2)^2 - \frac{1}{4}(\alpha_2 - \alpha_1)^2\right\} v = 0,$$

welche durch $(\lambda + 2)$ malige Differentiation aus der in endlicher Form integrirbaren Gleichung

$$(a + bx^2)\frac{d^2 v}{dx^2} + bx\frac{dv}{dx} - \frac{b}{4}(\alpha_2 - \alpha_1)^2 v = 0$$

hervorgeht. — 4) Setzt man $u = e^{\alpha_1 \tau'} u_1$, so wird nach Satz II:

$$u_1 + \frac{b}{a} \frac{\vartheta'(\vartheta' + \alpha_1 - \alpha_2)}{(\vartheta' + \alpha_1 - \beta_1)(\vartheta' + \alpha_1 - \beta_2)} e^{2\tau'} u_1 = 0.$$

Diese Gleichung kann man auch in der Form schreiben:

$$u_1 + \frac{a}{b} \frac{(\vartheta' + 2 + \alpha_1 - \beta_1)(\vartheta' + 2 + \alpha_1 - \beta_2)}{(\vartheta' + 2)(\vartheta' + 2 + \alpha_1 - \alpha_2)} e^{-2\tau'} u_1 = 0.$$

Setzt man hierin $\tau' = -\tau_1$, also $\vartheta' = -\frac{d}{d\tau_1} = -\vartheta_1$ und ferner $u_1 = e^{2\tau_1} u_2$, so geht die Gleichung über in:

$$u_2 + \frac{a}{b} \frac{(\vartheta_1 - \alpha_1 + \beta_1)(\vartheta_1 - \alpha_1 + \beta_2)}{\vartheta_1(\vartheta_1 + \alpha_2 - \alpha_1)} e^{2\tau_1} u_2 = 0,$$

und diese lässt sich wie in 3) auf die Form bringen:

$$v + \frac{a}{b} \frac{(\vartheta_1 + \lambda)^2 - \frac{1}{4}(\beta_2 - \beta_1)^2}{\vartheta_1(\vartheta_1 - 1)} e^{2\tau_1} v = 0,$$

wenn $\alpha_2 - \alpha_1$ und $\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2$ gleichzeitig ungerade ganze Zahlen sind. — Die Zusammenfassung dieser Resultate giebt den im Texte angegebenen Satz. Auf ganz andere weitläufigere Weise hat Pfaff dieselbe Frage behandelt in seinen Disquisitiones analyticae p. 135. (Vergl. auch Sauer, Crelle's Journ. Bd. II.)

25. Ist p eine ganze Zahl und, wie wir annehmen können, positiv, so brechen die zweite und dritte Reihe ab, jedoch sind der

erste und zweite Ausdruck sicher von dem dritten verschieden, da sie für $x = \infty$ ebenfalls unendlich werden, während der dritte für $x = \infty$ verschwindet. Ist aber p keine ganze Zahl, so sind

$$x^{p+1}\left\{1 + \frac{1}{p+\frac{3}{2}}\frac{a^2x^2}{2^2} + \frac{1}{\left(p+\frac{3}{2}\right)\left(p+\frac{5}{2}\right)}\frac{a^4x^4}{2!\,2^4} + \frac{1}{\left(p+\frac{3}{2}\right)\left(p+\frac{5}{2}\right)\left(p+\frac{7}{2}\right)}\frac{a^6x^6}{3!\,2^6} + \cdots\right\}$$

$$e^{ax}x^{p+1}\left\{1 - \frac{p+1}{p+1}\frac{ax}{1} + \frac{(p+1)(p+2)}{(p+1)\left(p+\frac{3}{2}\right)}\frac{a^2x^2}{2!} - \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{(p+1)\left(p+\frac{3}{2}\right)(p+2)}\frac{a^3x^3}{3!} + \cdots\right\}$$

$$e^{-ax}x^{p+1}\left\{1 + \frac{p+1}{p+1}\frac{ax}{1} + \frac{(p+1)(p+2)}{(p+1)\left(p+\frac{3}{2}\right)}\frac{a^2x^2}{2!} + \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{(p+1)\left(p+\frac{3}{2}\right)(p+2)}\frac{a^3x^3}{3!} + \cdots\right\}$$

entsprechend andere Integrale, die nach dem in Nr. 6 Seite 564 angeführten Satze unter sich identisch und von den drei ersten Ausdrücken verschieden sind. Es könnten daher die ersten drei Ausdrücke unter sich auch nur um ein constantes Vielfaches eines dieser letzten drei Ausdrücke verschieden sein. Man sieht aber leicht, dass dies nicht der Fall ist.

26. Die symbolische Form der Gleichung ist:

$$y - \frac{a^2}{(\vartheta+p)(\vartheta-p-1)}e^{2\tau}y = 0.$$

Hieraus folgt sogleich nach Satz II und Transformation (A):

$$y_1 - \frac{a^2}{\vartheta(\vartheta-1)}e^{2\tau}y_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2y_1}{dx^2} - a^2y_1 = 0,$$

wenn

$$y = e^{-p\tau}\Pi_2\frac{\vartheta-1}{\vartheta-2p-1}y_1 = e^{-p\tau}(\vartheta-1)(\vartheta-3)\ldots(\vartheta-2p+1)y_1$$

gesetzt wird. Wegen $f(\vartheta-\alpha) = e^{\alpha\tau}f(\vartheta)e^{-\alpha\tau}$ kann man y auch schreiben:

$$y = e^{-p\tau}\, e^{\tau}\,\vartheta\, e^{-\tau}\,.\, e^{3\tau}\,\vartheta\, e^{-3\tau} \ldots e^{(2p-1)\tau}\,\vartheta\, e^{-(2p-1)\tau}\, y_1$$
$$= e^{-(p+1)\tau}\,(e^{2\tau}\vartheta)\,(e^{2\tau}\vartheta)\ldots(e^{2\tau}\vartheta)\, e^{-(2p-1)\tau}\, y_1$$
$$= e^{-(p+1)\tau}\,(e^{2\tau}\vartheta)^p\, e^{-(2p-1)\tau}\, y_1.$$

Mithin ist schliesslich:

$$y = x^{-p-1}\left(x^3\,\frac{d}{dx}\right)^p \left\{x^{-2p+1}\,(A\,e^{ax} + B\,e^{-ax})\right\}.$$

Setzt man zunächst $y = e^{-(p+2)\tau}\, y_1$ und sodann

$$y_1 = \Pi_2\,\frac{\vartheta - 1}{\vartheta - 2p - 3}\, e^{\tau}\, y_2,$$

wo y_2 gegeben ist durch $\frac{d^2 y_2}{dx^2} - a^2 y_2 = 0$, so erhält man wie vorher:

$$y = e^{-(p+3)\tau}\,(e^{2\tau}\vartheta)^{p+1}\, e^{-2p\tau}\, y_2$$
$$= x^{-p-3}\left(x^3\,\frac{d}{dx}\right)^{p+1}\left\{x^{-2p}\,(A\,e^{ax} + B\,e^{-ax})\right\}.$$

Nach der ersten Darstellung war:

$$y = e^{-p\tau}\,(\vartheta - 1)\,(\vartheta - 3)\ldots(\vartheta - 2p + 1)\, y_1.$$

Dies ist dasselbe wie

$$y = e^{(p-1)\tau}\,\vartheta\,(\vartheta + 2)\ldots(\vartheta + 2p - 2)\, e^{-(2p-1)\tau}\, y_1$$
$$= e^{(p-1)\tau}\,\vartheta\,.\, e^{-2\tau}\,\vartheta\, e^{2\tau}\,.\, e^{-4\tau}\,\vartheta\, e^{4\tau} \ldots e^{-(2p-2)\tau}\,\vartheta\, e^{-\tau}\, y_1$$
$$= e^{p\tau}\,(e^{-\tau}\vartheta\, e^{-\tau})\,(e^{-\tau}\vartheta\, e^{-\tau})\ldots(e^{-\tau}\vartheta\, e^{-\tau})\, y_1$$
$$= e^{p\tau}\,(e^{-\tau}\vartheta\, e^{-\tau})^p\, y_1.$$

Mithin wird schliesslich:

$$y = x^p\left(\frac{d}{dx}\,\frac{1}{x}\right)^p (A\,e^{ax} + B\,e^{-ax}).$$

27. Setzt man $y = e^{-ax}\, v$, so erhält man die Gleichung

$$x\,\frac{d^2 v}{dx^2} + \{(m+n) - (\alpha - \beta)\,x\}\,\frac{dv}{dx} - m\,(\alpha - \beta)\, v = 0,$$

welche durch m-malige Differentiation aus der Gleichung

$$x\,\frac{d^2 w}{dx^2} + \{n - (\alpha - \beta)\,x\}\,\frac{dw}{dx} = 0$$

entsteht. Daher ist $v = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left\{x^{-n}\, e^{(\alpha-\beta)x}\right\}$ ein particuläres Integral der Gleichung in v. Setzt man sodann $v = e^{(\alpha-\beta)x}\, v_1$, so erhält man für v_1 dieselbe Gleichung wie für v, nur dass m und n, sowie α und β mit einander vertauscht sind. Es wird daher schliesslich:

$$y = A e^{-\alpha x} \frac{d^{m-1}}{d x^{m-1}} \{x^{-n} e^{(\alpha-\beta)x}\} + B e^{-\beta x} \frac{d^{n-1}}{d x^{n-1}} \{x^{-m} e^{(\beta-\alpha)x}\}.$$

Setzt man in der zweiten Gleichung $y = e^{\frac{1}{2}x^2} v$, so erhält man die Gleichung: $\frac{d^2 v}{d x^2} + x \frac{d v}{d x} + (m+1) v = 0$, welche durch m-malige Differentiation aus der Gleichung $\frac{d^2 w}{d x^2} + x \frac{d w}{d x} + w = 0$ sich ergiebt. Ein particuläres Integral dieser Gleichung ist $e^{-\frac{1}{2}x^2}$, daher nach §. 65 ein zweites: $e^{-\frac{1}{2}x^2} \int e^{\frac{1}{2}x^2} dx$. Somit wird:

$$y = A e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^m}{d x^m} e^{-\frac{1}{2}x^2} + B e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^m}{d x^m} \{e^{-\frac{1}{2}x^2} \int e^{\frac{1}{2}x^2} dx\}.$$

28. Als Differentialgleichung der Trajectorie erhält man die Gleichung:

$$\frac{d^2 x}{d r^2} - \frac{n-1}{r} \frac{d x}{d r} + \frac{d}{d x} \{log\ P_n(x)\} \left(\frac{d x}{d r}\right)^2 = 0.$$

Aus dieser erhält man nach der 2. Aufgabe des §. 67:

$$P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x) = a r^n.$$

VI. Capitel.

§. 113.

1. Aufgabe. Es ist $\frac{d^n F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{d x^n}$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n, x).$$

Ist nun $\gamma - \alpha - \beta \overline{\lesseqgtr} 0$, in welchem Falle $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ für $x = 1$ divergirt, so ist erst recht: $\gamma + n - (\alpha + n) - (\beta + n) < 0$, also $F(\alpha + n, \beta + n, \gamma + n, 1)$ divergent. Selbst wenn aber $\gamma - \alpha - \beta > 0$ also $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ convergent wäre, so würde doch, wenn $n > \gamma - \alpha - \beta$ geworden ist, $\gamma + n - (\alpha + n) - (\beta + n) < 0$ und somit $F(\alpha + n, \beta + n, \gamma + n, 1)$ divergent sein.

2. Aufgabe.

$$(1)\quad sin\,t = t\left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \cdots\right)$$

$$= t F\left(\alpha, \beta, \frac{3}{2}, -\frac{t^2}{4\alpha\beta}\right) \text{ für } \alpha = \beta = \infty.$$

$$(2)\quad sin\, n\, t = n\, sin\, t\left(1 - \frac{n^2 - 1}{3!}\, sin^2 t\right.$$

$$\left. + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{5!}\, sin^4 t - \cdots\right) = n\, sin\, t\, F\left(\frac{1-n}{2}, \frac{1+n}{2}, \frac{3}{2}, sin^2 t\right).$$

$$(3)\quad cos\, n\, t = cos^n t\left(1 - \frac{n(n-1)}{1.2}\, tang^2 t\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\, tang^4 t - \cdots\right) = cos^n t\, F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}, -tang^2 t\right).$$

§. 126.

1. Aufgabe. Es ist $t = \frac{sin\, t}{1} + \frac{1}{2}\frac{sin^3 t}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{sin^5 t}{5} + \cdots$ $= sin\, t\, F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, sin^2 t\right)$. Demnach:

$$F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = \Pi\left(\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Unter der Annahme, dass die in §. 126 erhaltene Formel $\Pi(z+1) = (z+1)\Pi(z)$ allgemein für beliebige positive oder negative Werthe von z gelte, ist nun: $\Pi\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\,\Pi\left(\frac{1}{2}\right)$, daher: $\Pi^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, also $\Pi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi^{1/2}$, da das negative Zeichen nicht statthaben kann, wie aus der Definitionsgleichung von $\Pi(k, z)$ hervorgeht.

2. Aufgabe. Es ist

$$\Pi(-z) = \lim_{k=\infty} \frac{1.2.3\ldots k}{(1-z)(2-z)\ldots(k-z)}\, k^{-z},$$

$$\Pi(z-1) = \lim_{k=\infty} \frac{1.2.3\ldots k}{z(1+z)(2+z)\ldots(k-1+z)}\, k^{z-1},$$

immer vorausgesetzt, dass die in §. 126 angegebenen Definitionen auch für beliebige Werthe von z gelten. Ein Beweis hierfür kann hier nicht gegeben werden. Durch Multiplication folgt:

$$\Pi(-z)\,\Pi(z-1) = \lim_{k=\infty} \frac{1}{z\left(1-\frac{z^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{(k-1)^2}\right)}.$$

Letzterer Ausdruck ist aber das unendliche Product für $\pi\; cosec\, z\pi$, mithin: $\Pi(-z)\,\Pi(z-1) = \pi\; cosec\, z\,\pi$.

3. Aufgabe.

(1) $F_1(\alpha, \beta, \gamma)\, F_1(-\alpha, \beta, \gamma-\alpha)$

$$= \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}\;\frac{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\alpha+\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha+\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)} = 1.$$

(2) Folgt ebenso wie in (1).

4. Aufgabe. Es ist

$$log\, \Pi(z) = \lim_{k=\infty} \left\{ log\, \frac{1}{z+1} + log\, \frac{2}{z+2} + \cdots + log\, \frac{k}{z+k} + z\, log\, k \right\}.$$

Sind nun g und h positive Grössen, so gilt die leicht beweisbare Formel:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-gt} - e^{-ht}}{t}\, dt = log\, \frac{h}{g},$$

vermittelst deren die vorige Gleichung übergeht in:

$$log\, \Pi(z) = \lim_{k=\infty} \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{e^{-zt} - 1}{1 - e^{-t}} + z \right) \frac{e^{-t}\, dt}{t} \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t} - e^{-(z+1)t}}{1 - e^{-t}} - z \right) \frac{e^{-kt}\, dt}{t} \right\}.$$

Das letztere Integral convergirt bei unendlich wachsendem k gegen die Grenze 0; daher ist:

$$log\, \Pi(z) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-zt} - 1}{1 - e^{-t}} + z \right) \frac{e^{-t}\, dt}{t}.$$

Setzt man hierin für z nach einander $z, z - \frac{1}{n}, z - \frac{2}{n}, \cdots, z - \frac{n-1}{n}$ und addirt die so entstehenden Gleichungen, so erhält man, wenn man noch nt an die Stelle von t treten lässt:

$$log \left\{ \Pi(z)\, \Pi\left(z - \frac{1}{n}\right) \cdots \Pi\left(z - \frac{n-1}{n}\right) \right\}$$

$$= \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-(zn+1)t}}{1 - e^{-t}} - \frac{n\, e^{-nt}}{1 - e^{-nt}} + \left(nz - \frac{n-1}{2} \right) e^{-nt} \right\} \frac{dt}{t}.$$

Andererseits ist:

$$log\, \Pi(nz) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-(zn+1)t} - e^{-t}}{1 - e^{-t}} + nz\, e^{-t} \right) \frac{dt}{t},$$

also durch Subtraction:

$$log\left\{\Pi\,(z)\,\Pi\left(z-\frac{1}{n}\right)\cdots\Pi\left(z-\frac{n-1}{n}\right)\right\}-log\,\Pi\,(n\,z)$$

$$=\int_0^\infty\left\{\frac{1}{e^{-t}-1}-\frac{n}{e^{n\,t}-1}+\frac{1}{2}(e^{-t}-n\,e^{-n\,t})\right\}\frac{d\,t}{t}-\left(n\,z+\frac{1}{2}\right)log\,n.$$

Um den Werth des noch übrig bleibenden Integrals zu bestimmen, setze man zunächst in dem Werthe von $log\,\Pi\,(z)$ $z=-\frac{1}{2}$ und sodann t für $\frac{1}{2}\,t$, dann wird, da $\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)=2\,\Pi\left(\frac{1}{2}\right)=log\,\pi^{1/2}$ ist:

$$\frac{1}{2}\,log\,\pi=\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^t+1}-\frac{1}{2}\,e^{-2\,t}\right)\frac{d\,t}{t}.$$

Addirt man hierzu

$$\frac{1}{2}\,log\,2=\frac{1}{2}\int_0^\infty(e^{-t}-e^{-2\,t})\,\frac{d\,t}{t},$$

so folgt:

$$\frac{1}{2}\,log\,(2\,\pi)=\int_0^\infty\left\{\frac{1}{e^t-1}-\frac{2}{e^{2\,t}-1}+\frac{1}{2}\,e^{-t}-e^{-2\,t}\right\}\frac{d\,t}{t}.$$

Setzt man hierin $n\,t$ für t, multiplicirt die entstehende Formel mit n und subtrahirt dann die vorige von dem Producte, so wird:

$$\frac{n-1}{2}\,log(2\,\pi)=2\int_0^\infty\left\{\frac{1}{e^{2\,t}-1}-\frac{n}{e^{2\,n\,t}-1}+\frac{1}{2}\,(e^{-2\,t}-n\,e^{-2\,n\,t})\right\}\frac{dt}{t}$$

$$-\int_0^\infty\left\{\frac{1}{e^t-1}-\frac{n}{e^{n\,t}-1}+\frac{1}{2}(e^{-t}-n\,e^{-n\,t})\right\}\frac{d\,t}{t},$$

oder, da die beiden Integrale offenbar einander gleich sind:

$$\frac{n-1}{2}\,log\,(2\,\pi)=\int_0^\infty\left\{\frac{1}{e^t-1}-\frac{n}{e^{n\,t}-1}+\frac{1}{2}\,(e^{-t}-n\,e^{-n\,t})\right\}\frac{d\,t}{t}.$$

Demnach wird jetzt:

$$log\left\{\Pi\,(z)\,\Pi\,\left(z-\frac{1}{n}\right)\cdots\Pi\left(z-\frac{n-1}{n}\right)\right\}-log\,\Pi\,(n\,z)$$

$$=\frac{n-1}{2}\,log\,(2\,\pi)-\left(n\,z+\frac{1}{2}\right)\,log\,n,$$

oder, wenn man zu den Zahlen übergeht:

$$n^{nz+\frac{1}{2}}\,\Pi(z)\,\Pi\left(z-\frac{1}{n}\right)\cdots\Pi\left(z-\frac{n-1}{n}\right)=(2\,\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}\,\Pi(n\,z).$$

§. 128.

Aufgabe. Es ist:

$$y_5\,\frac{d\,y_1}{d\,x}-y_1\,\frac{d\,y_5}{d\,x}=\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\,\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}\;x^{-\gamma}\,(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}$$

und $y_1 = M y_3 + N y_5$, wo M und N die auf Seite 227 angegebenen Werthe haben. Daher

$$y_5\,\frac{d\,y_3}{d\,x}-y_3\,\frac{d\,y_5}{d\,x}=\frac{1}{M}\,\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\,\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}\;x^{-\gamma}\,(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}$$

$$=\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\,\Pi(1-\gamma)}{\Pi(\alpha-\gamma)\,\Pi(\beta-\gamma)}\;x^{-\gamma}\,(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}.$$

Ferner ist $y_3\,\frac{d\,y_1}{d\,x}-y_1\,\frac{d\,y_3}{d\,x}=(\gamma-1)\,x^{-\gamma}\,(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}$ und $y_1 = M_4\,y_3 + N_4\,y_{10}$, wo M_4 und N_4 die auf Seite 228 angegebenen Constanten sind. Setzt man für y_3 seinen Werth, so folgt:

$$y_{10}\,\frac{d\,y_1}{d\,x}-y_1\,\frac{d\,y_{10}}{d\,x}=(1-\gamma)\,\frac{M_4}{N_4}\,x^{-\gamma}\,(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}$$

$$=\frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\beta-\alpha)}{\Pi(\beta-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-1)}\;x^{-\gamma}\,(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}.$$

§. 133.

1. Aufgabe. Für diese Gleichung hat man $1-\gamma=-\lambda=-\frac{1}{3}$, also $\gamma=\frac{4}{3}$ zu nehmen, während für die in §. 132 angeführte Gleichung $1-\gamma=+\lambda=\frac{1}{3}$, also $\gamma=\frac{2}{3}$ gesetzt ist.

2. Aufgabe. Hier hat man ebenfalls $1-\gamma=-\lambda=-\frac{1}{3}$, also $\gamma=\frac{4}{3}$ zu nehmen, während für die in §. 133 angegebene Gleichung $1-\gamma=\lambda=\frac{1}{3}$, also $\gamma=\frac{2}{3}$ gesetzt ist.

Vermischte Aufgaben.

1. (1) Es sei $a > b$. Dann ist $(a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\varphi)^{-n}$

$$= a^{-2n}\left(1 + \frac{b^2}{a^2} - 2\,\frac{b}{a}\cos\varphi\right)^{-n}$$

$$= a^{-2n}\left(1 - \frac{b}{a}e^{i\varphi}\right)^{-n}\left(1 - \frac{b}{a}e^{-i\varphi}\right)^{-n}.$$

Entwickelt man nun $\left(1 - \frac{b}{a}e^{i\varphi}\right)^{-n}$ und $\left(1 - \frac{b}{a}e^{-i\varphi}\right)^{-n}$ nach dem binomischen Satze und multiplicirt man beide Reihen, so erhält man, da die Coefficienten von $e^{ir\varphi}$ und $e^{-ir\varphi}$ einander gleich sind:

$$A_r = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-r)!}\,a^{-2n}\left(\frac{b}{a}\right)^r\left\{1 + \frac{n(n+r)}{1.(r+1)}\frac{b^2}{a^2}\right.$$

$$\left. + \frac{n(n+1)(n+r)(n+r+1)}{1.2.(r+1)(r+2)}\frac{b^4}{a^4} + \cdots\right\}$$

$$= \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-r)!}\,a^{-2n-r}\,b^r\,F\left(n,\ n+r,\ r+1,\ \frac{b^2}{a^2}\right).$$

(2) bis (4) Nach dem Fourier'schen Satze ist:

$$A_r = \frac{a^{-2n}}{\pi}\int_0^\pi\left(1 + \frac{b^2}{a^2} - 2\,\frac{b}{a}\cos\varphi\right)^{-n}\cos r\varphi\,d\varphi.$$

Dies lässt sich in den drei Formen schreiben:

$$A_r = \frac{1}{\pi\,(a^2+b^2)^n}\int_0^\pi\left(1 - \frac{2\,a\,b}{a^2+b^2}\cos\varphi\right)^{-n}\cos r\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi\,(a+b)^{2n}}\int_0^\pi\left(1 - \frac{4\,a\,b}{(a+b)^2}\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)^{-n}\cos r\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi\,(a-b)^{2n}}\int_0^\pi\left(1 + \frac{4\,a\,b}{(a-b)^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{-n}\cos r\varphi\,d\varphi,$$

und diese führen, wenn man die unter den Integralzeichen stehenden $(-n)$ten Potenzen nach dem binomischen Satze entwickelt, sehr leicht zu den im Texte unter (2), (3) und (4) angegebenen Formeln. Man beachte dabei nur, dass Integrale von der Form

$\int\limits_0 cos\,\alpha\varphi\; cos^\beta\,\varphi\, d\varphi$ verschwinden, wenn $\beta < \alpha$ oder wenn $\beta - \alpha$ eine ungerade Zahl ist, während

$$\int\limits_0^\pi cos\,\alpha\,\varphi\, cos^{\alpha+2\mu}\,\varphi\, d\,\varphi = \frac{\pi\,(\alpha+2\,\mu)!}{2^{\alpha+2\mu}\mu\,!\,(\alpha+\mu)\,!}$$

ist.

2. Sind a und b die Wurzeln der Gleichung $A + Bx + Cx^2 = 0$ und substituirt man $x = a - (a - b)\,z$, so geht die Gleichung über in:

$$z\,(1-z)\,\frac{d^2 y}{d\,z^2} + \left(\frac{D+Ea}{C\,(a-b)} - \frac{E}{C}\,z\right)\frac{d\,y}{d\,z} - \frac{F}{C}\,y = 0,$$

welche von derselben Form ist, wie die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe.

3. (1) bis (5). Gauss zeigt, dass zwischen je zwei verwandten Functionen und der Function F selbst eine homogene lineare Gleichung besteht, deren Coefficienten ganze Functionen von x höchstens vom ersten Grade sind, so dass im Ganzen $\frac{6\,.\,5}{1\,.\,2} = 15$ solcher Gleichungen bestehen. Um dieselben abzuleiten, gehen wir von dem leicht beweisbaren Gleichungssystem aus:

$$\frac{d\,F}{d\,log\,x} = \alpha\,(F_{\alpha+} - F) = \beta\,(F_{\beta+} - F) = (\gamma - 1)\,(F_{\gamma-} - F),$$

von dem die letzte auf S. 224 vorkam, und differentiiren dasselbe nochmals. Dies giebt:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\,F}{(d\,log\,x)^2} &= \alpha\,\{(\alpha+1)\,F_{\alpha+1+} - (2\,\alpha+1)\,F_{\alpha+} + \alpha\,F\}\\ &= \beta\,\{(\beta+1)\,F_{\beta+1+} - (2\,\beta+1)\,F_{\beta+} + \beta\,F\}\\ &= (\gamma-1)\,\{(\gamma-2)\,F_{\gamma-1-} - (2\,\gamma-3)\,F_{\gamma-} + (\gamma-1)\,F\}.\end{aligned}$$

Das erste System liefert die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)\,F + \alpha\,F_{\alpha+} - \beta\,F_{\beta+} &= 0,\\ (\gamma-\alpha-1)\,F + \alpha\,F_{\alpha+} - (\gamma-1)\,F_{\gamma-} &= 0,\\ (\gamma-\beta-1)\,F + \beta\,F_{\beta+} - (\gamma-1)\,F_{\gamma-} &= 0.\end{aligned}$$

Setzt man sodann die Werthe von $\frac{d\,F}{d\,log\,x}$ und $\frac{d^2\,F}{(d\,log\,x)^2}$ in die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe ein, so erhält

man, je nachdem man zugleich die ersten, zweiten oder dritten Werthe dieser Grössen benutzt, die weiteren drei Gleichungen:

$$\{\gamma - 2\alpha - (\beta - \alpha)x\} F + \alpha(1-x) F_{\alpha+} - (\gamma - \alpha) F_{\alpha-} = 0,$$
$$\{\gamma - 2\beta - (\alpha - \beta)x\} F + \beta(1-x) F_{\beta+} - (\gamma - \beta) F_{\beta-} = 0;$$
$$\{\gamma - 1 - \gamma(2\gamma - \alpha - \beta - 1)x\} F + (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) x F_{\gamma+} - \gamma(\gamma - 1)(1-x) F_{\gamma-} = 0.$$

Die übrigen neun Gleichungen findet man dann leicht aus diesen sechs durch Elimination einer der Grössen $F_{\alpha}\pm$, $F_{\beta}\pm$, $F_{\gamma}\pm$.

4. Diese und ähnliche Relationen ergeben sich durch Entwickelung von $\dfrac{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}$ in einen Kettenbruch. Setzt man $f_0 = F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, $f_1 = F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)$ und allgemein

$$f_{2i-1} = F(\alpha + i - 1, \beta + i, \gamma + 2i - 1, x),$$
$$f_{2i} = F(\alpha + i, \beta + i, \gamma + 2i, x),$$

und ferner noch

$$a_{2i-1} = \frac{(\alpha + i - 1)(\gamma + i - \beta - 1)}{(\gamma + 2i - 2)(\gamma + 2i - 1)}, \quad a_{2i} = \frac{(\beta + i)(\gamma + i - \alpha)}{(\gamma + 2i - 1)(\gamma + 2i)},$$

so gelten die leicht zu bestätigenden Gleichungen:

$$f_0 = f_1 - a_1 x f_2, \ldots, f_{i-1} = f_i - a_i x f_{i+1},$$

aus denen der Kettenbruch selbst leicht hergestellt werden kann. Bezeichnen dann Z_i und N_i den Zähler und Nenner des $i$ten Näherungsbruches, so hat man die Gleichungen:

$$\text{(a)} \quad f_0 = Z_i f_{i+1} - a_{i+1} x Z_{i-1} f_{i+2},$$
$$f_1 = N_i f_{i+1} - a_{i+1} x N_{i-1} f_{i+2},$$

und

$$N_i Z_{i-1} - Z_i N_{i-1} = a_1 \ldots a_i x^i,$$

und aus diesen folgt noch:

$$Z_i f_1 - N_i f_0 = a_1 a_2 \ldots a_{i+1} x^{i+1} f_{i+2}.$$

Vertauscht man in allen hier auftretenden Grössen gleichzeitig α, β, γ resp. mit $-i-\beta$, $-i-\alpha$, $-2i-\gamma$ und bezeichnet die dadurch entstehenden Grössen durch obere Indices, so hat man:

$$f^{(0)} = f^{(1)} - a^{(1)} x f^{(2)}, \ldots, f^{(i-1)} = f^{(i)} - a^{(i)} x f^{(i+1)},$$

und

$$f^{(0)} = Z^{(i)} f^{(i+1)} - a^{(i+1)} x Z^{(i+1)} f^{(i+2)},$$
$$f^{(1)} = N^{(i)} f^{(i+1)} - a^{(i+1)} x N^{(i-1)} f^{(i+2)},$$
$$N^{(i)} Z^{(i-1)} - Z^{(i)} N^{(i-1)} = a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(i)} x^i,$$

sowie:

$$Z^{(i)} f^{(1)} - N^{(i)} f^{(0)} = a^{(1)} a^{(2)} \dots a^{(i+1)} x^{i+1} f^{(i+2)}.$$

Nun ist aber

$$a^{(1)} = a_{2i}; \; a^{(2)} = a_{2i-1}, \dots, \; a^{(2i)} = a_1$$

und ferner:

$$Z^{(2i)} = Z_{2i}, \; N^{(2i)} = Z_{2i-1}, \quad Z_{2i-1} = N_{2i}, \; N^{(2i-1)} = N_{2i-1},$$

daher aus der letzten Gleichung:

$$\text{(b)} \qquad Z_{2i} f^{(1)} - Z_{2i-1} f^{(0)} = a_0 a_1 \dots a_{2i} x^{2i+1} f^{(2i+2)}$$

und

$$N_{2i} f^{(1)} - N_{2i-1} f^{(0)} = a_1 \dots a_{2i} x^{2i} f^{(2i+1)}.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen in (a) und den Gleichungen (b) kann man die Grössen Z_{2i}, Z_{2i-1}, N_{2i}, N_{2i-1} finden. Bezeichnen wir die Determinante der entsprechenden Gleichungen mit Δ, so ist

$$\Delta = f_{2i+1} f^{(0)} - a_{2i+1} x f_{2i+2} f^{(1)}.$$

Der Werth von Δ ändert sich nicht, wenn man i um eine beliebige ganze Zahl verringert. Denn setzt man rechts $i - \nu$ statt i, so geht derselbe über in:

$$f_{2i-2\nu+1} f^{(2\nu)} - a_{2i-2\nu+1} x f_{2i-2\nu+2} f^{(2\nu+1)}.$$

Es ist aber

$$f^{(2\nu)} = f^{(2\nu+1)} - a_{2i-2\nu} x f^{(2\nu+2)}$$

und:

$$a_{2i-2\nu+1} x f_{2i-2\nu+2} = f_{2i-2\nu+1} - f_{2i-2\nu}.$$

Setzt man diese Werthe ein, so folgt:

$$f_{2i-2\nu+1} f^{(2\nu)} - a_{2i-2\nu+1} x f^{(2\nu+1)} f_{2i-2\nu+2}$$
$$= f_{2i-2\nu} f^{(2\nu+1)} - a_{2i-2\nu} x f_{2i-2\nu+1} f^{(2\nu+2)},$$

d. h. der Ausdruck links ändert sich nicht, wenn man ν mit $\nu + 1$ vertauscht. Demnach bleibt auch Δ ungeändert, wenn man darin i um irgend eine ganze Zahl vermindert, d. h. es ist Δ von i unabhängig. Andererseits ist aber, wenn α eine ganze Zahl ist und $i = -\alpha$ gesetzt wird, $\Delta = 1$, mithin ist Δ überhaupt gleich 1, da es seinen Werth nicht ändern kann, wenn man einer darin gar nicht vorkommenden Grösse einen bestimmten Werth beilegt. Man hat also allgemein:

$$f_{2i+1} f^{(0)} - a_{2i+1} x f_{2i+2} f^{(1)} = 1,$$

oder:

$$F(\alpha+i, \beta+i+1, \gamma+2i+1, x) \, F(-i-\beta, -i-\alpha, -2i-\gamma, x)$$
$$- \frac{(\alpha+i)(\gamma+i-\beta)}{(\gamma+2i)(\gamma+2i+1)} x F(\alpha+i+1, \beta+i+1, \gamma+2i+2, x) \times$$
$$F(-i-\beta, 1-i-\alpha, 1-2i-\gamma, x) = 1.$$

Setzt man hierin $i = -1$ und lässt man $\gamma + 1$ an die Stelle von γ treten, so ergiebt sich:

$$F(\alpha - 1, \beta, \gamma, x)\, F(1-\beta, 1-\alpha, 1-\gamma, x)$$
$$-\frac{(\alpha-1)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-1)}\, x F(\alpha, \beta, \gamma+1, x)\, F(1-\beta, 2-\alpha, 2-\gamma, x) = 1.$$

Mittelst der zwischen den verwandten Functionen bestehenden Relationen erhält man hieraus leicht die im Texte angegebene Gleichung.

5. (1) Setzt man in der Gleichung

$$z(1-z)\frac{d^2F}{dz^2} + \left\{\gamma - \left(2\alpha + \frac{3}{2}\right)z\right\}\frac{dF}{dz} - \alpha\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)F = 0,$$

welcher durch $F(\alpha, \alpha + \frac{1}{2}, \gamma, z)$ genügt wird, $z = \frac{4y}{(1+y)^2}$ und sodann $F\left(\alpha, \alpha + \frac{1}{2}, \gamma, z\right) = (1+y)^{2\alpha} v$, so erhält man die Gleichung:

$$y(1-y)\frac{d^2v}{dy^2} + \{\gamma - (4\alpha - \gamma + 2)y\}\frac{dv}{dy} - 2\alpha(2\alpha - \gamma + 1)v = 0,$$

und dieser wird genügt durch $v = F(2\alpha, 2\alpha - \gamma + 1, \gamma, y)$. Drückt man y durch z aus, so sieht man aus dem in §. 122 angeführten Hülfssatze, dass die beiden particulären Integrale $F\left(\alpha, \alpha + \frac{1}{2}, \gamma, z\right)$ und $(1+y)^{2\alpha} F(2\alpha, 2\alpha - \gamma + 1, \gamma, y)$ mit einander identisch sind.

(2) Setzt man in der Gleichung

$$z(1-z)\frac{d^2F}{dz^2} + \{2\beta - (\alpha + \beta + 1)z\}\frac{dF}{dz} - \alpha\beta F = 0,$$

welcher durch $F(\alpha, \beta, 2\beta, z)$ genügt wird, wieder $z = \frac{4y}{(1+y)^2}$ und sodann $F(\alpha, \beta, 2\beta, z) = (1+y)^{2\alpha} v$, so erhält man die Gleichung:

$$y(1-y^2)\frac{d^2v}{dy^2} + 2\{\beta - (2\alpha - \beta + 1)y^2\}\frac{dv}{dy} - 2\alpha(2\alpha - 2\beta + 1)yv = 0,$$

und wenn man hierin noch $y^2 = t$ setzt:

$$t(1-t)\frac{d^2v}{dt^2} + \left\{\beta + \frac{1}{2} - \left(2\alpha - \beta + \frac{3}{2}\right)t\right\}\frac{dv}{dt} - \alpha\left(\alpha - \beta + \frac{1}{2}\right)v = 0.$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch

$$v = F\left(\alpha, \alpha - \beta + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, t\right).$$

Wie in (1) überzeugt man sich dann von der Richtigkeit der Gleichung:

$$F(\alpha, \beta, 2\beta, z) = (1 + y)^{2\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \beta + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, y^2\right).$$

(3) Setzt man $sin^2 \vartheta = t$, so wird die Gleichung

$$t(1-t)\frac{d^2 y}{dt^2} + \left\{\alpha + \beta + \frac{1}{2} - (\alpha + \beta + 1)t\right\}\frac{dy}{dt} - \alpha\beta y = 0$$

befriedigt durch $y = F\left(\alpha, \beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, t\right)$. Substituirt man sodann $t = 4z(1-z)$, also $z = sin^2 \frac{\vartheta}{2}$, so geht die Gleichung über in:

$$z(1-z)\frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right)(1 - 2z)\frac{dy}{dz} - 4\alpha\beta y = 0$$

und dieser wird genügt durch $y = F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, z\right)$. Aus dem in §. 122 angegebenen Hülfssatze folgt alsdann die Identität beider Ausdrücke für y.

(4) Ist $sin^2 2\vartheta = x$, so wird die Gleichung

$$x(1-x)\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{2\alpha + 2}{3} - \frac{4\alpha + 7}{6}x\right)\frac{dy}{dx} - \frac{1}{12}\alpha(\alpha + 1)y = 0$$

befriedigt durch $y = F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha + 1}{6}, \frac{2\alpha + 2}{3}, x\right)$. Führt man in dieser zunächst die neue unabhängige Veränderliche $t = cos^2 \vartheta$ ein durch die Relation $x = 4t(1-t)$ und setzt dann $y = t^{-\alpha} v$, so geht die Gleichung über in:

$$t^2(1-t)\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{2}{3}\{1 - 2\alpha - (2 - \alpha)t\}t\frac{dv}{dt} + \frac{1}{3}\alpha(\alpha + 1)v = 0,$$

und wenn man hierin noch $\frac{4(t-1)}{t^2} = z$ substituirt, wodurch $z = -4\frac{sin^2 \vartheta}{cos^4 \vartheta}$ wird, so folgt:

$$z(1-z)\frac{d^2 v}{dz^2} + \left(\frac{2\alpha + 2}{3} - \frac{4\alpha + 7}{6}z\right)\frac{dv}{dz} - \frac{1}{12}\alpha(\alpha + 1)v = 0.$$

Dieser Gleichung genügt man durch

$$v = F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha + 1}{6}, \frac{2\alpha + 2}{3}, z\right).$$

Aus dem in §. 122 angegebenen Hülfssatze folgt alsdann wiederum die Gleichung:

$$F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{6}, \frac{2\alpha+2}{3}, \sin^2 2\vartheta\right)$$
$$= \cos^{-2\alpha}\vartheta\, F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{6}, \frac{2\alpha+2}{3}, -4\frac{\sin^2\vartheta}{\cos^4\vartheta}\right).$$

6. Die Legendre'sche Gleichung geht für $x = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)$ in $\xi^2(1-\xi^2)\frac{d^2y}{d\xi^2} - 2\xi^3\frac{dy}{d\xi} - n(n+1)(1-\xi^2)\,y = 0$ über. Integrirt man diese in der gewöhnlichen Weise durch Reihen, so erhält man die beiden particulären Integrale:

$$y_1 = A\,\xi^{-n} F\left(\frac{1}{2}, -n, \frac{1}{2}-n, \xi^2\right)$$
$$y_2 = B\,\xi^{n+1} F\left(\frac{1}{2}, n+1, n+\frac{3}{2}, \xi^2\right).$$

Ist n eine ganze positive Zahl, so ist y_1 eine endliche Reihe, sie hat daher für $\xi = 1$ einen endlichen Werth, während y_2 für $\xi = 1$ unendlich gross wird, da alsdann die Reihe für y_2 divergirt. Ferner verschwindet y_2 für $\xi = 0$ oder $x = \infty$, während y_1 für $\xi = 0$ unendlich gross wird. Nun gilt bezüglich der Identität zweier particulären Integrale der leicht zu beweisende Satz: Alle particulären Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche für $x = x_1$ nicht unendlich werden, sind bis auf einen constanten Factor mit einander identisch, wenn die Gleichung ein Integral besitzt, welches für $x = x_1$ unendlich gross wird. (Vergl. Nr. 6, S. 564.) Mithin ist y_1 identisch mit $P_n(x)$ und y_2 identisch mit $Q_n(x)$. Die Constanten A und B bestimmen sich folgendermaassen. Es ist $[P_n(x)]_{x=1} = 1$, dagegen

$$F\left(\frac{1}{2}, -n, \frac{1}{2}-n, 1\right) = \frac{\Pi\left(-n-\frac{1}{2}\right)\Pi(-1)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi(-n-1)} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Pi(n)}{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}$$
$$= \frac{2^n\,\Pi(n)}{1.3.5\ldots(2n-1)},$$

also $A = \dfrac{\Pi(2n)}{2^{2n}\,\Pi(n)\,\Pi(n)}$.

Ferner ist $[x^{n+1}\, Q_n\,(x)]_{x=\infty} = \dfrac{2^n\, \Pi(n)\, \Pi(n)}{\Pi(2n+1)}$ und $[x\,\xi]_{x=\infty} = \dfrac{1}{2}$,

also $B = \dfrac{2^{2n+1}\, \Pi(n)\, \Pi(n)}{\Pi(2n+1)}$.

7. Aus der Gleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2 y}{d x^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)\,y = 0$$

ergiebt sich durch $(i-2)$-malige Differentiation:

$$(1-x^2)\frac{d^i y}{d x^i} - 2(i-1)\,x\,\frac{d^{i-1} y}{d x^{i-1}} + (n-i+2)(n+i-1)\frac{d^{i-2} y}{d x^{i-2}} = 0.$$

Ist A der Werth von y für $x = 0$, B der Werth von $\dfrac{dy}{dx}$ für $x=0$ und berechnet man aus der vorstehenden Gleichung die Werthe der auf einander folgenden Differentialquotienten für das Argument $x = 0$, so erhält man nach §. 83 das vollständige Integral in der Form:

$$y = A\left\{1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)\,n\,(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \cdots\right\}$$

$$+ Bx\left\{1 - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^2 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^4 - \cdots\right\},$$

oder

$$y = A\,F\left(-\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) + B\,x\,F\left(\frac{1-n}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right).$$

8. Setzt man $y = A_0\, x^\mu + A_1\, x^{\mu+1} + \cdots$, so erhält man: $\mu(\mu+\vartheta-1)(\mu+\varepsilon-1) = 0$, also entweder $\mu = 0$ oder $\mu = 1-\vartheta$ oder $\mu = 1-\varepsilon$, und

$$A_r = \frac{(\mu+r+\alpha-1)(\mu+r+\beta-1)(\mu+r+\gamma-1)}{(\mu+r)(\mu+r+\vartheta-1)(\mu+r+\varepsilon-1)}\,A_{r-1}.$$

Die drei Werthe von μ führen dann leicht zu den drei im Texte angegebenen particulären Integralen.

9. Es ist $n = -\dfrac{1}{2}$ und $y = x^{-1/2}[A + B\, arc\, sin\,(2x-1)]$ oder,

da $arc\ sin\ (2x-1) = 2\, arc\, sin\ x^{1/2} - \dfrac{\pi}{2}$ ist,

$$y = x^{-1/2}\,\{A' + B'\, arc\, sin\, x^{1/2}\}.$$

Andererseits ist $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x\right)$ ein particuläres Integral der Gleichung; es müssen sich also A' und B' so bestimmen lassen, dass $A' + B' \, arc \, sin \, x^{1/2} = x^{1/2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x\right)$ wird. Für $x = 0$ ist nun $A' = 0$ und $B' = 1$, also $arc \, sin \, x = x F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right)$.

10. Für die erste Gleichung ist

$$y = A F\left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, x\right) + B x^{2/3} F\left(2, -1, \frac{5}{3}, x\right),$$

oder: $y = A (1 - x)^{2/3} (1 - 6x) + B x^{2/3} \left(1 - \frac{6}{5} x\right)$.

Für die zweite Gleichung ist

$$y = A F\left(1 -2, \frac{1}{2}, x\right) + B x^{1/2} F\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, x\right),$$

oder: $y = A\left(1 - 4x + \frac{8}{3} x^2\right) + B x^{1/2} (1 - x)^{3/2}$.

11. (1) u. (2). Besteht zwischen ξ und s die Relation:

$$\xi = \frac{(s^4 + 2 s^2 \sqrt{3} - 1)^3}{(s^4 - 2 s^2 \sqrt{3} - 1)^3},$$

so genügt s nach §. 132 der Gleichung

$$\{s, \xi\} = \frac{\frac{3}{8}}{(\xi - 1)^2} + \frac{\frac{4}{9}}{\xi^2} + \frac{\frac{3}{8}}{\xi (1 - \xi)}.$$

Setzt man $\xi_1 = \frac{(\xi + 1)^2}{(\xi - 1)^2}$, so erhält man:

$$\{s, \xi\} = \frac{\frac{4}{9}}{(\xi_1 - 1)^2} + \frac{\frac{3}{8}}{\xi_1^2} + \frac{\frac{101}{288}}{\xi_1 (1 - \xi_1)},$$

und es ist:

$$\xi_1 = \frac{(s^4 - 1)^2 (s^8 + 34 s^4 + 1)^2}{108 s^4 (s^4 + 1)^4}.$$

Ohne dass sich der Werth von $\{s, \xi_1\}$ änderte, kann man hierin s^4 mit $-s^4$ vertauschen und, da identisch $(s^4 + 1)^2 (s^8 - 34 s^4 + 1)^2 = (s^8 + 14 s^4 + 1)^3 - 108 (s^4 - 1)^4 s^4$ ist, so folgt:

$$1 - \xi_1 = \frac{(s^8 + 14 s^4 + 1)^3}{108 s^4 (s^4 - 1)^4}.$$

Setzt man endlich noch $1-\xi_1=\frac{x}{x-1}$, oder

$$x=\frac{(s^8+14s^4+1)^3}{(s^4+1)^2(s^8-34s^4+1)^2},$$

so genügt s der Gleichung:

$$\{s,x\}=\frac{\frac{4}{9}}{x^2}+\frac{\frac{15}{32}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{155}{288}}{x(1-x)}.$$

Hieraus folgt $\lambda^2=\frac{1}{9}$, $\mu^2=\nu^2=\frac{1}{4}$ und daher entweder

$$\alpha=\frac{11}{24},\ \beta=-\frac{1}{24},\ \gamma=\frac{2}{3},$$

welche Werthe für die erste Gleichung dieser Nummer gelten, oder

$$\alpha=\frac{19}{24},\ \beta=\frac{7}{24},\ \gamma=\frac{4}{3},$$

welche Werthe bei der zweiten Gleichung stattfinden. Man kann nun s durch x mittelst Wurzelgrössen ausdrücken; denn setzt man $(s^2+s^{-2})^2=\sigma$, so folgt für σ die cubische Gleichung:

$$x=\frac{(\sigma+12)^3}{\sigma(\sigma-36)^2}.$$

Man findet also auch zwei particuläre Integrale der Gleichung $\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{1}{2}\{s,x\}\,v=0$ als algebraische Functionen von x. Werden dieselben mit v_1 und v_2 bezeichnet, so erhält man als Stammgleichung der ersten Differentialgleichung:

$$y=x^{-1/3}(1-x)^{-3/8}(C_1v_1+C_2v_2),$$

als die der zweiten:

$$y=x^{-2/3}(1-x)^{-3/8}(C_1v_1+C_2v_2).$$

12. (1) u. (2). Nach der vorigen Aufgabe genügt s der Gleichung:

$$\{s,\xi_1\}=\frac{\frac{4}{9}}{(\xi_1-1)^2}+\frac{\frac{3}{8}}{\xi_1^2}+\frac{\frac{101}{288}}{\xi_1(1-\xi_1)},$$

wenn zwischen s und ξ_1 die Relation besteht:

$$1-\xi_1=\frac{(s^8+14s^4+1)^3}{108s^4(s^4-1)^4}.$$

Hierin setze man

$$\xi_1-1=\frac{(z-1)^2}{4z},$$

dann wird:

$$\{s, z\} = \frac{\frac{15}{32}}{z^2} + \frac{\frac{5}{18}}{(1-z)^2} + \frac{\frac{5}{18}}{z(1-z)}.$$

Hieraus folgt $\lambda^2 = \mu^2 = \frac{1}{16}$, $\nu^2 = \frac{4}{9}$, also entweder

$$\alpha = \frac{1}{6},\ \beta = -\frac{1}{12},\ \gamma = \frac{3}{4}$$

wie bei der ersten Gleichung, oder

$$\alpha = \frac{5}{12},\ \beta = \frac{1}{6},\ \gamma = \frac{5}{4}$$

wie bei der zweiten Gleichung. Analog wie bei der vorigen Aufgabe findet man dann zwei particuläre Integrale der Gleichung $\frac{d^2 v}{d z^2} + \frac{1}{2}\{s, z\}\, v = 0$ als algebraische Functionen von z, und aus diesen folgt für die erste Differentialgleichung das vollständige Integral $y = x^{-3/8}(1-x)^{-1/6}(C_1 v_1 + C_2 v_2)$,

für die zweite: $y = x^{-5/8}(1-x)^{-1/6}(C_1 v_1 + C_2 v_2)$.

VII. Capitel.

§. 139.

2. Aufgabe. Dies folgt unmittelbar aus der ersten Aufgabe dieses Paragraphen.

3. Aufgabe. Hier ist

$$\varphi(t) = (t-\alpha)(t-\beta),\ \psi(t) = -(\alpha+\beta)t,$$

daher

$$\int \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\, dt = log\{(t-\alpha)^m (t-\beta)^n\},$$

wenn $m = -\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}$, $n = -\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\beta-\alpha}$ gesetzt wird. Das Integral der Gleichung ist demnach:

$$y = C \int e^{xt} (t-\alpha)^{m-1} (t-\beta)^{n-1}\, dt,$$

wenn die Grenzen bestimmt werden durch die Gleichung:

$$[e^{xt} (t-\alpha)^m (t-\beta)^n] = 0.$$

Bei positiven Werthen von x wird dieselbe erfüllt durch $t = -\infty$ und durch $t = \alpha$, $t = \beta$, vorausgesetzt, dass die Exponenten m und n beide positiv sind. Dazu ist erforderlich, dass α und β entgegengesetztes Vorzeichen haben und, wenn α negativ ist, der absolute Betrag von α grösser als β sei. Ist dies der Fall, so besitzt das allgemeine Integral der Differentialgleichung die im Texte angegebene Form. Bei negativen Werthen von x erhält man statt dessen unter denselben Annahmen über α und β:

$$y = A \int_\alpha^\beta e^{tx} (t-\alpha)^{m-1} (t-\beta)^{n-1} dt + B \int_\beta^\infty e^{tx} (t-\alpha)^{m-1} (t-\beta)^{n-1} dt.$$

Sind α und β beide positiv oder beide negativ, so ist einer der Exponenten m und n positiv, der andere negativ, und zugleich ist der absolute Betrag des negativen Exponenten grösser als der des positiven. Auch in diesen Fällen erhält man stets zwei particuläre Integrale, da alsdann die Gleichung $[e^{tx} (t-\alpha)^m (t-\beta)^n] = 0$ auch durch $t = \pm \infty . \sqrt{-1}$, für welchen Werth e^{tx}, wenn auch unbestimmt, so doch endlich ist, erfüllt wird. Ist dagegen $\alpha < 0 < \beta$ und zugleich der absolute Betrag von α kleiner als β, so findet man auf diesem Wege nur ein particuläres Integral.

5. Aufgabe. Setzt man in dem ersten Integral, welches in dem Ausdruck von y in der 4. Aufgabe S. 253 vorkommt, $t = q \cos \vartheta$, so erhält man ein particuläres Integral der Gleichung in der Form:

$$y_1 = C_1 \int_0^\pi e^{qx\cos\vartheta} \sin^{a-1} \vartheta \, d\vartheta.$$

Durch die Substitution $y = x^{1-a} u$ geht die Differentialgleichung über in:

$$x \frac{d^2 u}{dx^2} + (2-a) \frac{du}{dx} - q^2 x u = 0.$$

Man kann also einen Werth von u aus dem von y_1 finden, wenn man darin a mit $2-a$ vertauscht. Dies setzt, da vorher a positiv angenommen war, voraus, dass auch $2-a$ positiv sei, also a zwischen 0 und 2 liege. Ist dies der Fall, so ist daher das allgemeine Integral:

$$y = C_1 \int_0^\pi e^{qx\cos\vartheta} \sin^{a-1} \vartheta \, d\vartheta + C_2 x^{1-a} \int_0^\pi e^{qx\cos\vartheta} \sin^{1-a} \vartheta \, d\vartheta.$$

Ist aber $a = 1$, in welchem Falle beide Integrale identisch werden, so setze man $C_1 = A + \frac{B}{a-1}$, $C_2 = -\frac{B}{a-1}$ und schreibe:

$$y = \int_0^\pi e^{qx\cos\vartheta} \left\{ A\, sin^{a-1}\vartheta + B\,\frac{sin^{a-1}\vartheta - (x\,sin\,\vartheta)^{1-a}}{a-1} \right\} d\vartheta.$$

Die Aufsuchung des Grenzwerthes für $a = 1$ nach der gewöhnlichen Methode giebt dann:

$$y = \int_0^\pi e^{qx\cos\vartheta} \{ A + B\,log\,(x\,sin^2\vartheta) \}\, d\vartheta.$$

6. Aufgabe. Die hierher gehörige Bessel'sche Gleichung ist die für $n = 0$, also: $x\,\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0$. Hier ist

$$\varphi(t) = t^2 + 1,\ \psi(t) = t, \text{ also } \int \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\,dt = log\,(1+t^2)^{1/2}.$$

Das Integral der Gleichung ist also: $y = C\int e^{xt}\,(1+t^2)^{-1/2}\,dt$, wenn die Grenzen bestimmt werden durch die Gleichung: $[e^{xt}\,(1+t^2)^{1/2}] = 0$. Bei positiven Werthen von x wird dieselbe befriedigt durch $t = -\infty$, $t = -i$, $t = +i$, bei negativen Werthen von x durch $t = +\infty$, $t = +i$, $t = -i$. Daher ist im ersten Falle das allgemeine Integral:

$$y = C_1 \int_{-i}^{+i} e^{xt}\,(1+t^2)^{-1/2}\,dt + C_2 \int_{-i}^{-\infty} e^{xt}\,(1+t^2)^{-1/2}\,dt.$$

Das erste Integral zerlege man in die Summe zweier, welche sich erstrecken von $-i$ bis 0 und von 0 bis $+i$, das zweite ebenso in eins von $-i$ bis 0 und in eins von 0 bis $-\infty$. In den drei zwischen endlichen Grenzen genommenen Integralen setze man dann $t = ui$ und schreibe $cos\,(ux) + i\,sin\,(ux)$ für e^{uxi}. Zieht man zusammen, so erhält man als allgemeines Integral der für $n = 0$ geltenden Bessel'schen Gleichung:

$$y = A\int_0^1 cos\,(ux)\,(1-u^2)^{-1/2}\,du + B\left\{ \int_0^1 sin\,(ux)\,(1-u^2)^{-1/2}\,du + \int_0^{-\infty} e^{xu}\,(1+u^2)^{-1/2}\,du \right\}.$$

Bei negativen Werthen von x hat man nur im letzten Integrale $+\infty$ statt der oberen Grenze $-\infty$ zu setzen.

§. 141.

Aufgabe. Die Gleichung zur Bestimmung von T wird:

$$(t+\mu)\,\frac{d^2T}{dt^2} + (t^2 - \mu^2 + 2)\,\frac{dT}{dt} + (3t - \mu)\,T = 0.$$

Multiplicirt man dieselbe mit $t + \mu$, so ist die linke Seite ein exacter Differentialquotient, und es folgt durch Integration:

$$\frac{dT}{dt} + (t - \mu)\,T = \frac{A}{(t + \mu)^2}$$

und hieraus:

$$T = e^{-\frac{1}{2}(t-\mu)^2}\left\{B + A\int\frac{e^{+\frac{1}{2}(t-\mu)^2}}{(t+\mu)^2}\,dt\right\}.$$

Um ein particuläres Integral der gegebenen Gleichung zu erhalten, sei $A = 0$. Dann bestimmen sich in $y = B\int e^{tx - \frac{1}{2}(t-\mu)^2}\,dt$ die Integrationsgrenzen aus der Gleichung:

$$\left[e^{tx-\frac{1}{2}(t-\mu)^2}\{1 - x(t + \mu)\}\right] = 0;$$

dieselben sind also $t = +\infty$ und $t = -\infty$, daher

$$y = B\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx - \frac{1}{2}(t-\mu)^2}\,dt,\text{ d. i. } y = C e^{\frac{1}{2}(x+\mu)^2}.$$

Setzt man sodann: $y = e^{\frac{1}{2}(x+\mu)^2}u$, so wird die Gleichung für u:

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + (x^2 + 2\mu x - 1)\frac{du}{dx} = 0,$$

mithin: $u = C_1\int e^{-\frac{1}{2}(x+2\mu)^2}\,x\,dx$. Demnach ist das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung:

$$y = e^{\frac{1}{2}(x+\mu)^2}\left\{C + C_1\int e^{-\frac{1}{2}(x+2\mu)^2}\,x\,dx\right\}.$$

§. 142.

Aufgabe. Man nehme $y = \int e^{-pt}\,x\,P\,dp$ an, differentiire dies zweimal nach x und substituire die Werthe von y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ in die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = c^2x^ny$. Setzt man dann wieder

$$\frac{dt}{dx} = cx^{\frac{n}{2}},\text{ also } t = \frac{2c}{n+2}\,x^{\frac{n}{2}+1}$$

und dividirt die entstehende Gleichung durch $cx^{\frac{n}{2}}$, so erhält man, wenn man wieder $\frac{n}{2} + 1 = m$ setzt:

$$m\int(1 - p^2)\,e^{-pt}\,t\,P\,dp + (m + 1)\int e^{-pt}\,P\,p\,dp = 0,$$

also dieselbe Gleichung, wie in §. 142, nur dass $-m$ für m gesetzt ist. Wie dort erhält man daher $P = A(1 - p^2)^{-\frac{m-1}{2m}}$ und für die

Grenzen: $[e^{-pt}(1-p^2)^{\frac{m+1}{2m}}]=0$. Der letzteren genügt man durch $p=\infty$ und $p=\pm 1$, sofern $\frac{m+1}{2m}>0$ ist. Hierzu ist erforderlich, dass m entweder positiv oder negativ und dem absoluten Betrage nach grösser als 1 sei, oder dass n nicht liege zwischen -2 und -4. Es ist also dann

$$y=A'x\int_{-1}^{+1} e^{-pt}(1-p^2)^{-\frac{m-1}{2m}}\,dp+B'x\int_{1}^{\infty} e^{-pt}(1-p^2)^{-\frac{m-1}{2m}}\,dp.$$

Transformirt man das erste Integral ebenso wie in §. 142, so erhält man die im Texte angegebene Formel.

§. 144.

1. Aufgabe. Sind a und b die Wurzeln von $A+Bx+Cx^2=0$, so nimmt nach Aufgabe 2, S. 589, diese Gleichung durch die Substitution $x=a-(a-b)z$ die Form an:

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+(m-nz)\frac{dy}{dz}-py=0;$$

sie lässt sich also analog wie die hypergeometrische Reihe durch Integrale integriren, deren besondere Form sich nach der Beschaffenheit von m, n, p richtet. Ist aber $A+Bx+Cx^2=C(x-a)^2$, so setze man $x-a=\frac{1}{\xi}$ und $y=\xi^k z$, wo k eine Wurzel der Gleichung $Ck^2+(C-E)k+F=0$ ist. Dadurch erhält man die Gleichung:

$$C\xi\frac{d^2z}{d\xi^2}+\{2C(k+1)-E-(D+Ea)\xi\}\frac{dz}{d\xi}-k(D+Ea)z=0,$$

welche von der in §. 136 behandelten Form und daher ebenfalls durch bestimmte Integrale lösbar ist. (Vergl. Raabe, Differential- u. Integral-Rechn. Bd. III, S. 280 bis 288.)

2. Aufgabe. (1) bis (3). Die in §. 143 enthaltene zur Bestimmung der Grenzen dienende Gleichung

$$[u^\beta(1-u)^{\gamma-\beta}(1-ux)^{-\alpha-1}]=0$$

wird, wie man leicht sieht, auch erfüllt, wenn entweder $\beta>0$ und $\alpha+1-\gamma>0$ oder $\gamma-\beta>0$ und $\alpha+1-\gamma>0$, und zwar im ersten Falle durch $u=0$ und $u=\pm\infty$, im zweiten durch $u=1$ und $u=\pm\infty$. Man findet somit auch zwei particuläre Integrale in der unter (1) und (2) angegebenen Form. — Setzt man ferner y

in der Form voraus $y = \int_g^{\frac{E}{x}} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du$, wo E und g gewisse Constanten sind, differentiirt dies zweimal, wobei zu beachten, dass hier auch die obere Grenze von x abhängt, und substituirt dies in die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe, so wird die linke Seite derselben nach Ausführung einer partiellen Integration und einigen Reductionen:

$$-(\gamma-\beta-1)E^{\beta}(1-E)^{1-\alpha}x^{1-\gamma}(x-E)^{\gamma-\beta-2}$$
$$+\alpha g^{\beta}(1-g)^{\gamma-\beta}(1-xg)^{-\alpha-1}.$$

Ist $1-\alpha>0$, so verschwindet das erste Glied für $E=1$; ist ferner $\beta>0$ oder $\gamma-\beta>0$ oder $\alpha+1-\gamma>0$, so verschwindet auch das zweite Glied und zwar resp. für $g=0$, $g=1$, $g=\infty$. Man hat demnach sechs verschiedene bestimmte Integrale als Lösung der Gleichung und zwar, wenn man

$$u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha-1}=U$$

setzt, (a) wenn $\beta>0$ und $\gamma-\beta>0$: $y=\int_0^1 U\,du$; (b) wenn $\beta>0$ und $\alpha+1-\gamma>0$: $y=\int_0^{-\infty} U\,du$; (c) wenn $\gamma-\beta>0$ und $\alpha+1-\gamma>0$: $y=\int_1^{\infty} U\,du$; (d) wenn $\beta>0$ und $1-\alpha>0$: $y=\int_0^{\frac{1}{x}} U\,du$; (e) wenn $\gamma-\beta>0$ und $1-\alpha>0$: $y=\int_1^{\frac{1}{x}} U\,du$; (f) wenn $\alpha+1>\gamma$ und $1-\alpha>0$: $y=\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} U\,du$. Der Fall (e) entspricht der Gleichung (3) unserer Aufgabe. (Jacobi, Crelle's Journal, Bd. 56, S. 149.)

3. Aufgabe.

(1) Hier ist $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=1$, somit nach §. 143 und §. 144, wenn man in den dortigen Integralen $v=\sin^2\varphi$ setzt:

$$y = A\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-x\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\,d\varphi + B\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-x'\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\,d\varphi.$$

Man konnte dieses Resultat auch aus Nr. (2) der 4. Aufgabe von §. 85 entnehmen, da die dortige Gleichung durch die Substitution $x^2=\xi$ in die vorliegende übergeht.

(2) Für $y = x x' z$ wird:

$$x(1-x)\frac{d^2 z}{dx^2} + (2-4x)\frac{dz}{dx} - \frac{9}{4}z = 0,$$

also $\alpha = \beta = \frac{3}{2}$, $\gamma = 2$ und daher nach §. 143 und 144, wenn man $v = sin^2\varphi$ setzt:

$$z = A\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\varphi\,(1-x\,sin^2\varphi)^{-3/2}\,d\varphi + B\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\varphi\,(1-x'\,sin^2\varphi)^{-3/2}\,d\varphi.$$

(3) Hier ist $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$. Es wird daher nach Fall (a) und (d) der 2. Aufgabe S. 603

$$y = C_1\int_0^1 v^{-1/2}(1-v)^{-1/2}(1-xv)^{1/2}\,dv$$

$$+ C_2\int_0^{\frac{1}{x}} v^{-1/2}(1-v)^{-1/2}(1-xv)^{1/2}\,dv.$$

Setzt man im ersten Integrale $v = sin^2\varphi$, im zweiten $v = \frac{sin^2\varphi}{x}$, so folgt:

$$y = A\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-x\,sin^2\varphi)^{1/2}\,d\varphi + B\left(\frac{1}{x}\right)^{1/2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{sin^2\varphi}{x}\right)^{-1/2} cos^2\varphi\,d\varphi.$$

(4) Diese Gleichung geht aus der vorigen hervor, wenn man x und x' mit einander vertauscht; daher ist hier:

$$y = A\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-x'\,sin^2\varphi)^{1/2}\,d\varphi + B\left(\frac{1}{x'}\right)^{1/2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{sin^2\varphi}{x'}\right)^{-1/2} cos^2\varphi\,d\varphi.$$

(5) Die Gleichung, in welcher der Coefficient von $\frac{dy}{dx}$ positiv ist, geht durch die Substitution $y = x'^2 z$ über in:

$$x x'\frac{d^2 z}{dx'^2} + (3-4x')\frac{dz}{dx'} - \frac{9}{4}z = 0.$$

Es ist also $\alpha = \beta = \frac{3}{2}$, $\gamma = 3$. Man erhält aber hier nur ein einziges particuläres Integral, nämlich nach §. 143:

$$z_1 = \int_0^1 v^{1/2}(1-v)^{1/2}(1-x'v)^{-3/2}\,dv,$$

oder nach einfacher Transformation:

$$z_1 = \frac{1}{x'} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\varphi \, d\varphi}{(1 - x' \sin^2 \varphi)^{1/2}}.$$

Der Umstand, dass man nur ein particuläres Integral findet, deutet darauf hin, dass das zweite nicht die vorausgesetzte Form haben wird. Im Falle $\alpha = \beta$ kann man aber, wenn die in der zweiten Aufgabe angeführten Fälle nicht von selbst ein zweites particuläres Integral liefern, wie dies in (1) und (2) der Fall war, ein solches in folgender Weise finden. Es sei z. B. $\beta > 0$ und $\gamma - \beta > 0$. Dann ist $y = \int_0^1 v^{\beta-1} (1 - v)^{\gamma-\beta-1} (1 - x v)^{-\alpha} dv$ ein particuläres Integral, welches mit $\varphi(\alpha, \beta)$ bezeichnet sein möge. Ist auch $\alpha > 0$ und $\gamma - \alpha > 0$, so genügt auch

$$\varphi(\beta, \alpha) = \int_0^1 v^{\alpha-1} (1 - v)^{\gamma-\alpha-1} (1 - x v)^{-\beta} dv$$

der Differentialgleichung, da man unter den angeführten Bedingungen auch im Integrale α und β mit einander vertauschen kann. Somit genügt auch $\frac{\varphi(\alpha, \beta) - \varphi(\beta, \alpha)}{\alpha - \beta}$ der Gleichung. Ist nun $\alpha = \beta + \varepsilon$ und lässt man ε zu Null werden, so folgt:

$$y_2 = \int_0^1 v^{\beta-1} (1 - v)^{\gamma-\beta-1} (1 - x v)^{-\beta} \lim_{\varepsilon=0} \frac{(1-xv)^{-\varepsilon} - v^{+\varepsilon}(1-v)^{-\varepsilon}}{\varepsilon} dv,$$

d. i. $$y_2 = \int_0^1 v^{\beta-1} (1 - v)^{\gamma-\beta-1} (1 - x v)^{-\beta} \log \frac{1 - v}{v(1 - x v)} dv.$$

Analog kann man verfahren, wenn α und β anderen Bedingungen genügen. In unserem Beispiel erhält man somit als vollständiges Integral:

$$z = A \int_0^1 v^{1/2} (1 - v)^{1/2} (1 - x' v)^{-3/2} dv$$

$$+ B \int_0^1 v^{1/2} (1 - v)^{1/2} (1 - x' v)^{-3/2} \log \frac{1 - v}{v(1 - x' v)} dv,$$

also: $$y = A x' \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - x' \sin^2 \varphi)^{-1/2} \cos 2\varphi \, d\varphi$$

$$+ B x'^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - x' \sin^2 \varphi)^{-3/2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \log \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi (1 - x' \sin^2 \varphi)} d\varphi.$$

Die Gleichung, in welcher der Coefficient von $\frac{dy}{dx}$ negativ ist, geht aus der eben behandelten hervor, wenn man in ihr x und x' mit einander vertauscht. Demnach ist für dieselbe:

$$y = A x \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - x \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \cos 2 \varphi \, d \varphi$$

$$+ B x^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - x \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \log \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi \, (1 - x \sin^2 \varphi)} \, d \varphi.$$

(6) Hier ist $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{3}{2}$, $\gamma = 1$. Auch hier findet man nur ein particuläres Integral, nämlich nach (d) in der 2. Aufgabe S. 603:

$$y = \int_0^{\frac{1}{x}} v^{\frac{1}{2}} (1 - v)^{-\frac{3}{2}} (1 - x v)^{\frac{1}{2}} \, d v.$$

Setzt man $v = \frac{u}{x}$, so wird:

$$y = x^{-\frac{3}{2}} \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} (1 - u)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u}{x}\right)^{-\frac{3}{2}} d u$$

und daher:

$$y = x^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cos 2 \varphi \, d \varphi.$$

Das andere particuläre Integral kann man aus (5) erhalten. Setzt man nämlich $y = x^{-\frac{3}{2}} z$ und sodann $x = \frac{1}{\xi}$, so geht die Gleichung in die in (5) behandelte über:

$$\xi (1 - \xi) \frac{d^2 z}{d \xi^2} + (3 - 4 \xi) \frac{d z}{d \xi} - \frac{9}{4} z = 0.$$

Man erhält somit als vollständiges Integral der vorgelegten Differentialgleichung:

$$y = A x^{-\frac{3}{2}} \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} (1 - u)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u}{x}\right)^{-\frac{3}{2}} d u$$

$$+ B x^{-\frac{3}{2}} \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} (1 - u)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u}{x}\right)^{-\frac{3}{2}} \log \frac{1 - u}{u \left(1 - \frac{u}{x}\right)} \, d u,$$

oder

$$y = A\,x^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2\varphi}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cos 2\varphi\, d\varphi$$

$$+ B x^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \cos^2\varphi \left(1 - \frac{\sin^2\varphi}{x}\right)^{-\frac{3}{2}} \log \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi\left(1 - \frac{\sin^2\varphi}{x}\right)}\, d\varphi.$$

Hierin kann man auch x mit x' vertauschen, da durch diese Vertauschung die Differentialgleichung für y nicht geändert wird. (Integrale von theilweise anderer Form siehe bei Glaisher, Quarterly Journal Bd. XX.)

4. Aufgabe. Setzt man in der Legendre'schen Gleichung $x^2 = \xi$, so geht dieselbe über in:

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\xi\right)\frac{dy}{d\xi} + \frac{1}{4}\, n(n+1)\, y = 0.$$

Es ist also hier $\alpha = -\frac{n}{2}$, $\beta = \frac{n+1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}\cdot$ Ist nun $n + 1 > 0$, so ist nach (d) der 2. Aufgabe S. 603:

$$y = \int_0^{\frac{1}{\xi}} v^{\frac{n-1}{2}} (1-v)^{-\frac{n}{2}-1} (1-\xi v)^{\frac{n}{2}}\, dv.$$

Durch die Substitution $v = \frac{1-t}{\xi - t}$ geht dieser Ausdruck über in:

$$y = \int_0^1 t^{\frac{n}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} (\xi - t)^{-\frac{n+1}{2}}\, dt,$$

oder da $\xi = x^2$ ist,

$$y = x^{-n-1} \int_0^1 t^{\frac{n}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{t}{x^2}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt.$$

Ist aber n negativ, so ist nach (c) der 2. Aufgabe:

$$y = \int_1^{\infty} v^{\frac{n-1}{2}} (1-v)^{-\frac{n}{2}-1} (1-\xi v)^{\frac{n}{2}}\, dv.$$

Setzt man hierin $v = \frac{1}{t}$ und sodann wieder $\xi = x^2$, so folgt:

$$y = x^n \int_0^1 t^{-\frac{n+1}{2}} (1-t)^{-\frac{n+2}{2}} \left(1 - \frac{t}{x^2}\right)^{\frac{n}{2}} dt.$$

Vermischte Aufgaben.

1. Diese Gleichung hat man vollständig bisher nur durch unendliche Reihen oder in der Weise durch bestimmte Integrale gelöst, dass man die erhaltenen zur Berechnung sehr bequemen, weil sehr stark convergirenden Reihen durch bestimmte Integrale summirte. (Vergl. Spitzer, Integr. der Differentialgl. $xy^{(n)}-y=0$, in Grunert's Archiv Bd. 26.) Die Darstellung der Lösung einer Differentialgleichung durch ein bestimmtes Integral hat offenbar nur dann einen Sinn, wenn sich aus der zur Bestimmung der Grenzen dienenden Gleichung solche Werthe für die Grenzen ergeben, dass innerhalb derselben die zu integrirende Function endlich und stetig bleibt oder dass, wenn sie unstetig wird, doch wenigstens das Integral selbst eine Bedeutung, d. h. einen bestimmten endlichen Werth behält. Die Methode des §. 136, auf unser Beispiel angewandt, giebt aber nur eine beschränkte Anzahl diesen Anforderungen genügender particulärer Integrale. Man erhält nämlich

$$y = C\int e^{xt-\frac{a}{(n-1)t^{n-1}}}t^{-n}\,dt$$

und zur Bestimmung der Grenzen die Gleichung: $\left[e^{xt-\frac{a}{(n-1)t^{n-1}}}\right]=0$ oder, wenn man $\frac{1}{v}$ für t setzt:

$$y = C\int e^{\frac{x}{v}-\frac{av^{n-1}}{n-1}}v^{n-2}\,dv,\quad \text{und}\quad \left[e^{\frac{x}{v}-\frac{av^{n-1}}{n-1}}\right]=0.$$

Es seien nun a und x positiv. Dann wird die Gleichung für die Grenzen erfüllt durch $v=\omega_1\infty, \omega_2\infty, \ldots, \omega_{n-1}\infty$, wenn $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ die Wurzeln der Gleichung $\omega^{n-1}=1$ sind. Unter diesen Wurzeln mögen $\omega_1, \ldots, \omega_\lambda$ einen positiven, $\omega_{\lambda+1}, \ldots, \omega_{n-1}$ einen negativen reellen Theil haben; den Fall, dass unter ihnen auch $\pm i$ vorkommen, lassen wir vorläufig ausser Acht. Die Gleichung für die Grenzen wird dann ferner noch erfüllt durch

$$v = -\omega_1\varepsilon, -\omega_2\varepsilon, \ldots, -\omega_\lambda\varepsilon,\ \omega_{\lambda+1}\varepsilon, \ldots, \omega_{n-1}\varepsilon,$$

wo ε eine gegen die Null convergirende unendlich kleine positive Grösse ist. Damit aber die zu integrirende Function innerhalb der Integrationsgrenzen nicht unendlich werde, darf v nicht von der negativen Seite der Null auf die positive übertreten, d. h. es dürfen

nicht $\omega_1\infty, \ldots, \omega_\lambda\infty$ als Integrationsgrenzen genommen werden. Man erhält daher hier die $n-\lambda-1$ particulären Integrale:

$$y = C_1 \int_{\omega_{\lambda+1}\varepsilon}^{\omega_{\lambda+1}\infty} e^{\frac{x}{v} - \frac{a v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2}\, dv + \cdots$$

$$+ C_{n-\lambda-1} \int_{\omega_{n-1}\varepsilon}^{\omega_{n-1}\infty} e^{\frac{x}{v} - \frac{a v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2}\, dv,$$

oder:

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{a v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2} \left\{ C_1\, e^{\frac{x}{\omega_{\lambda+1} v}} + \cdots + C_{n-\lambda-1}\, e^{\frac{x}{\omega_{n-1} v}} \right\} dv,$$

und zwar ist dieses Integral als die Grenze zu betrachten, der sich das zwischen den Grenzen ε und ∞ genommene Integral nähert, wenn man ε gegen 0 convergiren lässt. Kommen auch $\pm i$ unter den Wurzeln der Gleichung $\omega^{n-1} = 1$ vor, so hat man zu jenen particulären Integralen noch das eine

$$y = C \int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{\frac{x}{v} - \frac{a v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2}\, dv \quad \text{oder} \quad y = C' \int_0^\infty e^{-\frac{a v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2} \cos \frac{x}{v}\, dv$$

hinzuzufügen. — Ist x negativ, so hat man statt der Wurzeln mit negativem reellen Theile diejenigen mit positivem reellen Theile in ähnlicher Weise wie vorher als Grenzen zu verwenden. — Analoge Formeln erhält man, wenn a negativ ist; nur hat man dann für $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ die Wurzeln der Gleichung $\omega^{n-1} = -1$ zu nehmen. In jedem Falle erhält man aber auf diesem Wege nur eine beschränkte Anzahl einwurfsfreier particulärer Integrale.

2. Nach §. 136 wird:

$$y = \int e^{xt} (t^2 + b^2)^{\frac{a}{2} - 1}\, dt,$$

wenn die Grenzen aus der Gleichung bestimmt werden:

$$\left[e^{xt} (t^2 + b^2)^{\frac{a}{2}}\right] = 0.$$

Ist a positiv, so wird diese Gleichung bei positiven Werthen von x erfüllt durch $t = -\infty$, $t = \pm bi$, bei negativen Werthen von x durch $t = +\infty$, $t = \pm bi$. Die linke Seite nimmt ferner für $t = 0$ den von x unabhängigen Werth b^a an. Wir erhalten daher bei positiven Werthen von x für y den Ausdruck:

$$y = C_1 \int_0^{bi} e^{xt}(t^2+b^2)^{\frac{a}{2}-1} dt + C_2 \int_0^{-bi} e^{xt}(t^2+b^2)^{\frac{a}{2}-1} dt$$

$$+ C_3 \int_0^{-\infty} e^{xt}(t^2+b^2)^{\frac{a}{2}-1} dt,$$

wo die Constanten C_1, C_2, C_3 durch die Relation $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ verbunden sind. Setzt man im ersten Integral $t = ui$, im zweiten $t = -ui$ und ersetzt dann die Exponentialgrössen durch trigonometrische Functionen, so findet man mit Rücksicht auf $C_1 + C_2 + C_3 = 0$:

$$y = \int_0^{b} (b^2-u^2)^{\frac{a}{2}-1} (C \cos ux + C_3 \sin ux)\, du$$

$$+ C_3 \int_0^{-\infty} e^{ux}(b^2+u^2)^{\frac{\;}{2}-1} du,$$

wo $C = (C_1 - C_2)i$ ist. Für $x < 0$ hat man im letzten Integral statt $-\infty$ zu setzen $+\infty$.

3. Diese Gleichungen sind Specialfälle der Gleichung in Nr. 1. In Uebereinstimmung mit der dortigen Auseinandersetzung erhält man für die Gleichung $x \frac{d^3y}{dx^3} - y = 0$ das eine particuläre Integral:

$$y = C \int_{-\infty i}^{+\infty i} v e^{\frac{x}{v} + \frac{1}{2}v^2} dv \text{ oder } y = C' \int_0^{\infty} v e^{-\frac{1}{2}v^2} \sin \frac{x}{v}\, dv,$$

und für die Gleichung $x \frac{d^3y}{dx^3} + y = 0$ ebenso das eine Integral:

$$y = C \int_0^{\mp\infty} v e^{\frac{x}{v} - \frac{1}{2}v^2} dv,$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem x positiv oder negativ ist. (Ueber das vollständige Integral siehe Grunert's Archiv Bd. 26, S. 61.)

4. Nach §. 142 kann man, vorausgesetzt, dass n nicht zwischen 0 und -4 liegt, als vollständiges Integral der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = c^2 x^n y$ den folgenden Ausdruck nehmen:

$$y = A\int_0^1 (1-p^2)^{-\frac{n+4}{2n+4}} cosh\left(\frac{2cp}{n+2}x^{\frac{n}{2}+1}\right) dp$$

$$+ A' x \int_0^1 (1-p^2)^{-\frac{n}{2n+4}} cosh\left(\frac{2cp}{n+2}x^{\frac{n}{2}+1}\right) dp.$$

Setzt man hierin mci für c, ferner $2m-2$ für n, so dass m nicht zwischen $+1$ und -1 liegen darf, und endlich $p = sin\,\varphi$, so erhält man als vollständiges Integral der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + m^2c^2x^{2m-2}y = 0$$

den Ausdruck:

$$y = C_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\,(cx^m\,sin\,\varphi)\,cos^{-\frac{1}{m}}\varphi\,d\varphi$$

$$+ C_2 x \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\,(cx^m\,sin\,\varphi)\,cos^{\frac{1}{m}}\varphi\,d\varphi.$$

5. Durch die Substitution $y = x^{n+1}u$ geht die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} \pm a^2y = \frac{n(n+1)}{x^2}y$ in die folgende über:

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + 2(n+1)\frac{du}{dx} \pm a^2xu = 0.$$

Für die Gleichung mit dem oberen Zeichen kann man ein particuläres Integral unmittelbar aus der Aufgabe Nr. 2 entnehmen, wenn man daselbst in dem Ausdruck für y die Constante $C_3 = 0$ setzt. Man erhält so

$$u = \int_0^a (a^2-v^2)^n\,cos\,xv\,dv \text{ oder } u = \int_{-a}^{+a} (v^2-a^2)^n\,cos\,xv\,dv.$$

Für die Gleichung mit dem unteren Zeichen entnimmt man aus den Untersuchungen in §. 112 das particuläre Integral:

$$u = B\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{n+1} e^{-ax}.$$

Nun ist:

$$\int_0^\infty \frac{cos\,av}{x^2+v^2}\,dv = \frac{\pi}{2x}e^{-ax},$$

vorausgesetzt, dass a und x positiv sind. Differentiirt man diese Formel n-mal nach x^2, so findet man:

$$\int_0^\infty \frac{\cos a v}{(x^2+v^2)^{n+1}}\, d v = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{a\, n!\, 2^n} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^{n+1} e^{-a x},$$

und demnach ist:

$$u = B' \int_0^\infty (x^2+v^2)^{-n-1} \cos a v\, d v.$$

6. Setzt man in die gegebene Gleichung den Werth

$$y = \int_g^h Z \psi(z x)\, d z$$

ein, so erhält man:

$$\int_g^h \psi^{(n+1)}(z x)\, Z z^{n+1}\, d z - x^m \int_g^h \psi'(z x)\, Z z\, d z$$

$$- m\, x^{m-1} \int_g^h \psi(z x)\, Z\, d z = 0.$$

Integrirt man das mittlere Integral einmal partiell, bestimmt sodann ψ aus der Gleichung $\psi^{(n+1)}(z x) = (z x)^{m-1} \psi(z x)$, so wird die Gleichung:

$$-\left[\psi(z x)\, Z z\right]_g^h + \int_g^h \left\{ z \frac{dZ}{d z} - (m-1) Z + z^{m+n} Z \right\} \psi(z x)\, d z = 0,$$

und diese ist erfüllt, wenn

$$\left[\psi(z x)\, Z z\right]_g^h = 0 \text{ und } z \frac{d Z}{d z} - (m-1) Z + z^{m+n} Z = 0$$

ist. Aus letzterer folgt:

$$Z = C z^{m-1} e^{-\frac{z^{m+n}}{m+n}}$$

und somit:

$$y = C \int_g^h z^{m-1} e^{-\frac{z^{m+n}}{m+n}} \psi(z x)\, d z,$$

wo sich die Grenzen bestimmen aus der Gleichung

$$\left[\psi(z x)\, z^m e^{-\frac{z^{m+n}}{m+n}}\right]_g^h = 0.$$

Ist daher $m > 0$, so kann man $g = 0$ und $h = \infty$ nehmen, vorausgesetzt, dass $\psi(zx)$ für diese Werthe endlich bleibt. Die Gleichung $\psi^{(n+1)}(u) = u^{m-1}\psi(u)$ kann man aber nach einer von Kummer im 19. Bande von Crelle's Journal angegebenen Methode durch vielfache Integrale integriren. (Vergl. auch Wantzel in Comptes rendus hebd. Bd. 17.) Da die Gleichung

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = x^m \frac{dy}{dx} + m x^{m-1} y$$

durch einmalige Differentiation der Gleichung $\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y$ entstanden ist, so stellt das vollständige Integral der ersten Gleichung auch zugleich das der letzten dar, wofern nur zwischen den $n+1$ willkürlichen Constanten desselben eine gewisse Relation besteht. Sind z. B. ω, ω_1, ω_2 die drei Wurzeln der Gleichung $\lambda^3 = 1$ und ist $\psi(x) = Ce^{\omega x} + C_1 e^{\omega_1 x} + C_2 e^{\omega_2 x}$ das vollständige Integral der Gleichung $\frac{d^3 y}{dx^3} = y$, so ist

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{z^3}{3}} (Ce^{\omega xz} + C_1 e^{\omega_1 xz} + C_2 e^{\omega_2 xz})\, dz$$

das vollständige Integral von $\frac{d^3 y}{dx^3} = x\frac{dy}{dx} + y$, und daher auch von $\frac{d^2 y}{dx^2} = xy$, falls nur im letzteren Falle die Constanten C, C_1, C_2 der Relation genügen: $C\omega^2 + C_1\omega_1^2 + C_2\omega_2^2 = 0$.

7. Der leichteren Rechnung wegen setze man zunächst $z = \frac{x}{v}$, so wird $y = x\int_0^{x^{1/2}} e^{-v^{2n} - \left(\frac{x}{v}\right)^{2n}} v^{-2}\, dv$. Hieraus folgt:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4n^2 x^{2n-2} y = 4n^2 x^{4n-1} \int_0^{x^{1/2}} e^{-v^{2n} - \left(\frac{x}{v}\right)^{2n}} v^{-4n-2}\, dv$$

$$- 4n^2 x^{2n-1} \int_0^{x^{1/2}} e^{-v^{2n} - \left(\frac{x}{v}\right)^{2n}} v^{-2}\, dv$$

$$- 2n(2n+1)x^{2n-1} \int_0^{x^{1/2}} e^{-v^{2n} - \frac{x^{2n}}{v^{2n}}} v^{-2n-2}\, dv$$

$$- 2n x^{n-3/2} e^{-2x^n} + \frac{1}{4} e^{-2x^n} x^{-3/2}.$$

Wendet man auf das erste Integral die partielle Integration an, so folgt:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - 4 n^2 x^{2n-2} y = 2 n x^{2n-1} \int_0^{x^{1/2}} \frac{d\, e^{-v^{2n} - \frac{x^{2n}}{v^{2n}}}}{v^{2n+1}}$$

$$- 2 n (2 n + 1) x^{2n-1} \int_0^{x^{1/2}} e^{-v^{2n} - \left(\frac{x}{v}\right)^{2n}} v^{-2n-2} d v$$

$$+ \frac{1}{4} e^{-2 x^n} x^{-3/2} - 2 n x^{n - 3/2} e^{-2 x^n}.$$

Integrirt man hier das erste Integral wiederum partiell, so ergiebt sich:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - 4 n^2 x^{2n-2} y = \frac{1}{4} e^{-2 x^n} x^{-3/2}.$$

8. Setzt man $U_0 = a_2 u^2 + a_1 u + a_0$, $U_1 = b_2 u^2 + b_1 u + b_0$, ferner $log\,(U_1 V) = \int \frac{U_0}{U_1} d u$, so ist ein particuläres Integral der gegebenen Gleichung bestimmt durch $y = \int e^{ux} V d u$, wenn die Grenzen der Gleichung $[e^{ux} U_1 V] = 0$ genügen. Substituirt man, um ein zweites particuläres Integral zu erhalten, $y = (a_2 + b_2 x)^n z$ und bestimmt n durch die Gleichung: $(n - 1) b_2^2 = a_2 b_1 - a_1 b_2$, so geht die ursprüngliche Gleichung über in:

$$(a_2 + b_2 x) \frac{d^2 z}{d x^2} + (2 n b_2 + a_1 + b_1 x) \frac{d z}{d x} + (n b_1 + a_0 + b_0 x) z = 0,$$

und dieser wird genügt durch: $z = \int e^{ux} V U_1^n d u$, wo die Grenzen und der Werth von V dieselben sind wie vorher. Mithin ist das vollständige Integral der gegebenen Gleichung:

$$y = \int e^{ux} V \{ C_1 + C_2 (a_2 + b_2 x)^n U_1^n \} d u.$$

Ist nun $b_2^2 = a_1 b_2 - a_2 b_1$, so ist $n = 0$, und die beiden particulären Integrale werden identisch. Setzt man aber

$$C_2 = A + \frac{B}{n},\quad C_1 = - \frac{B}{n},$$

so kann man y in der Form schreiben:

$$y = \int e^{ux} V \left\{ A (a_2 + b_2 x)^n U_1^n + B \frac{(a_2 + b_2 x)^n U_1^n - 1}{n} \right\} d u,$$

und dies geht für $n = 0$ über in:

$$y = \int e^{ux} V \{ A + B\, log\, [(a_2 + b_2 x) U_1] \} d u.$$

9. Bestimmt man k aus der Gleichung:

$$m^2 k^2 + (A_1 - 1) k m + A_0 = 0,$$

so geht die Differentialgleichung über in:

$$m^2 t \frac{d^2 z}{d t^2} + \{2 m^2 k + m(m-1) + m A_1 + m B_1 t\} \frac{d z}{d t}$$
$$+ (m k B_1 + B_0 + C_0 t) z = 0.$$

10. Das particuläre Integral ist der Werth von

$$y = \frac{1}{(\vartheta + a_1)(\vartheta + a_2)\dots(\vartheta + a_n)} f(x).$$

Es ist also, da nach §. 36 $\frac{1}{\vartheta + n} f(x) = x^{-n} \frac{1}{\vartheta} x^n f(x)$ ist:

$$y = \left(x^{-a_1} \frac{1}{\vartheta} x^{a_1}\right)\left(x^{-a_2} \frac{1}{\vartheta} x^{a_2}\right) \cdots \left(x^{-a_n} \frac{1}{\vartheta} x^{a_n}\right) f(x).$$

Ferner ist:

$$\frac{1}{\vartheta} x^{a_n} f(x) = \int_0^x \xi^{a_n - 1} f(\xi)\, d\xi.$$

Setzt man hierin $\xi = x\theta_n$, so erhält man:

$$\frac{1}{\vartheta} x^{a_n} f(x) = x^{a_n} \int_0^1 f(\theta_n x)\, \theta_n^{a_n - 1}\, d\theta_n,$$

somit:

$$y = \left(x^{-a_1} \frac{1}{\vartheta} x^{a_1}\right)\left(x^{-a_2} \frac{1}{\vartheta} x^{a_2}\right) \cdots \times$$
$$\left(x^{-a_{n-1}} \frac{1}{\vartheta} x^{a_{n-1}}\right) \int_0^1 f(\theta_n x)\, \theta_n^{a_n - 1}\, d\theta_n.$$

Die wiederholte Anwendung derselben Formeln führt dann zu dem particulären Integral in der angegebenen Form.

11. Nach Nr. 8, S. 243 genügt die Reihe

$$y_1 = 1 + \frac{\alpha\beta\gamma}{1\,.\,\vartheta\,\varepsilon} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)\gamma(\gamma+1)}{1\,.\,2\,.\,\vartheta(\vartheta+1)\varepsilon(\varepsilon+1)} x^2 + \cdots$$

als particuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung. Nun ist:

$$\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)},$$

wenn Γ die Euler'sche Gammafunction bezeichnet. Demnach ist das allgemeine Glied der Reihe:

$$\frac{\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\beta+n)\,\Gamma(\gamma+n)\,\Gamma(\vartheta)\,\Gamma(\varepsilon)}{n!\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\vartheta+n)\,\Gamma(\varepsilon+n)}\,x^n$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\vartheta)\,\Gamma(\varepsilon)\,.\,x^n}{n!\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\vartheta-\beta)\,\Gamma(\varepsilon-\gamma)}\times$$

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 u^{\beta+n-1}(1-u)^{\vartheta-\beta-1}\,v^{\gamma+n-1}(1-v)^{\varepsilon-\gamma-1}\,du\,dv,$$

wo $\vartheta>\beta>0$ und $\varepsilon>\gamma>0$ sein muss. Setzt man dies ein, so kann man schreiben:

$$y_1=\frac{\Gamma(\vartheta)\,\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\vartheta-\beta)\,\Gamma(\varepsilon-\gamma)}\times$$

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\vartheta-\beta-1}\,v^{\gamma-1}(1-v)^{\varepsilon-\gamma-1}\,du\,dv\times$$

$$\left(1+\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{uvx}{1}+\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{u^2v^2x^2}{2!}+\cdots\right).$$

Die unter dem Integralzeichen stehende Reihe ist aber gleich $(1-uvx)^{-\alpha}$; mithin ist, wenn die Constante vor dem Integralzeichen weggelassen wird, ein particuläres Integral dargestellt durch:

$$y_1=\int_0^1\!\!\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\vartheta-\beta-1}\,v^{\gamma-1}(1-v)^{\varepsilon-\gamma-1}(1-uvx)^{-\alpha}\,du\,dv.$$

Ebenso kann man, wenn ausserdem noch $2-\vartheta>\beta+1-\vartheta>0$ und $2-\varepsilon>\gamma+1-\varepsilon>0$ ist, die beiden anderen in Nr. 8, S. 243 erwähnten Reihen durch bestimmte Integrale summiren, und es ist:

$$y_2=x^{1-\vartheta}\int_0^1\!\!\int_0^1 u^{\beta-\vartheta}(1-u)^{-\beta}\,v^{\gamma-\vartheta}(1-v)^{\varepsilon-\gamma-1}(1-uvx)^{\vartheta-\alpha-1}\,du\,dv,$$

und

$$y_3=x^{1-\varepsilon}\int_0^1\!\!\int_0^1 u^{\beta-\varepsilon}(1-u)^{\vartheta-\beta-1}\,v^{\gamma-\varepsilon}(1-v)^{-\gamma}(1-uvx)^{\varepsilon-\alpha-1}\,du\,dv.$$

Die Summe der drei mit je einer willkürlichen Constanten multiplicirten Ausdrücke y_1, y_2, y_3 giebt das vollständige Integral der gegebenen Gleichung.

12. Die Gleichung $\frac{d^3 y}{d x^3} + 8 \lambda x^3 y = 0$ geht durch die Substitution $x^2 = t$ in die folgende über:

$$t \frac{d^3 y}{d t^3} + \frac{3}{2} \frac{d^2 y}{d t^2} + \lambda t y = 0;$$

somit ist nach §. 136: $y = A \cdot \int \frac{e^{ut} \, du}{(u^3 + \lambda)^{1/2}}$, wo die Grenzen zu bestimmen sind aus der Gleichung: $[e^{ut} (u^3 + \lambda)^{1/2}] = 0$. Die Wurzeln dieser Gleichung sind erstens die Werthe α, β, γ, für welche $u^3 + \lambda = 0$ ist, und ferner $u = \mp \infty$, je nachdem t positiv oder negativ ist. Nimmt man aber 0 als untere Grenze, setzt also

$$y = A \int_0^{\alpha} \frac{e^{u x^2} \, du}{(u^3 + \lambda)^{1/2}} + B \int_0^{\beta} \frac{e^{u x^2} \, du}{(u^3 + \lambda)^{1/2}} + C \int_0^{\gamma} \frac{e^{u x^2} \, du}{(u^3 + \lambda)^{1/2}}$$
$$+ D \int_0^{-\infty} \frac{e^{u x^2} \, du}{(u^3 + \lambda)^{1/2}},$$

so findet man durch Einsetzung dieses Ausdrucks in die Gleichung $\frac{d^3 y}{d x^3} + 8 \lambda x^3 y = b x$, dass zwischen den Constanten A, B, C, D die Relation bestehen muss:

$$A + B + C - D + \frac{b}{8 \sqrt{\lambda}} = 0.$$

13. Durch die Substitution $z^m = t$ geht die Gleichung über in:

$$t \frac{d^2 y}{d t^2} + \frac{m - 1}{m} \frac{d y}{d t} - b y = 0.$$

Daher ist nach §. 136: $y = C \int e^{ut + \frac{b}{u}} u^{-\frac{m+1}{m}} du$, wenn die Grenzen bestimmt werden aus: $\left[e^{tu + \frac{b}{u}} u^{\frac{m-1}{m}} \right] = 0$. Setzt man hierin $u = - \frac{b}{x^m}$, so wird $y = C' \int e^{-x^m - b \frac{t}{x^m}} dx$ und die Gleichung zur Bestimmung der Grenzen geht über in: $[e^{-x^m - b t x^{-m}} . x^{-m+1}] = 0$. Dieselbe wird erfüllt durch $x = 0$ und $x = \infty$, wenn $b t > 0$ ist.

Daher ist $y = C' \int_0^{\infty} e^{-x^m - b z^m x^{-m}} \, dx$.

14. Es ist $\int_0^\pi \frac{d\varphi}{a - b\cos\varphi} = \pi (a^2 - b^2)^{-1/2}$, vorausgesetzt, dass, wenn $\frac{a}{b}$ reell ist, der absolute Betrag von $\frac{a}{b}$ nicht kleiner oder gleich 1 ist. Setzt man hier $a = 1 - \alpha x$, $b = \alpha (x^2 - 1)^{1/2}$, so wird:

$$\pi (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-1/2} = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{1 - \alpha x - \alpha \cos\varphi (x^2 - 1)^{1/2}}.$$

Entwickelt man beide Seiten nach Potenzen von α und setzt die Coefficienten gleicher Potenzen von α einander gleich, so folgt:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \{x + \cos\varphi (x^2 - 1)^{1/2}\}^n \, d\varphi.$$

Durch die Substitution $\cos\varphi = \frac{x \cos\eta - (x^2 - 1)^{1/2}}{x - \cos\eta (x^2 - 1)^{1/2}}$ geht dies über in: $P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\eta}{\{x - \cos\eta (x^2 - 1)^{1/2}\}^{n+1}}$. Diese Formel gilt, obwohl der Ableitung nach n eine ganze positive Zahl sein müsste, auch für beliebige n. Für $n = -\frac{1}{2}$ ist daher:

$$P_{-1/2}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\eta}{\{x - \cos\eta \, (x^2 - 1)^{1/2}\}^{1/2}}.$$

Hierfür kann man, wenn man $\pi - \eta$ für η setzt, auch schreiben:

$$P_{-1/2}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\eta}{\{x + \cos\eta \, (x^2 - 1)^{1/2}\}^{1/2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \{x + (x^2 - 1)^{1/2}\}^{-1/2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\eta}{\left\{1 - \frac{2 (x^2 - 1)^{1/2}}{x + (x^2 - 1)^{1/2}} \sin^2\eta\right\}^{1/2}}.$$

Setzt man hierin zunächst $x = \frac{1 + \xi}{1 - \xi}$, so wird:

$$P_{-1/2}\left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi}\right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}\right)^{1/2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\eta}{\left\{1 - \left(\frac{2\sqrt[4]{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}\right)^2 \sin^2\eta\right\}^{1/2}}.$$

Die Anwendung der Landen'schen Substitution

$$tang\,\vartheta = \frac{sin\,2\,\eta}{\sqrt{\xi} + cos\,2\,\eta}$$

ergiebt nun sogleich das Resultat:

$$P_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right) = \frac{2}{\pi}(1-\xi)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{(1-\xi\,sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}.$$

15. Bei der Annahme $y = \int e^{tx}\,T\,dt$ bestimmt sich T durch die Gleichung:

$$c\,(t-a)\frac{d^2T}{dt^2} + (t^2 - a^2 + 2\,c)\frac{dT}{dt} + (3\,t + a)\,T = 0.$$

Durch Multiplication mit $t - a$ wird die Gleichung exact und giebt nach einmaliger Integration:

$$c\,\frac{dT}{dt} + (t+a)\,T = \frac{A}{(t-a)^2}.$$

Wir suchen zunächst ein particuläres Integral der gegebenen Gleichung und setzen daher $A = 0$. Dann ist $T = e^{-\frac{1}{2c}(t+a)^2}$, also $y = \int e^{tx - \frac{1}{2c}(t+a)^2}\,dt$, wenn die Grenzen bestimmt werden aus der Gleichung: $\left[e^{xt - \frac{1}{2c}(t+a)^2}\right] = 0$. Vorausgesetzt, dass c positiv ist, sind $t = +\infty$ und $t = -\infty$ die Werthe, durch welche diese Gleichung befriedigt wird. Demnach ist: $y = C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx - \frac{1}{2c}(t+a)^2}\,dt$, oder $y = C_1\,e^{\frac{c}{2}\left(x - \frac{a}{c}\right)^2}$. Nach §. 65 erhält man sodann als vollständiges Integral der gegebenen Gleichung:

$$y = e^{\frac{c}{2}\left(x-\frac{a}{c}\right)^2}\left(C_1 + C_2\int e^{-\frac{c}{2}\left(x-2\frac{a}{c}\right)^2} x\,dx\right).$$

VIII. Capitel.

§. 146.

1. Aufgabe. Setzt man $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + ex + f$, so ist das allgemeine Integral der Gleichung $\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{f(y)}} = 0$

nach §. 146 dargestellt durch:

$$\left(\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(y)}}{x-y}\right)^2 = C + b(x+y) + a(x+y)^2.$$

Setzt man nun $\frac{1}{x}$ statt x und $\frac{1}{y}$ statt y, so geht $f(x)$ über in $\frac{1}{x^4}X$ und $f(y)$ über in $\frac{1}{y^4}Y$, wo X und Y die in §. 146 angegebene Bedeutung haben. Die Differentialgleichung wird somit wieder $X^{-\frac{1}{2}}dx + Y^{-\frac{1}{2}}dy = 0$, während die Integralgleichung die Form annimmt:

$$\left\{\frac{y^2 X^{\frac{1}{2}} - x^2 Y^{\frac{1}{2}}}{x-y}\right\}^2 = Cx^2y^2 + bxy(x+y) + a(x+y)^2.$$

Zieht man diese von der in §. 146 angegebenen Integralgleichung ab und substituirt man für X und Y ihre Werthe, so gelangt man zur Gleichung $0 = 0$; es sind daher beide Gleichungen identisch.

2. Aufgabe. Wird ganz analog bewiesen wie in §. 146, indem man $p = x + y$, $\frac{dx}{dt} = \frac{X^{\frac{1}{2}}}{y-x}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{Y^{\frac{1}{2}}}{y-x}$ setzt.

3. Aufgabe. $x^2 + y^2 + 2xy(1 - C^2)^{\frac{1}{2}} = C(1 - x^2y^2)$.

4. Aufgabe. Setzt man $x = \xi^2$, $y = \eta^2$, so wird die Gleichung:

$$\frac{d\xi}{\{(1-\xi^2)(1-\lambda\xi^2)\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{d\eta}{\{(1-\eta^2)(1-\lambda\eta^2)\}^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Ferner sei

$$\frac{d\xi}{dt} = \{(1-\xi^2)(1-\lambda\xi^2)\}^{\frac{1}{2}}, \text{ also } \frac{d\eta}{dt} = -\{(1-\eta^2)(1-\lambda\eta^2)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\eta^2\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 - \xi^2\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 = (\eta^2 - \xi^2)(1 - \lambda\xi^2\eta^2).$$

Erhebt man ferner $\frac{d\xi}{dt}$ und $\frac{d\eta}{dt}$ zum Quadrat und differentiirt nach t, so folgt:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -(1+\lambda)\xi + 2\lambda\xi^3, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -(1+\lambda)\eta + 2\lambda\eta^3,$$

also:

$$\eta\frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\frac{d^2\eta}{dt^2} = 2\lambda\xi\eta(\xi^2 - \eta^2).$$

Mithin:

$$\frac{\eta \frac{d^2 \xi}{d t^2} - \xi \frac{d^2 \eta}{d t^2}}{\eta \frac{d \xi}{d t} - \xi \frac{d \eta}{d t}} = -2 \lambda \frac{\xi \eta \left(\eta \frac{d \xi}{d t} + \xi \frac{d \eta}{d t}\right)}{1 - \lambda \xi^2 \eta^2},$$

oder, wenn man integrirt:

$$\eta \frac{d \xi}{d t} - \xi \frac{d \eta}{d t} = A (1 - \lambda \xi^2 \eta^2).$$

Setzt man nun für $\frac{d \xi}{d t}$ und $\frac{d \eta}{d t}$ ihre Werthe ein, und restituirt x und y, so folgt:

$$\{x (1 - y)(1 - \lambda y)\}^{1/2} + \{y (1 - x)(1 - \lambda x)\}^{1/2} = A (1 - \lambda x y).$$

Dieses Verfahren rührt von Darboux her; ein anderes ist von Sturm angegeben worden. (Vergl. Schlömilch's Compendium, Bd. II, S. 327.)

§. 147.

1. Aufgabe. Genau dasselbe Verfahren wie in §. 147 führt auch hier zum Ziel, wenn man u als eine symmetrische Function von x und y voraussetzt, deren einzelne Glieder in Bezug auf x und y von nicht höherer als der zweiten Dimension sind.

2. Aufgabe. Man setze u in der Form voraus:

$$u = A_1 x^2 y^2 + A_2 (x^2 + y^2) + 2 A_3 x y - 1 = 0$$

und verfahre im Uebrigen genau so wie im allgemeineren Falle.

§. 149.

1. Aufgabe. Das Resultat folgt durch unmittelbare Anwendung der am Ende des §. 149 angegebenen allgemeinen Formel.

2. Aufgabe. Setzt man

$$X_1 = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + 0 x^3 + c x^4 + b x^5 + a x^6,$$

und ähnlich für Y_1 und Z_1, so ist die Integralgleichung der beiden Gleichungen

$$\frac{dx}{X^{1/2}} + \frac{dy}{Y_1^{1/2}} + \frac{dz}{Z_1^{1/2}} = 0 \text{ und } \frac{x\,dx}{X_1^{1/2}} + \frac{y\,dy}{Y_1^{1/2}} + \frac{z\,dz}{Z_1^{1/2}} = 0$$

nach der 1. Aufgabe dargestellt durch:

$$\left\{\frac{(y-z)X_1^{1/2}+(z-x)Y_1^{1/2}+(x-y)Z_1^{1/2}}{(x-y)(y-z)(z-x)}\right\}^2$$
$$=C+b(x+y+z)+a(x+y+z)^2.$$

Setzt man nun $\frac{1}{x}$ statt x, ebenso $\frac{1}{y}$ für y und $\frac{1}{z}$ für z, so geht X_1 über in $\frac{1}{x^6}X$, wo X dieselbe Bedeutung hat wie in der vorigen Aufgabe, ebenso Y_1 in $\frac{1}{y^6}Y$ und Z_1 in $\frac{1}{z^6}Z$. Die beiden Differentialgleichungen gehen ferner in die in der vorigen Aufgabe angegebenen über, während ihre Integralgleichung durch diese Substitutionen die Form erhält:

$$\left\{\frac{y^2z^2(y-z)X^{1/2}+z^2x^2(z-x)Y^{1/2}+x^2y^2(x-y)Z^{1/2}}{(x-y)(y-z)(z-x)}\right\}^2$$
$$=Cx^2y^2z^2+bxyz(xy+yz+zx)+a(xy+yz+zx)^2.$$

§. 153.

2. Aufgabe.

(1) $xy+yz+zx=C.$

(2) $\frac{x}{y}-\log z=C.$

(3) $x-\frac{z}{y+a}=C.$

(4) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=h^2$, wo b die willkürliche Constante ist.

(5) $x^2y^2+ax^4z^2+y^3+z^4+(y^2+z^2)^{1/2}=C.$

(6) $\frac{y(x+z)}{y+z}=C.$

(7) $\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}=C.$

(8) $e^{x^2}(x+y+z^2)=C.$

(9) $x^2+xy^2+x^2z-u=C.$

§. 154.

2. Aufgabe. Aus der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

folgt:

$$dz = -c\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}\right).$$

Setzt man dies in die Gleichung

$$x\,dx + y\,dy + c\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2} dz = 0$$

ein, so erhält man:

$$x\,dx + y\,dy - c^2\left(\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}\right) = 0,$$

also:

$$\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + \left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)y^2 = C.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die Projectionen der auf dem Ellipsoid liegenden der Differentialgleichung genügenden Curven auf die xy-Ebene ein System von centrischen Kegelschnitten bilden.

3. Aufgabe. Der ersten Gleichung wird genügt durch das System der beiden Gleichungen: $x^2 + y^2 = \varphi(z)$ und

$$\frac{x(x-a)+y(y-b)}{z-c} = \frac{1}{2}\varphi'(z),$$

der zweiten durch das System $y + z\log x + \varphi(z) = 0$ und

$$\frac{y - x\log x}{x} = \varphi'(z).$$

4. Aufgabe. Ist μ der integrirende Factor der Gleichung $P\,dx + Q\,dy = 0$, welche aus der gegebenen Gleichung

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

entsteht, wenn man z zunächst als constant betrachtet, und setzt man

$$\mu(P\,dx + Q\,dy) = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy,$$

so ist die Stammgleichung von der Form $V = \varphi(z)$, und es bleibt nur übrig, $\varphi(z)$ derart zu bestimmen, dass der Gleichung

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

Genüge geschieht. Dazu differentiirt man $V = \varphi(z)$ nach allen drei Veränderlichen und subtrahirt das Resultat von jener Gleichung, nachdem man diese mit μ multiplicirt hat. Dadurch erhält man:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \mu R = \varphi'(z).$$

Durch diese Gleichung, deren linke Seite eine Function von z allein

sein muss, bestimmt sich die Function $\varphi(z)$; ist dies geschehen, so bildet $V = \varphi(z)$ die Stammgleichung von $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$. Untersucht man die Bedingung, unter welcher die Function $\frac{\partial V}{\partial z} - \mu R$ mittelst der Gleichung $V = \varphi(z)$ dargestellt werden kann als blosse Function von z, so gelangt man zu der in §. 152 angegebenen Integrabilitätsbedingung. Daraus folgt, dass man in irgend einem gegebenen Falle nicht erst zu untersuchen braucht, ob diese Bedingungsgleichung stattfindet oder nicht; vielmehr zeigt dies das in §. 153 angegebene Auflösungsverfahren von selbst an.

5. Aufgabe. Die Lösung wird gebildet durch das System der Gleichungen $z - y = \varphi(x)$ und $\frac{y}{x - z} = \varphi'(x)$.

§. 163.

Aufgabe. Diejenigen Bedingungsgleichungen, welche eine bestimmte der Grössen $X_1, X_2, \ldots, X_n$, z. B. X_n, nicht enthalten, können offenbar aus denjenigen abgeleitet werden, in denen X_n wirklich vorkommt. Denn sind λ, μ, ν irgend drei verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, (n-1)$, so kann man aus den drei Gleichungen:

$$X_n\left(\frac{\partial X_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial X_\mu}{\partial x_\lambda}\right) + X_\lambda\left(\frac{\partial X_\mu}{\partial x_n} - \frac{\partial X_n}{\partial x_\mu}\right) + X_\mu\left(\frac{\partial X_n}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial X_\lambda}{\partial x_n}\right) = 0,$$

$$X_n\left(\frac{\partial X_\lambda}{\partial x_\nu} - \frac{\partial X_\nu}{\partial x_\lambda}\right) + X_\lambda\left(\frac{\partial X_\nu}{\partial x_n} - \frac{\partial X_n}{\partial x_\nu}\right) + X_\nu\left(\frac{\partial X_n}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial X_\lambda}{\partial x_n}\right) = 0$$

und

$$X_n\left(\frac{\partial X_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial X_\nu}{\partial x_\mu}\right) + X_\mu\left(\frac{\partial X_\nu}{\partial x_n} - \frac{\partial X_n}{\partial x_\nu}\right) + X_\nu\left(\frac{\partial X_n}{\partial x_\mu} - \frac{\partial X_\mu}{\partial x_n}\right) = 0$$

die Grösse X_n eliminiren, indem man die erste mit $+X_\nu$, die zweite mit $-X_\mu$, die dritte mit $+X_\lambda$ multiplicirt und die Resultate addirt. Man erhält dadurch die Bedingungsgleichung zwischen X_λ, X_μ, X_ν. Solcher Gleichungen, in denen X_n wirklich vorkommt, giebt es aber $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Dies ist somit die Anzahl der von einander unabhängigen Bedingungsgleichungen.

§. 164.

2. Aufgabe.

(1) $xyzu = C.$

(2) $xy + yz + zu + ux = C.$

(3) $\frac{y+z}{u-x} = \frac{z}{u+C}.$

§. 165.

2. Aufgabe.

(1) $(lx + my + nz - C)(l'x + m'y + n'z - C) = 0.$

(2) $(x^2 + y^2 + z^2 - C)(x^2z^2 + y^2z^2 - C) = 0.$

(3) $(x - C)(y - C)(z - C) = 0.$

(4) $\left(\frac{x}{y} - C\right)(z - C) = 0.$

3. Aufgabe. Aus $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ folgt:

$$axdx + bydy = -czdz.$$

Eliminirt man hieraus und aus der gegebenen Differentialgleichung

$$a(b-c)\frac{x}{dx} + b(c-a)\frac{y}{dy} = -c(a-b)\frac{z}{dz}$$

das Differential dz und setzt für cz^2 seinen Werth $1 - ax^2 - by^2$, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{b-c}{a-c}xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(x^2 - \frac{b-c}{a-c}y^2 - \frac{c(a-b)}{ab(a-c)}\right)\frac{dy}{dx} - xy = 0,$$

welche in Nr. 5, S. 490 integrirt wurde. Nach dem daselbst angegebenen Resultate hat man also:

$$Cx^2 - y^2 = \frac{c(a-b)C}{ab\{a - c + (b-c)C\}}.$$

Hätte man y oder x eliminirt, so würde man eine ähnliche Gleichung zwischen x und z resp. zwischen y und z erhalten haben. Dies beweist den Satz, dass die Projectionen der Krümmungslinien der centrischen Flächen zweiten Grades auf die Hauptebenen der letzteren Systeme von coaxialen Kegelschnitten sind. — Auf symmetrischere Weise gelangt man folgendermaassen zur Lösung der Differentialgleichung der Krümmungslinien. Setzt man

$$a = \frac{1}{\alpha},\ b = \frac{1}{\beta},\ c = \frac{1}{\gamma},$$

ferner

$$x^2 = \alpha \frac{\gamma - \beta}{\delta} (u - \alpha)(v - \alpha), \; y^2 = \beta \frac{\alpha - \gamma}{\delta} (u - \beta)(v - \beta),$$

$$z^2 = \gamma \frac{\beta - \alpha}{\delta} (u - \gamma)(v - \gamma),$$

wo $\delta = (\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)$ ist, so wird dadurch der Gleichung $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 1$ genügt und die Differentialgleichung geht über in: $du\,dv = 0$. Es ist somit $u = C$ oder $v = C'$. Die Durchschnitte der Flächen $u = C$ und $v = C'$ mit der Fläche

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 1$$

sind die Krümmungslinien der letzteren. In rechtwinkligen Coordinaten lauten die Gleichungen jener Flächenschaaren:

$$\frac{x^2}{\alpha - u} + \frac{y^2}{\beta - u} + \frac{z^2}{\gamma - u} = 1, \quad \frac{x^2}{\alpha - v} + \frac{y^2}{\beta - v} + \frac{z^2}{\gamma - v} = 1.$$

4. Aufgabe. Die gegebene Differentialgleichung, welche in anderer Form geschrieben lautet:

$$z(x^2 - y^2)\,dx\,dy + x(y^2 - z^2)\,dy\,dz + y(z^2 - x^2)\,dz\,dx = 0,$$

stellt die Gleichung der Krümmungslinien der sogenannten asymptotischen Fläche dritten Grades $xyz = 1$ dar. Eliminirt man hieraus z und dz mit Hülfe von $xyz = 1$ und $yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz = 0$, so findet man die Gleichung:

$$\left(x^3 y^3 - \frac{x}{y}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2(x^2 y^4 - x^4 y^2)\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} - x^3 y^3 = 0,$$

oder aufgelöst nach $\frac{dy}{dx}$ und wenn man $x^4 y^8 - x^6 y^6 + x^8 y^4 - x^2 y^4 - x^4 y^2 + 1 = F$ setzt:

$$\left(\frac{x}{y} - x^3 y^3\right)\frac{dy}{dx} - x^2 y^4 + x^4 y^2 \pm F^{1/2} = 0.$$

Setzt man nun

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 y^2} = 3m, \quad x^2 y^2 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} = 3n,$$

so wird $F = 9x^4 y^4 (m^2 - n)$, ferner

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(x^3 y^3 - \frac{y}{x}\right)x}{\left(\frac{x}{y} - x^3 y^3\right)y} \cdot \frac{dn - y^2\,dm}{dn - x^2\,dm}.$$

Substituirt man diese Werthe in die vorige Gleichung, dividirt dann durch den Coefficienten von dn und macht darauf den Nenner des Coefficienten von dm rational, so erhält man die einfache Gleichung:

$$\{m \pm (m^2 - n)^{1/2}\} \, dm - dn = 0.$$

Multiplicirt man dieselbe mit $3\{m \pm (m^2 - n)^{1/2}\}$, so kann man sie in der Form schreiben:

$$(2m^2 - 3n) \, dm + m(4m \, dm - 3 \, dn) \pm 3(m^2 - n)^{1/2} (2m \, dm - dn) = 0,$$

und dies ist eine exacte Differentialgleichung, deren Integral ist:

$$m(2m^2 - 3n) \pm 2(m^2 - n)^{3/2} = C.$$

Diese Gleichung stellt die Projectionen der beiden Schaaren von Krümmungslinien der Fläche $xyz = 1$ auf die xy-Ebene dar. (Ueber die Fläche $xyz = C$, welche eins von drei Systemen orthogonaler Flächen repräsentirt, vergl. Hoppe, Principien der Flächentheorie, S. 92, und eine Abhandlung von Meth im Osterprogramm 1887 des Königl. Realgymnasiums, Berlin.)

§. 170.

1. Aufgabe. Setzt man zunächst $\lambda_2 = \lambda_1 + \varepsilon$ und entwickelt nach Potenzen von ε, so folgt:

$$\{(A_1 + A_2) f_1(\lambda_1) + (B_1 + B_2) \varphi_1(\lambda_1) + A_2 \varepsilon f_1'(\lambda_1) + B_2 \varepsilon \varphi_1'(\lambda_1)\} e^{\lambda_1 t}$$
$$+ \{A_2 \varepsilon f_1(\lambda_1) + B_2 \varepsilon \varphi_1(\lambda_1)\} t e^{\lambda_1 t} + \cdots = 0.$$

Ist $A_1 + A_2 = A$, $B_1 + B_2 = B$, ferner $A_2 \varepsilon = A'$, $B_2 \varepsilon = B'$ und lässt man dann $\varepsilon = 0$ werden, so muss sein: $A' f_1(\lambda_1) + B' \varphi_1(\lambda_1) = 0$ und $A f_1(\lambda_1) + B \varphi_1(\lambda_1) + A' f_1'(\lambda_1) + B' \varphi_1'(\lambda_1) = 0$.

2. Aufgabe. $e^{\alpha t}(A + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots + A_{r-1} t^{r-1}) \cos \beta t + e^{\alpha t}(B + B_1 t + B_2 t^2 + \cdots + B_{r-1} t^{r-1}) \sin \beta t$.

§. 171.

4. Aufgabe. $x + m_1 y = C_1 e^{(a + m_1 a')^{1/2} t} + C_2 e^{-(a + m_1 a')^{1/2} t}$,

$x + m_2 y = C_1' e^{(a + m_2 a')^{1/2} t} + C_2' e^{-(a + m_2 a')^{1/2} t}$,

wo m_1 und m_2 die Wurzeln der Gleichung $b + m b' = m(a + m a')$ sind.

5. Aufgabe.

(1) $x = e^{-6t}(A \cos t + B \sin t)$; $y = e^{-6t}\{(B + A) \cos t + (B - A) \sin t\}$.

(2) $x = \frac{4}{25} e^t - \frac{1}{36} e^{2t} + (C + C_1 t) e^{-4t};$

$y = \frac{1}{25} e^t + \frac{7}{36} e^{2t} - (C + C_1 + C_1 t) e^{-4t}.$

(3) $x = \frac{19}{3} t - \frac{29}{7} e^t - \frac{56}{9} + C_1 e^{-6t} + C_2 e^{-t};$

$y = -\frac{17}{3} t + \frac{24}{7} e^t + 4 C_1 e^{-6t} - C_2 e^{-t}.$

(4) $x = \frac{31}{25} e^t - \frac{49}{36} e^{2t} + (C_2 - C_1 t) e^{-4t};$

$y = \frac{19}{36} e^{2t} - \frac{11}{25} e^t + (C_1 - C_2 + C_1 t) e^{-4t}.$

(5) $x = e^{-4t} (A \cos t + B \sin t) + \frac{31}{26} e^t - \frac{93}{17};$

$y = e^{-4t} \{(A - B) \sin t - (A + B) \cos t\} - \frac{2}{13} e^t + \frac{6}{17}.$

(6) $x = e^{\alpha t} (C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t)$
$+ e^{-\alpha t} (C_3 \cos \alpha t + C_4 \sin \alpha t)$

$y = e^{\alpha t} \left(\frac{1}{2} C_1 \sin \alpha t - \frac{1}{2} C_2 \cos \alpha t\right)$
$+ e^{-\alpha t} \left(\frac{1}{2} C_4 \cos \alpha t - \frac{1}{2} C_3 \sin \alpha t\right),$

wo $\alpha = 2^{-1/2} m$ ist.

(7) Setzt man $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, und bestimmt α und β aus den Gleichungen: $3\alpha + 4\beta = 3$, $\alpha + \beta = -5$, aus denen $\alpha = -23$, $\beta = 18$ sich ergiebt, so erhält man:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = 3u + 4v, \frac{d^2 v}{dt^2} = -u - v,$$

also die in der 4. Aufgabe behandelte Form. Da jedoch hier die Wurzeln m_1 und m_2 einander gleich, nämlich gleich 2 sind, so eliminirt man besser eine der Grössen u, v, wodurch man erhält:

$$\frac{d^4 u}{dt^4} - 2 \frac{d^2 u}{dt^2} + u = 0,$$

demnach

$u = e^t (C_1 + C_2 t) + e^{-t} (C_3 + C_4 t),$

$v = \frac{1}{2} e^t \{C_2 - C_1 - C_2 t\} - \frac{1}{2} e^{-t} \{C_3 + C_4 + C_4 t\}.$

§. 174.

2. Aufgabe.

(1) $x = \frac{1}{3}t + Ct^{-2}, \quad x + y = C_1 e^t.$

(2) $$x = \frac{C_1 \cos t + C_2 \sin t}{t}, \; y = \frac{C_3 + 2\, C_2 \cos t - 2\, C_1 \sin t}{t^2} + \frac{C_1 \cos t + C_2 \sin t}{t}.$$

4. Aufgabe. Setzt man $3\,m + 2\,n = \lambda\, m,\; 4\,m + 5\,n = \lambda\, n$, so dass sich λ aus der Gleichung $(3 - \lambda)(5 - \lambda) = 8$ bestimmt und daher entweder gleich 1 oder gleich 7 ist, so ist:

$$-\,dx = \frac{m\,dy + n\,dz}{\lambda\,(m\,y + n\,z)},$$

also: $e^{-x} = C\,(m\,y + n\,z)^{\frac{1}{\lambda}}$. Für $\lambda = 1$ ist $m_1 + n_1 = 0$, für $\lambda = 7$ ist $2\,m_2 - n_2 = 0$. Folglich wird: $A\,(y - z) = B\,(y + 2\,z)^{1/7} = e^{-x}$.

6. Aufgabe.

(α) $$x + y = \frac{1}{t^3}\left(C_1 + \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5}\right),\; x + 2\,y = \frac{1}{t^4}\left(C_2 + \frac{t^5}{5} + \frac{t^6}{3}\right).$$

(β) Man findet zunächst sehr leicht: $l^2\,x + m^2\,y + n^2\,z = A$ und $l^2\,x^2 + m^2\,y^2 + n^2\,z^2 = B$. Um die noch fehlende Relation zwischen x, y, z und t zu erhalten, setze man u für $\log t$. Dann ist:

$$l\,\frac{dx}{du} = m\,n\,(y - z),\; m\,\frac{dy}{du} = n\,l\,(z - x),\; n\,\frac{dz}{du} = l\,m\,(x - y).$$

Differentiirt man die ersten beiden nochmals nach u, multiplicirt dann die erste mit m, die zweite mit $-\,l$ und addirt beide Producte, so folgt:

$$l\,m\,\frac{d^2\,(x - y)}{du^2} = n\left\{l^2\,\frac{dx}{du} + m^2\,\frac{dy}{du} - (l^2 + m^2)\,\frac{dz}{du}\right\}.$$

Nun ist aber

$$l^2\,\frac{dx}{du} + m^2\,\frac{dy}{du} + n^2\,\frac{dz}{du} = 0,$$

also $l\,m\,\dfrac{d^2\,(x - y)}{du^2} = -\,n\,(l^2 + m^2 + n^2)\,\dfrac{dz}{du}$ und daher mit Rücksicht auf die dritte Gleichung:

$$\frac{d^2\,(x - y)}{du^2} + (l^2 + m^2 + n^2)\,(x - y) = 0.$$

Es ist somit: $x - y = C_1 \cos \varrho u + C_2 \sin \varrho u$,
wenn $(l^2 + m^2 + n^2)^{1/2} = \varrho$ gesetzt wird. Analog folgt:

$$y - z = C_1' \cos \varrho u + C_2' \sin \varrho u,$$

$$z - x = -(C_1 + C_1') \cos \varrho u - (C_2 + C_2') \sin \varrho u.$$

Zwischen den sechs Constanten A, B, C_1, C_2, C_1', C_2' müssen drei Relationen bestehen. Man findet dieselben folgendermaassen: Es ist: $(l^2 x^2 + m^2 y^2 + n^2 z^2)(l^2 + m^2 + n^2) - (l^2 x + m^2 y + n^2 z)^2 = l^2 m^2 (x - y)^2 + l^2 n^2 (z - x)^2 + m^2 n^2 (y - z)^2$. Mithin: $B \varrho^2 - A^2 = l^2 m^2 (C_1 \cos \varrho u + C_2 \sin \varrho u)^2 + m^2 n^2 (C_1' \cos \varrho u + C_2' \sin \varrho u)^2 + n^2 l^2 \{(C_1 + C_1') \cos \varrho u + (C_2 + C_2') \sin \varrho u\}^2$. Setzt man die Coefficienten von $\cos^2 \varrho u$ und $\sin^2 \varrho u$ gleich $B \varrho^2 - A^2$ und den Coefficienten des Products $2 \cos \varrho u \sin \varrho u$ gleich Null, so erhält man drei Gleichungen zwischen A, B, C_1, C_2, C_1', C_2', so dass drei dieser Grössen willkürlich bleiben.

(γ) Man findet leicht: $lx + my + nz = A$, $x^2 + y^2 + z^2 = B$, ferner auf ganz analogem Wege wie in der vorigen Aufgabe: $mx - ly = C_1 \cos \varrho t + C_2 \sin \varrho t$, wo wieder $(l^2 + m^2 + n^2)^{1/2} = \varrho$ gesetzt ist, ebenso: $ny - mz = C_1' \cos \varrho t + C_2' \sin \varrho t$, $lz - nx = -(C_1 + C_1') \cos \varrho t - (C_2 + C_2') \sin \varrho t$. Auch hier bestehen zwischen den sechs Constanten A, B, C_1, C_2, C_1', C_2' drei Relationen, die man aus der Identität herleitet:

$$(x^2 + y^2 + z^2)(l^2 + m^2 + n^2) - (lx + my + nz)^2 = (mx - ly)^2 + (ny - mz)^2 + (lz - nx)^2.$$

§. 175.

Aufgabe. Man findet zunächst

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = A \text{ und } \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{r} - B.$$

Da nun

$$\left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right)^2 = (x^2 + y^2) \left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\} - \left\{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}\right\}^2 = A^2$$

ist, so ergiebt sich hieraus:

$$(1)\ t - t_0 = \int \frac{r\,dr}{\{2\mu r - Br^2 - A^2\}^{1/2}},$$

wo t_0 eine willkürliche Constante ist. Aus der Gleichung

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \frac{r^2}{2\mu r - Br^2 - A^2}$$

folgt ferner:

$$\frac{2\mu}{r} = B + \frac{A^2}{r^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

also durch Differentiation nach t:

$$-\frac{\mu}{r^2} = -\frac{A^2}{r^3} + \frac{d^2 r}{dt^2}.$$

Die gegebenen Gleichungen kann man aber schreiben:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{x}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\mu}{r}\right), \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{y}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\mu}{r}\right);$$

mithin ist:

$$r^2 \frac{d}{dt}\left\{r^2 \frac{d}{dt}\frac{x}{r}\right\} + A^2 \frac{x}{r} = 0.$$

Setzt man noch

$$(2) \quad d\varphi = A\frac{dt}{r^2} = \frac{A\,dr}{r\{2\mu r - Br^2 - A^2\}^{1/2}},$$

so wird

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{x}{r} = 0,$$

daher (3) $\frac{x}{r} = a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi$, ebenso (4) $\frac{y}{r} = a_2 \cos\varphi + b_2 \sin\varphi$, wo $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1$ und $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$ sein muss. Die Gleichungen (1) bis (4) stellen das vollständige Integralsystem dar. — Setzt man $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, so wird:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\varphi}{dt} = A,$$

ferner:

$$\varphi = A\int\frac{dr}{r\{2\mu r - Br^2 - A^2\}^{1/2}}.$$

Die Gleichung (1) giebt r als Function von t, daher findet man aus der letzteren auch φ und daher auch x und y als Functionen von t.

Vermischte Aufgaben.

1. Setzt man

$$\frac{d\vartheta}{(m - n\cos\vartheta)^{1/2}} = \frac{d\varphi}{(m - n\cos\varphi)^{1/2}} = dt,$$

ferner

$$\frac{\vartheta+\varphi}{2}=p,\ \frac{\vartheta-\varphi}{2}=q,$$

so folgt:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=\frac{n}{2}\sin\vartheta,\ \frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{n}{2}\sin\varphi,$$

daher

$$\frac{d^2p}{dt^2}=\frac{n}{2}\sin p\cos q,\ \frac{d^2q}{dt^2}=\frac{n}{2}\cos p\sin q.$$

Andererseits ist:

$$\frac{dp}{dt}=\frac{1}{2}\{(m-n\cos\vartheta)^{1/2}+(m-n\cos\varphi)^{1/2}\},$$

$$\frac{dq}{dt}=\frac{1}{2}\{(m-n\cos\vartheta)^{1/2}-(m-n\cos\varphi)^{1/2}\},$$

somit:

$$\frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt}=\frac{n}{2}\sin p\sin q.$$

Dividirt man die Ausdrücke von $\frac{d^2p}{dt^2}$ und $\frac{d^2q}{dt^2}$ durch diese letzte Gleichung und integrirt dann, so ergiebt sich:

$$\frac{dp}{dt}=\alpha\sin q,\ \frac{dq}{dt}=\beta\sin p,$$

wo α und β willkürliche Constanten sind. Da $\alpha\beta=\frac{n}{2}$ sein muss, so setzen wir $\alpha=\frac{1}{c}\sqrt{\frac{n}{2}}$, $\beta=c\sqrt{\frac{n}{2}}$, so dass wir erhalten:

$$\frac{dp}{dt}=\frac{1}{c}\left(\frac{n}{2}\right)^{1/2}\sin q,\ \frac{dq}{dt}=c\left(\frac{n}{2}\right)^{1/2}\sin p.$$

Hieraus: $\frac{1}{c}\sin q\,dq=c\sin p\,dp$, also $c\cos p-\frac{1}{c}\cos q=\gamma$, wo γ eine neue Constante ist. Um diese zu bestimmen, sei $\vartheta=\delta$ für $\varphi=0$; dann ist $\gamma=\left(c-\frac{1}{c}\right)\cos\frac{\delta}{2}$. Ferner ist:

$$\frac{1}{c}\sqrt{\frac{n}{2}}\sin\frac{\delta}{2}=\frac{1}{2}\{(m-n)^{1/2}+(m-n\cos\delta)^{1/2}\}$$

für $\varphi=0$. Hieraus folgt:

$$\left(\frac{1}{c}-c\right)\sin\frac{\delta}{2}=\left(\frac{2(m-n)}{n}\right)^{1/2}.$$

Also, indem man die Werthe für $\sin\frac{\delta}{2}$ und $\cos\frac{\delta}{2}$ quadrirt und addirt: $\gamma^2 = c^2 + \frac{1}{c^2} - 2\frac{m}{n}$. Setzt man dies ein, so ergiebt sich:

$$2m - n\left(c^2 + \frac{1}{c^2}\right) + n\left(c\cos\frac{\vartheta+\varphi}{2} - \frac{1}{c}\cos\frac{\vartheta-\varphi}{2}\right)^2 = 0.$$

2. In der 4. Aufgabe zu §. 146 ergab sich für die der transcendenten Integralgleichung $F(x_1) + F(x_2) = C$ entsprechende algebraische Integralgleichung die folgende Form:

$$\frac{x_1\{(1-x_2^2)(1-k^2x_2^2)\}^{1/2} + x_2\{(1-x_1^2)(1-k^2x_1^2)\}^{1/2}}{1-k^2x_1^2x_2^2} = A.$$

Für $x_1 = 0$ erhält man $x_2 = A$ und da $F(0) = 0$ ist, so folgt: $C = F(A)$. Schreibt man noch $-x_3$ für A und beachtet man, das $F(-x_3) = -F(x_3)$ ist, so entspricht der Gleichung $F(x_1) + F(x_2) + F(x_3) = 0$ die folgende:

$$-x_3 = \frac{x_1\{(1-x_2^2)(1-k^2x_2^2)\}^{1/2} + x_2\{(1-x_1^2)(1-k^2x_1^2)\}^{1/2}}{1-k^2x_1^2x_2^2}.$$

Hieraus folgt leicht:

$$(1-x_3^2)^{1/2} = \frac{\{(1-x_1^2)(1-x_2^2)\}^{1/2} - x_1x_2\{(1-k^2x_1^2)(1-k^2x_2^2)\}^{1/2}}{1-k^2x_1^2x_2^2},$$

oder in anderer Form geschrieben:

$$x_1x_2\{(1-k^2x_1^2)(1-k^2x_2^2)\}^{1/2} = \{(1-x_1^2)(1-x_2^2)\}^{1/2} - (1-k^2x_1^2x_2^2)(1-x_3^2)^{1/2}.$$

Erhebt man beide Seiten ins Quadrat, so wird:

$$2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + k^2x_1^2x_2^2x_3^2 = 2\{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)\}^{1/2}$$

oder $4(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2) = (2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + k^2x_1^2x_2^2x_3^2)^2$.

3. In Nr. 2 hatten wir die Formel:

$$(1-x_3^2)^{1/2} = \frac{\{(1-x_1^2)(1-x_2^2)\}^{1/2} - x_1x_2\{(1-k^2x_1^2)(1-k^2x_2^2)\}^{1/2}}{1-k^2x_1^2x_2^2}.$$

Ebenso findet man

$$(1-k^2x_3^2)^{1/2} = \frac{\{(1-k^2x_1^2)(1-k^2x_2^2)\}^{1/2} - k^2x_1x_2\{(1-x_1^2)(1-x_2^2)\}^{1/2}}{1-k^2x_1^2x_2^2}.$$

Setzt man den hieraus folgenden Werth von

$$\{(1-k^2x_1^2)(1-k^2x_2^2)\}^{1/2}$$

in die erste Gleichung ein, so ergiebt sich:

$$(1-x_3^2)^{1/2} = \{(1-x_1^2)(1-x_2^2)\}^{1/2} - x_1x_2(1-k^2x_3^2)^{1/2}.$$

Ebenso: $(1-x_1^2)^{1/2} = \{(1-x_2^2)(1-x_3^2)\}^{1/2} - x_2 x_3 (1-k^2 x_1^2)^{1/2}$, und wenn man aus diesen letzten beiden Gleichungen $(1-x_3^2)^{1/2}$ eliminirt, so folgt:

$$(1-k^2 x_1^2)^{1/2} = -\frac{1}{x^3}\left[x_2 (1-x_1^2)^{1/2} + x_1 (1-x_2^2)^{1/2} (1-k^2 x_3^2)^{1/2}\right].$$

Addirt man hierzu den analogen Ausdruck für $(1-k^2 x_2^2)^{1/2}$, so wird:

$$(1-k^2 x_1^2)^{1/2} + (1-k^2 x_2^2)^{1/2}$$
$$= -\frac{1+(1-k^2 x_3^2)^{1/2}}{x_3}\left\{x_1 (1-x_2^2)^{1/2} + x_2 (1-x_1^2)^{1/2}\right\}.$$

Es sei nun $S = E(x_1) + E(x_2)$, also

$$dS = \left(\frac{1-k^2 x_1^2}{1-x_1^2}\right)^{1/2} dx_1 + \left(\frac{1-k^2 x_2^2}{1-x_2^2}\right)^{1/2} dx_2.$$

Ferner ist:

$$\{(1-x_2^2)(1-k^2 x_2^2)\}^{1/2} dx_1 + \{(1-x_1^2)(1-k^2 x_1^2)\}^{1/2} dx_2 = 0.$$

Dividirt man diese Gleichung durch $\{(1-x_1^2)(1-x_2^2)\}^{1/2}$ und addirt sie dann zu der vorigen, so erhält man die Gleichung:

$$dS = \{(1-k^2 x_1^2)^{1/2} + (1-k^2 x_2^2)^{1/2}\}\left(\frac{dx_1}{(1-x_1^2)^{1/2}} + \frac{dx_2}{(1-x_2^2)^{1/2}}\right),$$

oder mit Rücksicht auf die vorher abgeleitete Hülfsformel:

$$dS = -\frac{1+(1-k^2 x_3^2)^{1/2}}{x_3}\{x_1 (1-x_2^2)^{1/2} + x_2 (1-x_1^2)^{1/2}\} \times$$
$$\left\{\frac{dx_1}{(1-x_1^2)^{1/2}} + \frac{dx_2}{(1-x_2^2)^{1/2}}\right\},$$

oder durch Integration:

$$S + C = \frac{1+(1-k^2 x_3^2)^{1/2}}{x_3}\{[(1-x_1^2)(1-x_2^2)]^{1/2} - x_1 x_2\}.$$

Für $x_1 = 0$ wird $x_2 = -x_3$, und $S = E(-x_3) = -E(x_3)$, also $C - E(x_3) = \frac{1+(1-k^2 x_3^2)^{1/2}}{x_3}(1-x_3^2)^{1/2}$, und daher:

$$S + E(x_3) = \frac{1+(1-k^2 x_3^2)^{1/2}}{x_3}\{(1-x_1^2)^{1/2}(1-x_2^2)^{1/2} - x_1 x_2 - (1-x_3^2)^{1/2}\}$$
$$= -k^2 x_1 x_2 x_3,$$

weil $\{(1-x_1^2)(1-x_2^2)\}^{1/2} - (1-x_3^2)^{1/2} = x_1 x_2 (1-k^2 x_3^2)^{1/2}$ ist. Wir erhalten demnach die Gleichung

$$E(x_1) + E(x_2) + E(x_3) = -k^2 x_1 x_2 x_3,$$

vorausgesetzt, dass x_1, x_2, x_3 durch die Relation

$$4(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)=(2-x_1^2-x_2^2-x_3^2+k^2x_1^2x_2^2x_3^2)^2$$

mit einander verbunden sind.

4. Die Entwickelung der Determinante giebt:

$$y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)=0.$$

Setzt man für y_1, y_2, y_3 ihre Werthe in x_1, x_2, x_3 ein und erhebt zur dritten Potenz, so nimmt die Gleichung nach einigen Reductionen die Form an:

$$(1-x_1^3)(1-x_2^3)(1-x_3^3)=(1-x_1x_2x_3)^3.$$

Hieraus folgt durch logarithmische Differentiation:

$$\frac{(x_1^2-x_2x_3)\,dx_1}{1-x_1^3}+\frac{(x_2^2-x_3x_1)\,dx_2}{1-x_2^3}+\frac{(x_3^2-x_1x_2)\,dx_3}{1-x_3^3}=0.$$

Nun lässt sich aber die vorige Gleichung auch in der Form schreiben:

$$\frac{x_1^2-x_2x_3}{(1-x_1^3)^{1/3}}=\frac{x_2^2-x_3x_1}{(1-x_2^3)^{1/3}}=\frac{x_3^2-x_1x_2}{(1-x_3^3)^{1/3}}.$$

Demnach folgt:

$$\frac{dx_1}{(1-x_1^3)^{2/3}}+\frac{dx_2}{(1-x_2^3)^{2/3}}+\frac{dx_3}{(1-x_3^3)^{2/3}}=0.$$

Somit ist die angegebene Determinante in der That ein particuläres Integral dieser Differentialgleichung. Geometrisch ausgedrückt heisst dies: Wenn die Coordinaten dreier Punkte der Curve dritter Ordnung $x^3+y^3=1$ der vorstehenden Differentialgleichung genügen, so liegen die drei Punkte in einer geraden Linie und umgekehrt.

5. Wir betrachten sogleich den allgemeinsten Fall dieser Nummer, nämlich den, wo $X=k+3lx+3mx^2+nx^3$ ist. Nehmen wir vorläufig $n=1$ und ist α eine Wurzel der Gleichung $X=0$, also $X=(x-\alpha)(x^2-2px+q)$, so geht die Gleichung $X^{-2/3}dx+Y^{-2/3}dy=0$ durch die Substitutionen

$$\frac{X}{(x-\alpha)^3}=x_1^3,\quad \frac{Y}{(y-\alpha)^3}=y_1^3$$

über in:

$$\frac{dx_1}{(x_1^3-b^3)^{1/2}}+\frac{dy_1}{(y_1^3-b^3)^{1/2}}=0,$$

wo $b^3=\dfrac{q-p^2}{\alpha^2-2\alpha p+q}$ ist. Das Integral hiervon ist nach §. 146, S. 271 dargestellt durch:

$$\left\{\frac{(x_1^3-b^3)^{1/2}-(y_1^3-b^3)^{1/2}}{x_1-y_1}\right\}^2=x_1+y_1+z_1,$$

wenn z_1 die willkürliche Constante bedeutet. Dasselbe ist symmetrisch in Bezug auf x_1, y_1, z_1, was man erkennt, wenn man es rational macht und den Factor $(x_1-y_1)^2$ weghebt. Demnach kann man dasselbe in den drei verschiedenen Formen schreiben:

$$(x_1+y_1+z_1)\,(x_1-y_1)^2=(X_1^{1/2}-Y_1^{1/2})^2,$$
$$(x_1+y_1+z_1)\,(y_1-z_1)^2=(Y_1^{1/2}-Z_1^{1/2})^2,$$
$$(x_1+y_1+z_1)\,(z_1-x_1)^{1/2}=(Z_1^{1/2}-X_1^{1/2})^2,$$

wo $X_1=x_1^3-b^3$ u. s w. gesetzt ist. Addirt man diese Gleichungen, so findet man:

$$3\,x_1\,y_1\,z_1=3\,b^3+X_1^{1/2}\,Y_1^{1/2}+Y_1^{1/2}\,Z_1^{1/2}+Z_1^{1/2}\,X_1^{1/2}.$$

Setzt man nun zur Abkürzung $\alpha^2-2p\alpha+q=V$, $\alpha-p=P$, so wird $X_1^{1/2}=\frac{P(x-\alpha)+V}{(x-\alpha)\,V^{1/2}}$, und analog für $Y^{1/2}$, und $Z^{1/2}$, ferner ist $x_1=\frac{X^{1/3}}{x-\alpha}$; setzt man diese Werthe ein und erhebt zur dritten Potenz, so folgt:

$$\frac{27\,X\,Y\,Z}{(x-\alpha)^3\,(y-\alpha)^3\,(z-\alpha)^3}$$
$$=\Bigg[3\,\frac{V-P^2}{V}+\frac{P(x-\alpha)+V}{V^{1/2}(x-\alpha)}\cdot\frac{P(y-\alpha)+V}{V^{1/2}(y-\alpha)}$$
$$+\frac{P(y-\alpha)+V}{V^{1/2}(y-\alpha)}\cdot\frac{P(z-\alpha)+V}{V^{1/2}(z-\alpha)}+\frac{P(z-\alpha)+V}{V^{1/2}(z-\alpha)}\cdot\frac{P(x-\alpha)+V}{V^{1/2}(x-\alpha)}\Bigg]^3,$$

oder:

$$27\,V^3\,X\,Y\,Z=[3\,(V-P^2)\,(x-\alpha)\,(y-\alpha)\,(z-\alpha)$$
$$+(x-\alpha)\,\{P(y-\alpha)+V\}\,\{P(z-\alpha)+V\}+(y-\alpha)\,\{P(z-\alpha)+V\}\times$$
$$\{P(x-\alpha)+V\}+(z-\alpha)\,\{P(x-\alpha)+V\}\,\{P(y-\alpha)+V\}]^3.$$

Reducirt man noch den Ausdruck in der eckigen Klammer, so erhält man schliesslich:

$$X\,Y\,Z=\{k+l\,(x+y+z)+m\,(y\,z+z\,x+x\,y)+x\,y\,z\}^3$$

oder, wenn man wieder n von 1 verschieden annimmt,

$$X\,Y\,Z=\{k+l\,(x+y+z)+m\,(y\,z+z\,x+x\,y)+n\,x\,y\,z\}^3$$

als vollständiges Integral der Differentialgleichung

$$X^{-2/3}\,d\,x+Y^{-2/3}\,d\,y=0,$$

wobei dann z die willkürliche Constante bedeutet und

$$Z = k + 3\,l\,z + 3\,m\,z^2 + n\,z^3$$

ist. — Setzt man $l = m = 0$, $k = n = 1$ und $z = a$, so erhält man in $(1 + x^3)(1 + y^3)(1 + a^3) = (1 + x\,y\,a)^3$ das allgemeine Integral von $\frac{d\,x}{(1 + x^3)^{2/3}} + \frac{d\,y}{(1 + y^3)^{2/3}} = 0$, und setzt man $k = J$, $l = -\frac{1}{3}\,I$, $m = 0$, $n = 4$, $z = a$, so ist

$$(4\,x^3 - I\,x + J)\,(4\,y^3 - I\,y + J)\,(4\,a^3 - I\,a + J)$$
$$= \left\{4\,x\,y\,a - \frac{1}{3}\,I\,(x + y + a) + J\right\}^3$$

das allgemeine Integral von

$$\frac{d\,x}{(4\,x^3 - I\,x + J)^{2/3}} + \frac{d\,y}{(4\,y^3 - I\,y + J)^{2/3}} = 0.$$

(Vergl. Mac Mahon u. Cayley in Quarterly Journ. Bd. XIX, Russell, ebenda Bd. XX.)

6. Setzt man in diesen Gleichungen $\sin^2 \vartheta = x_1$, $\sin^2 \varphi = x_2$, $\sin^2 \psi = x_3$, so gehen dieselben über in:

$$\frac{d\,x_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{d\,x_2}{\sqrt{f(x_2)}} + \frac{d\,x_3}{\sqrt{f(x_3)}} = 0$$

und

$$\frac{x_1\,d\,x_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{x_2\,d\,x_2}{\sqrt{f(x_2)}} + \frac{x_3\,d\,x_3}{\sqrt{f(x_3)}} = 0,$$

wo $f(x) = x\,(1 - x)\,(1 - \varkappa\,x)\,(1 - \lambda\,x)\,(1 - \mu\,x)$ gesetzt ist. Nun beweist Richelot im 23. Bd. von Crelle's Journ. den folgenden Satz: Wenn die ganze rationale Function $f(x)$ vom $(2\,n - 1)$ten Grade für $x = \alpha_h$ verschwindet, so wird das System von Differentialgleichungen:

$$\frac{x_1^i\,d\,x_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{x_2^i\,d\,x_2}{\sqrt{f(x_2)}} + \cdots + \frac{x_n^i\,d\,x_n}{\sqrt{f(x_n)}} = 0$$

$(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n - 2)$ vollständig integrirt durch das System Integralgleichungen, welche man aus der Gleichung

$$\sqrt{F\,(\alpha_h)}\left\{\frac{\sqrt{f(x_1)}}{(\alpha_h - x_1)\,F'(x_1)} + \frac{\sqrt{f(x_2)}}{(\alpha_h - x_2)\,F'(x_2)} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{f(x_n)}}{(\alpha_h - x_n)\,F'(x_n)}\right\} = C_h$$

erhält, wenn man statt α_h irgend $n - 1$ Wurzeln der Gleichung

$f(x) = 0$ setzt, durch $F(x)$ den Ausdruck $(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$ und durch C_h die willkürliche Constante bezeichnet. Setzt man nun in unserem Falle einmal $\alpha_h = 0$, sodann $\alpha_h = 1$, so erhält man die Integralgleichungen:

$$\frac{\sqrt{x_2 x_3}\,\sqrt{f(x_1)}}{\sqrt{x_1}\,(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{\sqrt{x_3 x_1}\,\sqrt{f(x_2)}}{\sqrt{x_2}\,(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} + \frac{\sqrt{x_1 x_2}\,\sqrt{f(x_3)}}{\sqrt{x_3}\,(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = A$$

und:

$$\frac{\sqrt{(1 - x_2)(1 - x_3)}\,\sqrt{f(x_1)}}{\sqrt{1 - x_1}\,(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{\sqrt{(1 - x_3)(1 - x_1)}\,\sqrt{f(x_2)}}{\sqrt{1 - x_2}\,(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} + \frac{\sqrt{(1 - x_1)(1 - x_2)}\,\sqrt{f(x_3)}}{\sqrt{1 - x_3}\,(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = B.$$

Restituirt man für x_1, x_2, x_3 ihre Werthe $\sin^2\vartheta$, $\sin^2\varphi$, $\sin^2\psi$, so erhält man die im Texte angegebenen Integralgleichungen. Ist $\varphi = \alpha$, $\psi = \beta$ für $\vartheta = 0$, so wird

$$A = \frac{1}{\sin\alpha\,\sin\beta},\quad B = \frac{\sin 2\beta\,\varDelta\alpha - \sin 2\alpha\,\varDelta\beta}{2\sin\alpha\sin\beta\,(\sin^2\alpha - \sin^2\beta)}.$$

7. (1) Man betrachte entweder zunächst z als constant oder man setze $x = uz$, $y = vz$. Das vollständige Integral ist:

$$\frac{ax - cz}{ay - bz} = C.$$

(2) $(x - y)(x - z)(y - z) = C.$

(3) Man verfahre entweder nach der Regel in §. 153, oder man setze, was einfacher ist, $x = uz$, $y = vz$. Es wird dadurch:

$$\frac{dz}{z} = -\frac{(v^2 + v + 1)\,du + (u^2 + u + 1)\,dv}{(u + v + 1)(uv + u + v)}$$

oder

$$\frac{dz}{z} = \frac{du + dv}{u + v + 1} - \frac{(v + 1)\,du + (u + 1)\,dv}{uv + u + v},$$

somit:

$$\frac{(uv + u + v)\,z}{u + v + 1} = C \text{ oder: } \frac{xy + yz + zx}{x + y + z} = C.$$

8. Für $x = uz$, $y = vz$ geht die Gleichung über in:

$$(u^2 - v^2 + 1)\,du - dv = 0.$$

Derselben genügt als particuläres Integral: $u = v$. Um das vollständige Integral zu erhalten, setze man nach S. 535, Nr. 13 $v = u + w$, dann erhält man:

$$\frac{dw}{du} + 2uw + w^2 = 0,$$

also nach §. 15:

$$\int e^{-u^2} du + C = \frac{1}{w} e^{-u^2} = \frac{z}{y - x} e^{-u^2}.$$

Viel weitläufiger wäre hier die Anwendung der in §. 153 angegebenen Regel gewesen.

9. Multiplicirt man die erste Gleichung mit $2x$, die zweite mit $2y$, die dritte mit $2z$ und setzt man $\varphi = \int_0^t xyz\,dt$, so folgt durch Integration:

$$x^2 = \frac{2(b-c)}{a}(\varphi - \alpha), \quad y^2 = \frac{2(c-a)}{b}(\varphi - \beta),$$

$$z^2 = \frac{2(a-b)}{c}(\varphi - \gamma),$$

wo α, β, γ willkürliche Constanten sind. Hieraus folgt:

$$xyz = \frac{d\varphi}{dt} = \left\{\frac{8(b-c)(c-a)(a-b)}{abc}\right\}^{1/2} \{(\varphi-\alpha)(\varphi-\beta)(\varphi-\gamma)\}^{1/2}.$$

Hierdurch ist φ und somit auch x, y, z als elliptische Functionen von t bestimmt. — Oder man multiplicire die drei Gleichungen einmal resp. mit $2x$, $2y$, $2z$, sodann mit $2ax$, $2by$, $2cz$ und addire dann die Gleichungen der so erhaltenen beiden Gruppen. Durch Integration folgt hieraus:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = A_1, \quad a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = A_2.$$

Berechnet man hieraus y und z und setzt deren Werthe in die erste der gegebenen Gleichungen ein, so folgt:

$$a\frac{dx}{dt} = \left\{\frac{1}{bc}\{A_2 - A_1 c - a(a-c)x^2\}\{A_1 b - A_2 - a(b-a)x^2\}\right\}^{1/2},$$

wodurch x als elliptische Function von t bestimmt ist. Analoge Ausdrücke ergeben sich für $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$. — Oder setzt man endlich:

$$u = \frac{1}{3}\left\{\frac{(a-c)(b-a)}{bc}x^2 + \frac{(b-a)(c-b)}{ca}y^2 + \frac{(c-b)(a-c)}{ab}z^2\right\},$$

so folgt:

$$\frac{d}{dt}\left(u - \frac{(a-c)(b-a)}{bc}\,x^2\right) = 0,$$

daher:

$$u - \frac{(a-c)(b-a)}{bc}\,x^2 = e', \text{ analog: } u - \frac{(b-a)(c-b)}{ca}\,y^2 = e'',$$

$$u - \frac{(c-b)(a-c)}{ab}\,z^2 = e''',$$

wobei e', e'', e''' constante Grössen sind, die nach der Definitionsgleichung von u der Bedingung $e' + e'' + e''' = 0$ genügen. Nun ist aber

$$\frac{du}{dt} = 2\,\frac{(a-c)(b-a)}{bc}\,x\,\frac{dx}{dt} = -\,2\,\frac{(c-b)(b-a)(a-c)}{abc}\,x\,y\,z,$$

demnach:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 4\,(u-e')\,(u-e'')\,(u-e''').$$

Mittelst dieser Gleichung kann man u und sodann auch x, y, z sehr leicht durch elliptische Functionen von t ausdrücken. Die hier behandelten Gleichungen spielen eine Rolle bei dem Problem der Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt.

10. Man löse jede Gleichung nach dem in ihr enthaltenen Differentialquotienten auf und differentiire sodann jede Gleichung nochmals nach t. Setzt man in den erhaltenen Resultaten für die ersten Differentialquotienten die aus den gegebenen Gleichungen folgenden Werthe, so findet man das folgende System von vier Gleichungen:

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + (a^2 + b^2 - an)\,\omega = -\,n\,\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (a^2 + b^2 - an)\,x = n\,\frac{d\omega}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a^2 + b^2 - an)\,y = -\,n\,\frac{dz}{dt},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (a^2 + b^2 - an)\,z = n\,\frac{dy}{dt}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d^4u}{dt^4} + 2\left(a^2 + b^2 - an + \frac{n^2}{2}\right)\frac{d^2u}{dt^2} + (a^2 + b^2 - an)^2\,u = 0,$$

wo u irgend eine der Grössen ω, x, y, z ist. Setzt man zur Abkürzung:

$$\alpha = \frac{n}{2} + \left\{b^2 + \left(a - \frac{n}{2}\right)^2\right\}^{1/2}; \ \beta = \frac{n}{2} - \left\{b^2 + \left(a - \frac{n}{2}\right)^2\right\}^{1/2},$$

so ist: $\omega = A \cos \alpha t + B \sin \alpha t + C \cos \beta t + D \sin \beta t$. Analoge Ausdrücke mit anderen Constanten ergeben sich für x, y, z. Setzt man dieselben in die Differentialgleichungen der zweiten Ordnung ein, so erhält man zwischen den Constanten die Relationen:

$$A_1 = - B, \ B_1 = A, \ C_1 = - D, \ C_1 = C,$$

sowie $$A_3 = - B_2, \ B_3 = A_2, \ C_3 = - D_2, \ D_3 = C_2,$$

wo die Indices 1, 2, 3 resp. zu x, y, z gehören. Setzt man schliesslich die hiernach abgeänderten Werthe von ω, x, y, z in eine der gegebenen Differentialgleichungen ein, so folgt:

$$A_2 = \frac{a - \beta}{b} D, \ B_2 = \frac{a - \beta}{b} C, \ C_2 = \frac{a - \alpha}{b} B, \ D_2 = \frac{a - \alpha}{b} A,$$

somit schliesslich:

$$\omega = A \cos \alpha t + B \sin \alpha t + C \cos \beta t + D \sin \beta t,$$

$$x = - B \cos \alpha t + A \sin \alpha t - D \cos \beta t + C \sin \beta t,$$

$$y = \frac{a - \beta}{b} D \cos \alpha t + \frac{a - \beta}{b} C \sin \alpha t + \frac{a - \alpha}{b} B \cos \beta t + \frac{a - \alpha}{b} A \sin \beta t,$$

$$z = - \frac{a - \beta}{b} C \cos \alpha t + \frac{a - \beta}{b} D \sin \alpha t - \frac{a - \alpha}{b} A \cos \beta t + \frac{a - \alpha}{b} B \sin \beta t.$$

11. Multiplicirt man die erste Gleichung mit ξ, die zweite mit η und addirt die Producte, so folgt:

$$\xi \frac{d^2 u}{dt^2} + \eta \frac{d^2 v}{dt^2} - 2 n^2 (u \xi + v \eta) = 0.$$

Multiplicirt man ferner die erste mit η, die zweite mit $-\xi$ und addirt die Producte, so folgt:

$$\eta \frac{d^2 u}{dt^2} - \xi \frac{d^2 v}{dt^2} + n^2 (u \eta - v \xi) = 0.$$

Man setze nun: $u \xi + v \eta = U$, $u \eta - v \xi = V$, so gehen die erhaltenen Gleichungen über in:

$$\frac{d^2 U}{dt^2} - (a^2 + 2 n^2) U = - 2 a \frac{dV}{dt}$$

und: $$\frac{d^2 V}{dt^2} + (n^2 - a^2) V = 2 a \frac{dU}{dt}.$$

Hieraus folgt, wenn

$$\lambda_1 = \left\{\frac{n^2}{2} - a^2 + \frac{n}{2}(9n^2 - 8a^2)^{1/2}\right\}^{1/2},$$

$$\lambda_2 = \left\{\frac{n^2}{2} - a^2 - \frac{n}{2}(9n^2 - 8a^2)^{1/2}\right\}^{1/2}$$

gesetzt wird:

$$U = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_1 t} + C_3 e^{\lambda_2 t} + C_4 e^{-\lambda_2 t},$$

$$V = D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{-\lambda_1 t} + D_3 e^{\lambda_2 t} + D_4 e^{-\lambda_2 t}.$$

Zwischen den Constanten C und D bestehen vier Relationen, die man findet, wenn man die Werthe von U und V in eine der Differentialgleichungen zweiter Ordnung einsetzt. Man erhält darauf u und v durch die Gleichungen $u = U\xi + V\eta$, $v = U\eta - V\xi$. (Liouville's Journ. II. Série t. I.)

12. Durch Elimination von z aus den beiden gegebenen Gleichungen erhält man:

$$\frac{d^8 y}{dx^8} + (a^2 + 2b)\frac{d^6 y}{dx^6} + (b^2 + 2c)\frac{d^4 y}{dx^4} + 2bc\frac{d^2 y}{dx^2} + c^2 y = 0.$$

13. Aus $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ folgt: $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$, daher aus der zweiten Gleichung: $y\,dy = 2m\,dx$, also $y^2 = 4mx + C$. Die Projectionen der Curvenschaar auf die yz-Ebene erhält man, wenn man x aus der Gleichung $y^2 = 4mx + C$ mittelst der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ eliminirt; also:

$$(y^2 - C)^2 = 16m^2(r^2 - y^2 - z^2).$$

14. Für $dy = 0$ wird die Gleichung $(1 + 2m)x\,dx + z\,dz = 0$. Es ist daher hier $\mu = 2$ und die Lösung wird, da V von y ganz unabhängig, also $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ ist: $(1 + 2m)x^2 + z^2 = \varphi(y)$ nebst $2y(1 - x) = -\varphi'(y)$. — Um diese Methode auf die vorige Aufgabe anzuwenden, sei zunächst $dx = 0$. Die Gleichung ist dann: $y(1 - x)\,dy + z\,dz = 0$, also: $(1 - x)y^2 + z^2 = \varphi(x)$ und $y^2 + 2(1 + 2m)x = -\varphi'(x)$. Diese beiden Gleichungen stimmen resp. mit $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ und $y^2 = 4mx + C$, welche wir in der vorigen Nummer als Lösung erhalten hatten, überein, wenn man $\varphi(x) = r^2 - Cx - (1 + 4m)x^2$, also $\varphi'(x) = -C - 2(1 + 4m)x$ setzt.

15. Setzt man

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} = r,$$

so ist:

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r}\frac{dR}{dr}, \ldots, \frac{\partial R}{\partial x_n} = \frac{x_n}{r}\frac{dR}{dr};$$

somit lassen sich die gegebenen Gleichungen auch schreiben:

$$(1)\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{x_1}{r}\frac{dR}{dr}, \ldots, \frac{d^2 x_n}{dt^2} = \frac{x_n}{r}\frac{dR}{dr}.$$

Hieraus folgt durch Combination von je zwei Gleichungen:

$$x_1 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_1}{dt} = C_{1,2}, \ldots, x_{n-1}\frac{dx_n}{dt} - x_n \frac{dx_{n-1}}{dt} = C_{n-1,n}.$$

Die Summe der Quadrate dieser Gleichungen giebt:

$$\left(x_1 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(x_{n-1}\frac{dx_n}{dt} - x_n \frac{dx_{n-1}}{dt}\right)^2$$

$$= (x_1^2 + \cdots + x_n^2)\left\{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2\right\}$$

$$- \left(x_1 \frac{dx_1}{dt} + \cdots + x_n \frac{dx_n}{dt}\right)^2 = C_{1,2}^2 + \cdots + C_{n-1,n}^2 = A^2.$$

Multiplicirt man aber die gegebenen Gleichungen mit $dx_1, \ldots, dx_n$, addirt sie dann und integrirt, so folgt:

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2 = 2(R + B).$$

Somit aus der vorigen Gleichung:

$$\left(x_1 \frac{dx_1}{dt} + \cdots + x_n \frac{dx_n}{dt}\right)^2 = r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2r^2(R+B) - A^2,$$

also:

$$dt = \frac{r\,dr}{\{2r^2(R+B) - A^2\}^{1/2}},$$

oder

$$(2)\ t + t_0 = \int \frac{r\,dr}{\{2r^2(R+B) - A^2\}^{1/2}}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung kann man ferner jede der Gleichungen (1) in genau derselben Weise transformiren, wie dies S. 316 ausgeführt wurde, und zwar erhält man, wenn man

$$(3)\ A\frac{dt}{r^2} = d\varphi = \frac{A\,dr}{r\{2r^2(R+B) - A^2\}^{1/2}}$$

setzt, für jeden Werth von i:

$$\frac{d^2 \frac{x_i}{r}}{d\varphi^2} + \frac{x_i}{r} = 0$$

und somit (4): $\frac{x_i}{r} = a_i \cos\varphi + b_i \sin\varphi$. Bei der Integration von (3) braucht aus dem auf S. 318 angegebenen Grunde zu φ keine Constante hinzugefügt zu werden. Da ferner $\left(\frac{x_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{r}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n}{r}\right)^2 = 1$, also $\sum a_i^2 = \sum b_i^2 = 1$ und $\Sigma a_i b_i = 0$ sein muss, so treten im Ganzen $2n + 3$ willkürliche Constanten auf, nämlich die Grösssen A^2, B, t_0, a_i, b_i, die durch drei Relationen mit einander verbunden sind. Mithin liefern die Gleichungen (2), (3) und (4), da das Problem $2n$ willkürliche Constanten erfordert, das vollständige System von Integralgleichungen der Differentialgleichungen (1). (Binet in Liouville's Journ. I. Série t. II.)

IX. Capitel.

§. 181.

1. Aufgabe. Specialfall des vollständigen Integrals für $b = 0$, $a = \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

2. Aufgabe. Denkt man sich b als eine Function von a, etwa $b = \vartheta(a)$, und differentiirt man nach a, so ist: $\vartheta'(a) = \log\frac{y}{x}$, d. h. es ist a eine willkürliche Function von $\frac{y}{x}$. Somit ist auch $a \log\frac{x}{y} + \vartheta(a)$ eine willkürliche Function von $\frac{y}{x}$, die wir mit $\log\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ bezeichnen können. Mithin ist $z = y\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung.

3. Aufgabe. $z + xy$ ist das singuläre Integral, denn es ist $a = -y$, $b = -x$.

§. 189.

3. Aufgabe.

$$(1) \quad z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy).$$

(2) $z^2 = xy + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

(3) $x^2 + y^2 + z^2 = y\,\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$.

(4) Aus $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - a(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$ folgt zunächst: $\frac{y}{x} = C$. Setzt man sodann in $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z - a(x^2 + C^2x^2 + z^2)^{1/2}}$ für $\frac{z}{x}$ den Werth v, so wird diese Gleichung: $-a\frac{dx}{x} = \frac{dv}{(1 + C^2 + v^2)^{1/2}}$, mithin $x^{-a} = C_1\{v + (1 + C^2 + v^2)^{1/2}\}$ und schliesslich:

$$x^{a-1}\{z + (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

(5) $\frac{y-b}{z-c} = \varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$. Allgemeine Gleichung der Kegelflächen.

(6) Aus der ersten der Lagrange'schen Gleichungen:

$$\frac{dx}{y^3x - 2x^4} = \frac{dy}{2y^4 - x^3y} = \frac{dz}{9z(x^3 - y^3)}$$

folgt, wenn man die Nenner wegschafft, sodann mit $\frac{1}{x^3y^3}$ multiplicirt und integrirt: $\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} = C$. Ferner wird:

$$(x^3 - y^3)\frac{dx}{x} = (y^3 - 2x^3)\frac{dz}{9z} \text{ und } (x^3 - y^3)\frac{dy}{y} = (2y^3 - x^3)\frac{dz}{9z},$$

also durch Addition beider:

$$-3\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right) = \frac{dz}{z}, \text{ daher } z = \frac{C_1}{x^3y^3}.$$

Somit ist das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung:

$$z = \frac{1}{x^3y^3}\,\varphi\left(\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}\right).$$

(7) $\varphi\left(\frac{\sin x}{\sin z}, \frac{\sin y}{\sin z}\right) = 0$.

(8) Ist

$$\frac{dx}{11x - 6y + 2z} = \frac{dy}{-6x + 10y - 4z} = \frac{dz}{2x - 4y + 6z} = \frac{dt}{t},$$

so wird: $\frac{dt}{t} = \frac{l\,dx + m\,dy + n\,dz}{\lambda(lx + my + nz)}$, also $t = C(lx + my + nz)^{\frac{1}{\lambda}}$,
wenn man l, m, n, λ durch die Gleichungen bestimmt:

$$11\,l - 6\,m + 2\,n = \lambda\,l, \quad -6\,l + 10\,m - 4\,n = \lambda\,m,$$
$$2\,l - 4\,m + 6\,n = \lambda\,n,$$

aus denen folgt:

$$\lambda_1 = 3,\ m_1 = 2\,l_1,\ n_1 = 2\,l_1;\ \lambda_2 = 6,\ l_2 = 2\,m_2,\ n_2 = -2\,m_2;$$
$$\lambda_3 = 18,\ l_3 = 2\,n_3,\ m_3 = -2\,n_3.$$

Mithin:

$$t = C_1(x + 2\,y + 2\,z)^{1/3} = C_2(2\,x + y - 2\,z)^{1/6} = C_3(2\,x - 2\,y + z)^{1/18},$$

und schliesslich:

$$\frac{(x + 2\,y + 2\,z)^6}{2\,x - 2\,y + z} = \varphi\left(\frac{(2\,x + y - 2\,z)^3}{2\,x - 2\,y + z}\right).$$

(9) Aus $\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{z + x_3} = \frac{dx_3}{z + x_2} = \frac{dz}{x_2 + x_3}$

folgt: $\frac{dx_1}{x_1} = -\frac{d(x_2 - x_3)}{x_2 - x_3} = -\frac{d(z - x_2)}{z - x_2} = \frac{d(z + x_2 + x_3)}{2(z + x_2 + x_3)}$,

mithin: $\frac{x_1^2}{z + x_2 + x_3} = \varphi\{x_1(x_2 - x_3),\ x_1(z - x_2)\}$.

5. Aufgabe. Nach der 4. Aufgabe S. 344 war:

$$(z - x_1)^3(z + x_1 + x_2 + x_3) = c_1^3 = \alpha,\ (z - x_2)^3(z + x_1 + x_2 + x_3)$$
$$= c_2^3 = \beta,\ (z - x_3)^3(z + x_1 + x_2 + x_3) = c_3^3 = \gamma.$$

Setzt man hierin $z = 0$ und eliminirt dann aus den drei entstehenden Gleichungen und aus $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 1$ die drei Grössen x_1, x_2, x_3, so folgt: $(\alpha + \beta + \gamma)^{4/3} = -(\alpha^{1/3} + \beta^{1/3} + \gamma^{1/3})$, also:

$$\{(x_1 - z)^3 + (x_2 - z)^3 + (x_3 - z)^3\}^4 = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 - 3\,z}{x_1 + x_2 + x_3 + z}\right)^3.$$

6. Aufgabe.

(1) $z = x_1^n\,\varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right)$, d. h. der Gleichung genügen alle homogenen Functionen $n$ter Ordnung von x_1, x_2, x_3.

(2) $(a - 1)\,z + \frac{x_1 x_2}{x_3} = x_1^a\,\varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right)$.

3) $\varphi(x_1^2 - z^2,\ x_2^2 - z^2,\ x_3^2 - z^2) = 0.$

§. 191.

3. Aufgabe.

(1) Vollständiges Integral:

$$z = a x + (m^2 - a^2)^{1/2} y + c.$$

Das allgemeine Integral erhält man, wenn man aus

$$z = a x + (m^2 - a^2)^{1/2} y + \varphi(a)$$

und $0 = x - a(m^2 - a^2)^{-1/2} y + \varphi'(a)$ die Grösse a eliminirt.

(2) Setzt man $\frac{dz}{z} = dZ$, so folgt:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{1}{a},$$

also $Z = bx + cy + e$, wo $b + c = \frac{1}{a}$ ist. Demnach ist das vollständige Integral: $z = C e^{\frac{y}{a} + b(x-y)}$ Das allgemeine Integral ist: $z = e^{\frac{y}{a}} \varphi(x-y)$, ein singuläres giebt es nicht.

(3) Setzt man $z^{-1/2} dz = dZ$, $\frac{dx}{x} = dX$, $\frac{dy}{y} = dY$, so geht die Gleichung über in:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 = 1,$$

deren vollständiges Integral nach Nr. (1) lautet:

$$Z = a X + (1 - a^2)^{1/2} Y + b.$$

Demnach ist das vollständige Integral der gegebenen Gleichung:

$$e^{2\sqrt{z}} = C x^a y^{\sqrt{1-a^2}}.$$

(4) Setzt man

$$z^{-\frac{l}{m-n}} dz = dZ, \quad cos^2 x\, dx = dX, \quad sin^2 y\, dy = dY,$$

so geht die Gleichung über in: $\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^m + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^n = 1$, und das vollständige Integral dieser ist: $Z = aX + bY + c$, wo $a^m + b^n = 1$ sein muss. Demnach ist das vollständige Integral der gegebenen Gleichung:

$$\frac{n-m}{l-m+n}\, z^{\frac{l-m+n}{n-m}} = a\left(\frac{1}{4}\, sin\, 2x + \frac{1}{2}\, x\right)$$
$$+ (1-a^m)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{2}\, y - \frac{1}{4}\, sin\, 2y\right) + c.$$

(5) Das vollständige Integral ist: $z = ax + by + c$, wo $a^2 + b^2 = nab$ sein muss.

(6) Das vollständige Integral ist:

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + b,$$

wo $a_1^m + b_1^m + c_1^m = 1$ sein muss.

(7) Das vollständige Integral ist:

$$\frac{3}{2}\, z^{4/3} = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 + c_4,$$

wo $c_1\, c_2\, c_3 = 1$ sein muss.

(8) Für $\frac{dx}{x} = dX$, $\frac{dy}{y} = dY$ geht die Gleichung über in:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial Y}\right)^2 + z\,\frac{\partial z}{\partial X} = z^2.$$

Setzt man nun

$$\frac{\partial z}{\partial Y} = \frac{dz}{d\xi},\quad \frac{\partial z}{\partial X} = a\,\frac{dz}{d\xi},$$

wo $\xi = aX + Y$ ist, so folgt:

$$\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 + az\,\frac{dz}{d\xi} = z^2,$$

also:

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{1}{2}\, z\left\{-a \pm (a^2+4)^{1/2}\right\} = \alpha z;$$

mithin $log\, z = C + \alpha\xi$. Mithin ist das vollständige Integral der gegebenen Gleichung: $z = A\,(x^a y)^\alpha$. Hätte man sogleich noch $\frac{dz}{z} = Z$ gesetzt, so würde man die zur ersten Hauptform gehörige Gleichung $\frac{\partial Z}{\partial X} + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2 = 1$ erhalten haben, aus welcher $Z = c_1 X + c_2 Y + c_3$ und somit $z = A x^{c_1} y^{c_2}$ folgt, wo c_1 und c_2 der Bedingung $c_1 + c_2^2 = 1$ genügen müssen. Setzt man $c_1 = a\alpha$, $c_2 = \alpha$, so ist die Bedingung $c_1 + c_2^2 = 1$ erfüllt, und beide Resultate stimmen mit einander überein.

§. 193.

2. Aufgabe.

(1) $x + a y + c = (1 + a z^2)^{1/2} + a^{-1/2} \log \{a^{1/2} z + (1 + a z^2)^{1/2}\}$.

(2) Durch die Substitution $\log y = \eta$, $\frac{\partial z}{\partial \eta} = q_1$, nimmt diese Gleichung die hierher gehörige Form an: $p = (q_1 + z)^2$, die sich durch die Annahme $z = f(\eta + 2 a x) = f(\xi)$ in die nach §. 18 integrirbare Gleichung

$$\left(\frac{d z}{d \xi}\right)^2 - 2 (a - z) \frac{d z}{d \xi} + z^2 = 0$$

verwandelt. Einfacher aber gelangt man nach der Methode des §. 195 zum Ziele. Vergl. folgende Seite unter §. 195.

(3) $4 (m z - a m - 1) = (x + m y + C)^2$.

(4) Man setze versuchsweise $z = f(x_1 + a x_2 + b x_3)$. Als vollständiges Integral erhält man dann:

$$\int (a b + b z + a z^2)^{1/2} d z = x_1 + a x_2 + b x_3 + c.$$

(5) Vollständiges Integral:

$$\int \frac{a b z^3 d z}{1 + a^2 z + b^2 z^2} = x_1 + a x_2 + b x_3 + c.$$

§. 195.

2. Aufgabe.

(1) Für $z d z = d Z$ geht die Gleichung über in:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 - x^2 = y^2 - \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2.$$

Demnach erhält man:

$$z^2 - C = x (x^2 + a)^{1/2} + a \log \{x + (x^2 + a)^{1/2}\} + y (y^2 - a)^{1/2} + a \log \{y + (y^2 - a)^{1/2}\}.$$

(2) $$z - C = a y - \frac{1}{4} x^2 \pm \left\{\frac{1}{4} x (x^2 + 4 a)^{1/2} + a \log [x + (x^2 + 4 a)^{1/2}]\right\}.$$

(3) Vollständiges Integral: $z = \frac{1}{6} (2 x - a)^3 + a^2 y + C$.

(4) Vollständiges Integral:

$$z - C = \frac{x}{2}(x^2 + a)^{1/2} + \frac{a}{2} \log\{x + (x^2 + a)^{1/2}\} + \log y - \frac{a}{2y^2}.$$

(Vergl. (2) §. 193.) Die in §. 195 angegebene Methode besteht darin, dass man die abhängige Veränderliche als eine Summe von Functionen darzustellen sucht, deren jede nur von einer unabhängigen Veränderlichen abhängt. Setzt man also auch hier $z = \varphi(x) + \psi(y)$, so muss sein: $\varphi'(x) = \{y\psi'(y) + \varphi(x) + \psi(y)\}^2$, demnach:

$$y\psi'(y) + \psi(y) = 0,\ \varphi'(x) = \varphi^2(x),$$

also

$$\psi(y) = \frac{a}{y},\ \varphi(x) = -\frac{1}{x+b}.$$

Mithin ist das vollständige Integral:

$$z = \frac{a}{y} - \frac{1}{x+b}.$$

3. Aufgabe. Setzt man $f_1(x_1, p_1) = a_1$, $f_2(x_2, p_2) = a_2$, $f_3(x_3, p_3) = a_3$, wo $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ sein muss, so folgt daraus durch Auflösung:

$$p_1 = \varphi_1(x_1, a_1),\ p_2 = \varphi_2(x_2, a_2), p_3 = \varphi_3(x_3, a_3),$$

und somit:

$$z - C = \int \varphi_1(x_1, a_1)\,dx_1 + \int \varphi_2(x_2, a_2)\,dx_2 + \int \varphi_3(x_3, a_3)\,dx_3.$$

Für das Beispiel ist:

$$2z - C = \sum_{i=1}^{i=3} x_i(x_i^2 + a_i)^{1/2} + \sum_{i=1}^{i=3} a_i \log\{x_i + (x_i^2 + a_i)^{1/2}\}$$

und $\sum_{i=1}^{i=3} a_i = 0.$

§. 196.

1. Aufgabe.

(1) Vollständiges Integral: $z = ax + by + ab$, singuläres: $z + xy = 0$.

(2) Vollständiges Integral: $z = ax + by + (1 + a^2 + b^2)^{1/2}$, singuläres: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(3) Vollständiges Integral: $z = ax + by + (\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma)^{1/2}$, singuläres: $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 1$.

(4) Vollständiges Integral: $z = ax + by + 3a^{1/3}b^{1/3}$, singuläres: $xyz = 1$.

2. Aufgabe.

(1) Vollständiges Integral:

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + f(a_1, a_2, a_3).$$

Das singuläre Integral ergiebt sich durch Elimination der Grössen a_1, a_2, a_3 aus dieser Gleichung und den drei folgenden:

$$x_1 + \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0,\ x_2 + \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0,\ x_3 + \frac{\partial f}{\partial a_3} = 0.$$

(2) Vollständiges Integral:

$$z = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} a_\mu x_\mu + (n+1)(a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n+1}},$$

singuläres: $x_1 x_2 \ldots x_n z = (-1)^n$.

§. 197.

2. Aufgabe.

(1) Die transformirte Gleichung ist: $XZP + YZQ = XY$. Ihr allgemeines Integral lautet: $Z^2 = XY + \varphi\left(\frac{Y}{X}\right)$. Ein Integral der gegebenen Gleichung findet man also durch Elimination von X, Y, Z aus dieser Gleichung und den drei folgenden:

$$2xZ - Y + \frac{Y}{X^2}\varphi'\left(\frac{Y}{X}\right) = 0,\ 2yZ - X - \frac{1}{X}\varphi'\left(\frac{Y}{X}\right) = 0,$$
$$zZ + Z^2 - XY = 0.$$

(2) Die transformirte Gleichung ist: $P^2 + Q^2 = 1 - Z$. Das vollständige Integral derselben ist:

$$(X + aY + b)^2 = 4(1 + a^2)(1 - Z).$$

Um ein Integral der gegebenen Gleichung zu erhalten, hat man X, Y, Z aus der vorstehenden und den drei folgenden

$$2(1 + a^2)x + X + aY + b = 0,\ 2(1 + a^2)y + a(X + aY + b) = 0,$$
$$2(1 + a^2)(Z + z) + (X + aY)(X + aY + b) = 0$$

zu eliminiren. Da X und Y nur in der Verbindung $X + aY$ vorkommen, also im Grunde nur zwei Unbekannte vorhanden sind, so sieht man, dass entweder eine Gleichung eine Folge der übrigen

sein muss, oder dass für die gegebene Gleichung eine der Grössen a und b nicht als eine willkürliche Constante, sondern als eine unbekannte, ebenfalls aus jenen Gleichungen zu bestimmende und zu eliminirende Function von x, y sein muss. In der That folgt aus der zweiten und dritten Gleichung: $a = \frac{y}{x}$ und sodann schliesslich

$$z + 1 + bx + x^2 + y^2 = 0,$$

wo man, um das allgemeine Integral zu finden, b gleich einer willkürlichen Function von a, also $b = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ zu setzen hat. Dasselbe Resultat folgt leicht aus den Lagrange'schen Hülfsgleichungen.

(3) Die transformirte Gleichung ist: $X^2 P + Y^2 Q = Z^2$. Nach §. 191 findet man als vollständiges Integral derselben:

$$\frac{1}{Z} = \frac{a}{X} + \frac{b}{Y} - c,$$

wo $a + b = 1$ sein muss. Hieraus erhält man als vollständiges Integral der gegebenen Gleichung: $(ax)^{1/2} + (by)^{1/2} - (cz)^{1/2} = 1$.

(4) Die transformirte Gleichung ist:

$$X^2 Z^2 P + Y^2 Z^2 Q = X^2 Y^2.$$

Nach der Lagrange'schen Methode erhält man hierfür als allgemeines Integral:

$$\left\{Z\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{Y}\right)\right\}^3 - 3\left(\frac{Y}{X} - \frac{X}{Y}\right) + 6 \log \frac{Y}{X} = \varphi\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{Y}\right).$$

Bildet man sodann die Gleichungen, aus denen in Verbindung mit der vorstehenden die Grössen X, Y, Z zu eliminiren sind, und führt man diese Elimination aus, was nur nach getroffener Wahl der willkürlichen Function φ möglich ist, so findet man ein Integral der ursprünglichen Gleichung.

3. Aufgabe.

(1) Durch die in §. 197 angegebenen Substitutionen nimmt die Gleichung die lineare Form an:

$$f_1(-Z, X, Y)\, P + f_2(-Z, X, Y)\, Q = f_3(-Z, X, Y),$$

deren Integral mittelst der Lagrange'schen Hülfsgleichungen gefunden werden kann. Daraus leitet man dann wie in §. 197 das Integral der gegebenen Gleichung her.

(2) Die transformirte Gleichung ist: $F(-Z, P, Q) = 0$, und diese besitzt die in §. 193 behandelte Form.

4. Aufgabe. Setzt man $u = z - px$, so wird $du = q\,dy - x\,dp$. Betrachtet man also y und p als die neuen unabhängigen Veränderlichen, so ist $\frac{\partial u}{\partial y} = q$, $\frac{\partial u}{dp} = -x$ und die gegebene Gleichung geht über in:

$$f_2(y, p, u) \frac{\partial u}{\partial y} - f_1(y, p, u) \frac{\partial u}{\partial x} = f_3(y, p, u),$$

welches die Lagrange'sche Form ist. Ist $\varphi(y, p, u) = 0$ das Integral dieser Gleichung, so hat man p und u aus demselben und aus $\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial p} = \frac{\partial \varphi}{\partial p} - x \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0$; $u = z - px$ zu eliminiren und findet dadurch ein Integral der gegebenen Gleichung. — Für das Beispiel ist die transformirte Gleichung:

$$(y - b)^2 \frac{\partial u}{\partial y} + p^2 \frac{\partial u}{\partial p} = u^2,$$

deren vollständiges Integral ist: $\frac{1}{u} = \frac{1 + a}{y - b} - \frac{a}{p} + c$. Eliminirt man aus diesem und aus den Gleichungen $z - px = u$ und $\frac{a}{p^2} = \frac{x}{u^2}$ die Grössen u und p, so findet man das vollständige Integral der ursprünglichen Gleichung:

$$\frac{\{1 + (ax)^{1/2}\}^2}{z} = \frac{1 + a}{y - b} + c.$$

5. Aufgabe. Die transformirte Gleichung ist:

$$Z^2 = 1 + X^2 + Y^2.$$

Hieraus folgt:

$$x = \frac{\partial Z}{\partial X} = X(1 + X^2 + Y^2)^{-1/2},\; y = \frac{\partial Z}{\partial Y} = Y(1 + X^2 + Y^2)^{-1/2},$$

$$z = X \frac{\partial Z}{\partial X} + Y \frac{\partial Z}{\partial Y} - Z = -(1 + X^2 + Y^2)^{1/2},$$

mithin: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, und dies ist, wie wir in Nr. 2 der 1. Aufgabe von §. 196 sahen, das singuläre Integral der gegebenen Gleichung.

§. 199.

2. Aufgabe. Das allgemeine Integral der Gleichung ist:

$$\frac{x-a}{z-c} = \varphi\left(\frac{y-b}{z-c}\right).$$

Setzt man hierin $z=0$, so folgt: $x = a - c\,\varphi\left(\frac{y-b}{-c}\right)$. Andererseits soll $x = (1-y^2)^{1/2}$ sein, mithin ergiebt sich:

$$\varphi\left(\frac{y-b}{-c}\right) = \frac{1}{c}\,\{a-(1-y^2)^{1/2}\},$$

daher $\varphi(\eta) = \frac{1}{c}\,\{a-[1-(b-c\,\eta)^2]^{1/2}\}$, und demnach auch

$$\varphi\left(\frac{y-b}{z-c}\right) = \frac{1}{c}\left[a-\left\{1-\left(b-c\,\frac{y-b}{z-c}\right)^2\right\}^{1/2}\right].$$

Setzt man diesen Werth in $\frac{x-a}{z-c} = \varphi\left(\frac{y-b}{z-c}\right)$ ein und reducirt, so folgt: $(a\,z-c\,x)^2 + (b\,z-c\,y)^2 = (z-c)^2$.

3. Aufgabe. Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung, nämlich $l\,x+m\,y+n\,z = \varphi(x^2+y^2+z^2)$, stellt alle Rotationsflächen dar, deren Achse durch den Coordinatenanfangspunkt geht und auf der Ebene $l\,x+m\,y+n\,z=0$ senkrecht steht. Dreht man das System der x, y in ihrer Ebene um einen Winkel, dessen Tangente $=\frac{m}{l}$ ist, so geht die Gleichung der Rotationsfläche über in: $(l^2+m^2)^{1/2}\,\xi + n\,z = \varphi(\xi^2+\eta^2+z^2)$, während die Gleichung der Linie, auf welcher der Mittelpunkt der Durchschnittscurve der Ebene $z=0$ und jener Fläche liegen soll, $(l^2+m^2)^{1/2}\,\xi + \frac{e^2}{1-e^2} = 0$ ist. Für $z=0$ ist: $(l^2+m^2)^{1/2}\,\xi = \varphi(\xi^2+\eta^2)$. Da diese Gleichung einen excentrischen Kegelschnitt darstellen soll, so muss φ die Form $a+b\,(\xi^2+\eta^2)^{1/2}$ haben, so dass die Gleichung der Schnittcurve ist: $b^2(\xi^2+\eta^2) = \{\xi\,(l^2+m^2)^{1/2}-a\}^2$. Aus dieser Gleichung geht hervor, dass die Achsen des Kegelschnitts den Coordinatenachsen parallel sind. Transformirt man auf den Mittelpunkt, wobei zu beachten, dass für denselben $\xi = -\frac{e^2}{(1-e^2)\,(l^2+m^2)^{1/2}}$ sein soll, und stellt man die Bedingung auf, dass die numerische Excentricität,

d. h. das Verhältniss der linearen Excentricität zur halben grossen Achse gleich e sein soll, so folgt $a = 1$, $b = \frac{1}{e}(l^2 + m^2)^{1/2}$ und die Gleichung der Schnittcurve ist:

$$X^2 + \frac{Y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2}{(1 - e^2)^2 (l^2 + m^2)}.$$

Als Gleichung der Rotationsfläche, bezogen auf das ursprüngliche Coordinatensystem, ergiebt sich hiernach:

$$e^2 (lx + my + nz - 1)^2 = (l^2 + m^2)(x^2 + y^2 + z^2).$$

Dieselbe stellt ein Rotationsellipsoid dar.

§. 202.

2. Aufgabe.

(1) Aus der Hülfsgleichung $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{p-x}$ folgt: $p^2 - 2xp = a$, mithin aus der gegebenen Gleichung: $q^2 - 2qy = -a - 1$. Als vollständiges Integral der vorgelegten Gleichung hat man also:

$$2z - b = x^2 + y^2 + x(x^2 + a)^{1/2} + a \log\{x + (x^2 + a)^{1/2}\}$$
$$+ y(y^2 - a - 1)^{1/2} - (a + 1)\log\{y + (y^2 - a - 1)^{1/2}\}.$$

Dasselbe Resultat hätte man nach §. 195 erhalten, da man

$$p^2 - 2xp = 2qy - q^2 - 1 = a$$

setzen kann.

(2) Aus den Hülfsgleichungen

$$\frac{dp}{q + x} = \frac{dq}{p + y} = \frac{dx}{-q - y} = \frac{dy}{-p - x}$$

erhält man leicht: $x + y + p + q = a$. Da sich nun die gegebene Gleichung in der Form schreiben lässt:

$$2(p + x)(q + y) + (x - y)^2 = 0,$$

so folgt daraus:

$$2(p + x) = a + \{a^2 + 2(x - y)^2\}^{1/2},$$
$$2(q + y) = a - \{a^2 + 2(x - y)^2\}^{1/2}.$$

Setzt man die Werthe von p und q in $dz = p\,dx + q\,dy$ ein und integrirt, so ergiebt sich:

$$2z - b = a(x + y) - (x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(x - y)\{a^2 + 2(x - y)^2\}^{1/2}$$
$$+ \frac{a^2}{2\sqrt{2}} \log\{2(x - y) + \sqrt{2}\,[a^2 + 2(x - y)^2]^{1/2}\}.$$

Ist $Z = z + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2$, so wird:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = p + x, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = q + y,$$

also $2 \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial y} = -(x - y)^2$. Aendert man die unabhängigen Veränderlichen, indem man setzt: $x - y = 2^{1/2} X$, $x + y = 2^{1/2} Y$, so folgt:

$$2 \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot \frac{\partial Z}{\partial y} = \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2 - \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 = Q^2 - P^2.$$

Demnach: $P^2 - Q^2 = 2 X^2$, welches die Form des §. 195 ist. Setzt man $P^2 - 2 X^2 = Q^2 = \frac{a^2}{2}$, so ergiebt sich genau dasselbe Resultat wie vorher.

§. 207.

1. Aufgabe. Die beiden ersten Hülfsgleichungen sind:

$$\frac{dp}{0} = \frac{dq}{0} = \cdots$$

Mithin $p = a$, $q = b$. Aus $dz = p\,dx + q\,dy$ folgt daher $z = ax + by + c$, während die Substitution in die Differentialgleichung giebt: $z = ax + by + f(a,b)$. Somit muss $c = f(a,b)$ sein.

2. Aufgabe. Aus der Hülfsgleichung $\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$ folgt: $q = ap$.

Setzt man dies in die gegebene Gleichung ein, so wird

$$p\,(x + ay) = f(p, ap) = p^n f(1, a),$$

also

$$p = \left\{\frac{x + ay}{f(1,a)}\right\}^{\frac{1}{n-1}}, \quad q = a \left\{\frac{x + ay}{f(1,a)}\right\}^{\frac{1}{n-1}}.$$

Setzt man dies in $dz = p\,dx + q\,dy$ ein und integrirt, so erhält man das vollständige Integral:

$$(z + c)^{n-1} . f(1,a) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} (x + ay)^n.$$

Für die Gleichung $xp^2 + yq^2 = 2pq$ lautet eine der Hülfsgleichungen: $\frac{dp}{p^2} = \frac{dq}{q^2}$. Aus dieser folgt: $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{a}$, also

$q = \frac{ap}{a-p}$. Setzt man diesen Werth in die gegebene Gleichung ein, so ergiebt sich: $a - p = a \frac{1 + (1 - xy)^{1/2}}{x}$, also

$$p = \frac{a}{x}\{x - 1 - (1 - xy)^{1/2}\},\ q = \frac{a}{y}\{1 - y - (1 - xy)^{1/2}\}.$$

Mithin:

$$dz = p\,dx + q\,dy = a\,\frac{x-1}{x}\,dx$$
$$+ a\,\frac{1-y}{y}\,dy - a\,(1 - xy)^{1/2}\,\frac{x\,dy + y\,dx}{xy}.$$

Somit ist das vollständige Integral:

$$z - b = a(x-y) - 2a(1-xy)^{1/2} - a \log\frac{x}{y} - a \log\frac{(1-xy)^{1/2} - 1}{(1-xy)^{1/2} + 1}.$$

§. 213.

Aufgabe. Denkt man sich die Gleichungen $F_1 = 0, F_2 = 0, \ldots, F_n = 0$ nach $p_1, p_2, \ldots, p_n$, aufgelöst und sodann die Werthe dieser Grössen wiederum in jene Gleichungen substituirt, so müssen dieselben identisch erfüllt werden. Differentiiren wir daher irgend zwei derselben, etwa $F_i = 0$ und $F_k = 0$, nach jeder der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so erhalten wir n Paare von Gleichungen von der Form:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_i}{\partial z}\,p_\alpha + \frac{\partial F_i}{\partial p_1}\,\frac{\partial p_1}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_i}{\partial p_2}\,\frac{\partial p_2}{\partial x_\alpha} + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial p_n}\,\frac{\partial p_n}{\partial x_\alpha} = 0,$$

und ebenso:

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_k}{\partial z}\,p_\alpha + \frac{\partial F_k}{\partial p_1}\,\frac{\partial p_1}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_k}{\partial p_2}\,\frac{\partial p_2}{\partial x_\alpha} + \cdots + \frac{\partial F_k}{\partial p_n}\,\frac{\partial p_n}{\partial x_\alpha} = 0,$$

und aus diesen folgt durch Elimination von $\frac{\partial p_\alpha}{\partial x_\alpha}$:

$$\left[\frac{F_i,\ F_k}{x_\alpha,\ p_\alpha}\right] + \left[\frac{F_i,\ F_k}{z,\ p_\alpha}\right] p_\alpha + \left[\frac{F_i,\ F_k}{p_1,\ p_\alpha}\right] \frac{\partial p_1}{\partial x_\alpha} + \cdots + \left[\frac{F_i,\ F_k}{p_{\alpha-1},\ p_\alpha}\right] \frac{\partial p_{\alpha-1}}{\partial x_\alpha}$$
$$+ \left[\frac{F_i,\ F_k}{p_{\alpha+1},\ p_\alpha}\right] \frac{\partial p_{\alpha+1}}{\partial x_\alpha} + \cdots + \left[\frac{F_i,\ F_k}{p_n,\ p_\alpha}\right] \frac{\partial p_n}{\partial x_\alpha} = 0.$$

Solcher Gleichungspaare giebt es n für jedes bestimmte Werthsystem i, k. Addirt man sie alle, und beachtet man, dass, wenn der Ausdruck $dz = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \cdots + p_n\,dx_n$ integrabel

sein soll, allgemein $\frac{\partial p_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial p_\beta}{\partial x_\alpha}$ sein muss, so folgt, dass die F der Bedingung genügen müssen: $\left(\frac{F_i, F_k}{x, p}\right) + \left\{\frac{F_i, F_k}{z, p}\right\} = 0$ für jedes Werthepaar i, k, falls i und k verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ sind. Man erhält alle diese Bedingungsgleichungen, wenn man k alle Werthe von 1 bis n und sodann i alle Werthe von 2 bis n giebt. Dass diese Bedingungen auch hinreichend sind, folgt ebenso wie in §. 212.

§. 223.

3. Aufgabe.

(1) Ist $\psi(x_1, x_2, x_3, z) = 0$ eine Lösung dieser Gleichung und setzt man $P_r = \frac{\partial \psi}{\partial x_r}$, $(r = 1, 2, 3)$, und $P_4 = \frac{\partial \psi}{\partial z}$, so ist $p_r = -\frac{P_r}{P_4}$ und die gegebene Gleichung geht über in:

$$z^2 - z\frac{P_3}{P_4} = (P_1^2 + P_2^2)\frac{1}{P_4^2}.$$

Aus den Hülfsgleichungen $\frac{d P_1}{0} = \frac{d P_2}{0} = \frac{d P_3}{0}$ folgt: $P_1 = a_1$, $P_2 = a_2$, $P_3 = a_3$, und diese Werthe, in die vorige Gleichung eingesetzt, geben: $P_4 = \frac{a_3 + \{a_3^2 + 4(a_1^2 + a_2^2)\}^{1/2}}{2z}$. Mithin folgt aus $d\psi = P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + P_3 dx_3 + P_4 dz$ durch Integration: $\psi + C_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \alpha \log z$, wo

$$\alpha = \frac{a_3 + \{a_3^2 + 4(a_1^2 + a_2^2)\}^{1/2}}{2}$$

ist. Da $\psi = 0$ ist, so erhält man als vollständiges Integral der gegebenen Gleichung: $\log z + C = -\frac{a_1}{\alpha}x_1 - \frac{a_2}{\alpha}x_2 - \frac{a_3}{\alpha}x_3$. — Dasselbe Resultat hätte man, wenn man $\log z = Z$ gesetzt hätte, einfacher nach §. 191 erhalten. Danach wird: $\log z + C = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$, wo c_1, c_2, c_3 der Bedingung $c_1^2 + c_2^2 - c_3 = 1$ genügen müssen. Diese Bedingung wird durch die obigen Constanten $-\frac{a_1}{\alpha}$, $-\frac{a_2}{\alpha}$, $-\frac{a_3}{\alpha}$ von selbst erfüllt.

(2) Das vollständige Integral ist:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + 2 a_3 \log \{[a_3^2 + (a_1 + a_2)^2 z]^{1/2} - a_3\}$$
$$+ 2\{a_3^2 + (a_1 + a_2)^2 z\}^{1/2}.$$

(3) Das vollständige Integral erhält man am einfachsten nach §. 191, nachdem man $log\, z = Z$ gesetzt hat; es ist $log\, z + C = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$, wo $(a_1 - 1)(a_2 - 1)(a_3 - 1) = a_1 a_2 a_3$ sein muss.

5. Aufgabe.

(1) Vollständiges Integral: $z - C = \frac{c_1}{x_1} + c_2 x_2 + c_3 x_3$, wo $c_1 + c_2^2 + a c_3^2 = 0$ ist.

(2) Die Hülfsgleichungen sind:

$$\frac{d x_1}{p_2 p_3 - 2 x_1 p_1} = \frac{d x_2}{p_3 p_1 - 2 x_2 p_2} = \frac{d x_3}{p_1 p_2 - 2 x_3 p_3} = \frac{d p_1}{p_1^2} = \frac{d p_2}{p_2^2} = \frac{d p_3}{p_3^2}.$$

Aus dem vierten, fünften und sechsten Bruche erhält man:

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} = \frac{1}{a_1}, \quad \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_3} = \frac{1}{a_2}.$$

Setzt man $F_1 = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}$, $F_2 = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_3}$, so ist $(F_1, F_2) = 0$. Man hat daher aus den drei Gleichungen $F = 0$ (der gegebenen Gleichung), $F_1 = \frac{1}{a_1}$, $F_2 = \frac{1}{a_2}$ die drei Grössen p_1, p_2, p_3 zu berechnen und in den Ausdruck $d z = p_1 d x_1 + p_2 d x_2 + p_3 d x_3$ einzusetzen; durch dessen Integration ergiebt sich das vollständige Integral der gegebenen Gleichung.

(3) Die Hülfsgleichungen sind:

$$\frac{dx_1}{2p_1} = \frac{dx_2}{2p_2} = \frac{dx_3}{2p_3} = \frac{d p_1}{2 x_1 + x_2 + x_3} = \frac{d p_2}{2 x_2 + x_3 + x_1} = \frac{d p_3}{2 x_3 + x_1 + x_2}.$$

Aus der Gleichheit des ersten, zweiten, vierten und fünften Bruches folgt:

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{2(p_1 - p_2)} = \frac{d(p_1 - p_2)}{x_1 - x_2},$$

daher:

$$F_1 = (x_1 - x_2)^2 - 2(p_1 - p_2)^2 = a_1.$$

Eine zweite Lösung, welche auch der Gleichung $(F_1, F_2) = 0$ genügt, ist:

$$F_2 = 2(x_1 + x_2 + x_3)^2 - (p_1 + p_2 + p_3)^2 = a_2.$$

Berechnet man daher p_1, p_2, p_3 aus den Gleichungen $F = 0$, $F_1 = a_1$, $F_2 = a_2$, so folgt:

$$p_3 = \frac{1}{3}\{2\,(x_1 + x_2 + x_3)^2 - a_2\}^{1/2} + \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 2\,x_3)^2 + 2\,a_2 + \frac{3}{2}\,a_1\right\}^{1/2},$$

$$p_1 = \frac{1}{3}\{2\,(x_1 + x_2 + x_3)^2 - a_2\}^{1/2} - \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 2\,x_3)^2 + 2\,a_2 + \frac{3}{2}\,a_1\right\}^{1/2}$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2}\,a_1\right\},$$

$$p_2 = \frac{1}{3}\,\{2\,(x_1 + x_2 + x_3)^2 - a_2\}^{1/2} - \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{2}\,(x_1 + x_2 - 2\,x_3)^2 + 2\,a_2 + \frac{3}{2}\quad{}_1\right\}^{1/2}$$
$$- \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2}\,a_1\right\}.$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck $dz = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + p_3\,dx_3$ ein, so wird derselbe integrabel, und es ergiebt sich als vollständiges Integral, wenn man zur Abkürzung $x_1 + x_2 + x_3 = u$, $x_1 + x_2 - 2\,x_3 = v$, $x_1 - x_2 = w$ setzt:

$$z - C = \frac{u}{6}\,\{2\,u^2 - a_2\}^{1/2} - \frac{v}{12}\left\{\frac{1}{2}\,v^2 + 2\,a_2 + \frac{3}{2}\,a_1\right\}^{1/2} + \frac{w}{4}\left\{\frac{1}{2}\,w^2 - \frac{1}{2}\,a_1\right\}^{1/2}$$
$$- \frac{a_2}{6\cdot\sqrt{2}}\,log\,\{u\,2^{1/2} + (2\,u^2 - a_2)^{1/2}\}$$
$$- \frac{4\,a_2 + 3\,a_1}{12\sqrt{2}}\,log\left\{2^{-1/2}\,v + \left(\frac{1}{2}\,v^2 + 2\,a_2 + \frac{3}{2}\,a_1\right)^{1/2}\right\}$$
$$- \frac{a}{2\sqrt{2}}\,log\left\{2^{-1/2}\,w + \left(\frac{1}{2}\,w^2 - \frac{1}{2}\,a_1\right)^{1/2}\right\}.$$

(4) Zwei Lösungen der Hülfsgleichungen sind:

$$F_1 = p_2^2 - p_3^2 = C_1,\quad F_2 = (p_2 + p_3)\,e^{1/2\,x_1^2} = C_2.$$

Da für dieselben $(F_1, F_2) = 0$ ist, so hat man aus den Gleichungen $F_1 = C_1$, $F_2 = C_2$ und der gegebenen Differentialgleichung die Werthe von p_1, p_2, p_3 zu berechnen und in den Ausdruck $dz = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + p_3\,dx_3$ einzusetzen. Durch Integration folgt dann als vollständiges Integral der gegebenen Gleichung:

$$2\,z - C = \frac{C_1}{C_2}\,(x_2 - x_3)\,e^{1/2\,x_1^2} + C_2\,(x_2 + x_3)\,e^{-1/2\,x_1^2}$$
$$- \int\left(\frac{C_1}{C_2}\,e^{1/2\,x_1^2} + C_2\,e^{-1/2\,x_1^2}\right)^2 d\,x_1.$$

(5) Aus den Hülfsgleichungen:

$$\frac{d\,x_1}{p_2\,p_3 - x_1} = \frac{d\,x_2}{p_3\,p_1 - x_2} = \frac{d\,x_3}{p_1\,p_2 - x_3} = \frac{d\,p_1}{p_1} = \frac{d\,p_2}{p_2} = \frac{d\,p_3}{p_3}$$

folgt:

$$F_1 = \frac{p_2}{p_1} = a_1, \quad F_2 = \frac{p_3}{p_1} = a_2,$$

und es ist: $(F_1, F_2) = 0$. Somit erhält man aus $F_1 = a_1$, $F_2 = a_2$ und der gegebenen Gleichung die Werthe:

$$p_1 = \left(\frac{x_1 + a_1 x_2 + a_2 x_3}{a_1 a_2}\right)^{1/2}, \quad p_2 = a_1 \left(\frac{x_1 + a_1 x_2 + a_2 x_3}{a_1 a_2}\right)^{1/2},$$
$$p_3 = a_2 \left(\frac{x_1 + a_1 x_2 + a_2 x_3}{a_1 a_2}\right)^{1/2},$$

also:

$$z - C = \frac{2}{3}\left\{\frac{(x_1 + a_1 x_2 + a_2 x_3)^3}{a_1 a_2}\right\}^{1/2}.$$

7. Aufgabe. Setzt man: $p_4^2 + (p_5 + x_4)(p_5 + x_6)p_6 = \alpha$, so wird: $(x_2 p_1 + x_1 p_2) x_3 + \alpha p_3 (p_1 - p_2) = a$. Da in der ersten x_5 nicht explicite vorkommt, so kann man $p_5 = \beta$ setzen, wo β eine Constante ist, und dann folgt: $p_4^2 + (\beta + x_4)(\beta + x_6)p_6 = \alpha$. Dividirt man durch $\beta + x_4$, so sind die Veränderlichen x_4 und x_6 separirt, und es folgt, wenn man $(\beta + x_6)p_6 = -\gamma$ setzt:

$$p_6 = \frac{-\gamma}{\beta + x_6}, \quad p_4 = (\alpha + \beta\gamma + \gamma x_4)^{1/2}.$$

Somit:

$$p_4 dx_4 + p_5 dx_5 + p_6 dx_6 = (\alpha + \beta\gamma + \gamma x_4)^{1/2} dx_4 + \beta dx_5 - \frac{\gamma}{\beta + x_6} dx_6,$$

also wenn man integrirt und sich $z = z' + z''$ gesetzt denkt, wo z' nur von x_4, x_5, x_6, dagegen z'' nur von x_1, x_2, x_3 abhängt:

$$z' + A' = \frac{2}{3\gamma}(\alpha + \beta\gamma + \gamma x_4)^{3/2} + \beta x_5 - \gamma \log(\beta + x_6).$$

Um das vollständige Integral der zweiten Gleichung

$$(x_2 p_1 + x_1 p_2) x_3 + \alpha p_3 (p_1 - p_2) = a$$

zu erhalten, bedienen wir uns der Jacobi'schen Methode. Da die Hülfsgleichungen dieselben sind, wie bei der 4. Aufgabe S. 389 (nur α statt a gesetzt), so erhalten wir:

$$F_1 = (p_1 + p_2)(x_1 + x_2) = a_1, \quad F_2 = \alpha(p_1 - p_2) - \frac{1}{2} x_3^2 = a_2,$$

und haben nun aus den Gleichungen

$$(x_2 p_1 + x_1 p_2) x_3 + \alpha p_3 (p_1 - p_2) = a, \quad F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2$$

die Werthe von p_1, p_2, p_3 zu berechnen. Es folgt:

$$p_1 = \frac{1}{2}\frac{a_1}{x_1+x_2} + \frac{a_2}{2\alpha} + \frac{1}{4\alpha}x_3^2,\quad p_2 = \frac{1}{2}\frac{a_1}{x_1+x_2} - \frac{a_2}{2\alpha} - \frac{1}{4\alpha}x_3^2,$$

$$p_3 = \frac{2a - a_1 x_3}{2a_1 + x_3^2} + \frac{1}{2\alpha}(x_1 - x_2)\,x_3.$$

Setzt man diese Werthe in $dz'' = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + p_3\,dx_3$ ein, und integrirt man, so folgt:

$$z'' + A'' = \frac{a_1}{2}\log(x_1+x_2) + \frac{1}{2\alpha}(x_1 - x_2)\left(a_2 + \frac{x_3^2}{2}\right)$$
$$+ a\left(\frac{2}{a_2}\right)^{1/2} arc\,tang\frac{x_3}{(2a_2)^{1/2}} - \frac{a_1}{2}\log(2a_2 + x_3^2).$$

Mithin ist schliesslich das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung:

$$z + A = \log\left\{\frac{(x_1+x_2)^{\frac{a_1}{2}}}{(\beta + x_6)^{\gamma}\,(2a_2 + x_3^2)^{\frac{a_1}{2}}}\right\} + \frac{1}{2\alpha}(x_1 - x_2)\left(a_2 + \frac{x_3^2}{2}\right)$$
$$+ a\left(\frac{2}{a_2}\right)^{1/2} arc\,tang\frac{x_3}{(2a_2)^{1/2}} + \frac{2}{3\gamma}(\alpha + \beta\gamma + \gamma x_4)^{3/2} + \beta x_5.$$

§. 226.

2. Aufgabe.

(1) Dies Integral erhält man, wenn man $F_4 = \frac{p_2}{x_3} = \frac{1}{a}$ setzt.

(2)...(3) Aus den in der 1. Aufgabe S. 397 angegebenen Hülfsgleichungen ergiebt sich ferner: $p_2 p_4 = x_1 x_3$ und $p_1 p_3 = x_2 x_4$. Setzt man nun einmal $F_4 = p_2 p_4 - x_1 x_3 = -a$, das andere Mal: $F_4 = p_1 p_3 - x_2 x_4 = -a$, so sind die Bedingungsgleichungen $(F_1, F_4) = (F_2, F_4) = (F_3, F_4) = 0$ erfüllt, und man gelangt auf dem gewöhnlichen Wege zu den in (2) und (3) angegebenen Integralen.

3. Aufgabe.

(1) Bezeichnet man die linken Seiten der gegebenen Gleichungen mit F_1 resp. F_2, so muss, wenn beide Gleichungen ein gemeinschaftliches Integral besitzen sollen, $(F_1, F_2) = 0$ sein. Nun findet man:

$$(F_1, F_2) = -(x_1 x_2 x_3 + x_3^2 + x_4^2 + x_2 x_4 - 3x_1 x_4$$
$$+ x_1 x_2 - x_2 - 1)\,(x_1 p_4 + p_3).$$

Da dies nicht infolge der gegebenen Gleichungen verschwindet, so setze man: $F_3 = x_1 p_4 + p_3 = 0$. Dann ist:

$(F_1, F_2) = 0$, $(F_1, F_3) = x_1 F_3 = 0$, $(F_2, F_3) = (x_1 x_3 + x_4)\,F_3 = 0$,

und es erfüllen somit die Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ die Integrabilitätsbedingungen. Es erübrigt noch, ein gemeinschaftliches Integral der drei Gleichungen $(F_1, F_4) = (F_2, F_4) = (F_3, F_4) = 0$ zu suchen. Ein Integral der Hülfsgleichungen von $(F_3, F_4) = 0$ ist $p_4 = \alpha$. Setzt man nun versuchsweise $F_4 = p_4 = \alpha$, so ist: $(F_3, F_4) = 0, (F_1, F_4) = x_1 p_4 + p_3 = 0, (F_2, F_4) = x_3 (x_1 p_4 + p_3) = 0$. Berechnet man daher aus den Gleichungen $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 0$ die Werthe von p_1, p_2, p_3, p_4, so folgt:

$$p_1 = -(x_3 + 3 x_1^2)\alpha, \quad p_2 = -x_2 \alpha, \quad p_3 = -x_1 \alpha, \quad p_4 = \alpha.$$

Setzt man diese Werthe in $dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 + p_4 dx_4$ ein und integrirt, so folgt als gemeinschaftliches Integral der gegebenen Gleichungen:

$$z - \beta = \alpha \left(x_4 - x_1^3 - \frac{1}{2} x_2^2 - x_1 x_3 \right).$$

(2) Bezeichnet man wieder die linken Seiten der gegebenen Gleichungen mit F_1 resp. F_2, so muss sein: $(F_1, F_2) = 0$. Nun findet man: $(F_1, F_2) = 2 x_1^2 \{p_2 + (1 - x_5) p_3\}$, und da dies nicht infolge der gegebenen Gleichungen verschwindet, so setze man: $F_3 = p_2 + (1 - x_5) p_3 = 0$. Dann ist: $(F_1, F_2) = 0$, ferner auch $(F_2, F_3) = 0$, dagegen $(F_1, F_3) = x_1^2 p_3$. Setzt man daher noch $F_4 = p_3 = 0$, so ist: $(F_1, F_2) = 0$, $(F_1, F_3) = 0$, $(F_2, F_3) = 0$ und $(F_1, F_4) = (F_2, F_4) = (F_3, F_4) = 0$; es sind daher die beiden Gleichungen simultan integrirbar. Da $p_3 = 0$ ist, so folgt aus der Gleichung $F_3 = 0$ auch $p_2 = 0$, daher wird: $f_1 = 2 x_5 p_4 + x_1^2 p_5 = 0$ und $f_2 = x_1 p_1 - 2 x_4 p_4 = 0$. Aus den verallgemeinerten Lagrange'schen Gleichungen der letzteren ergiebt sich $f_3 = p_4 - a x_1^2 = 0$, und es ist:

$$(f_1, f_2) = (f_1, f_3) = (f_2, f_3) = 0.$$

Aus $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ folgt:

$$p_4 = a x_1^2, \quad p_1 = 2 a x_1 x_4, \quad p_5 = -2 a x_5;$$

daher ist das gemeinschaftliche Integral der gegebenen Gleichungen:

$$z - b = a (x_1^2 x_4 - x_5^2).$$

Vermischte Aufgaben.

1. (1) Allgemeines Integral:

$$lx + my + nz = \varphi(xy + yz + zx).$$

(2) Für $e^x = \xi$, $e^y = \eta$ geht die Gleichung über in:

$$\xi(z+\xi)\frac{\partial z}{\partial \xi} + \eta(z+\eta)\frac{\partial z}{\partial \eta} = z^2 - \xi\eta.$$

Aus den Lagrange'schen Gleichungen dieser letzteren folgt:

$$\frac{z\,d\xi - \xi\,dz}{\xi^2} = \frac{d\eta}{\eta} \text{ und } \frac{z\,d\eta - \eta\,dz}{\eta^2} = \frac{d\xi}{\xi},$$

mithin:

$$\frac{z}{\xi} + \log\eta = a_1 \text{ und } \frac{z}{\eta} + \log\xi = a_2.$$

Das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung ist somit:

$$\varphi(y + z e^{-x},\ x + z e^{-y}) = 0.$$

(3) Allgemeines Integral: $xyz = \varphi(xy + yz + zx)$.

2. Die Differentialgleichung lautet:

$$2a(z - px - qy) = (x^2 + y^2 + z^2)(1 + p^2 + q^2)^{1/2}.$$

Das singuläre Integral ist: $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$. Wegen der geometrischen Bedeutung vergleiche man §. 182.

3. Das allgemeine Integral ist: $\frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \varphi\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)$. Dasselbe kann nur dann einen Kegel zweiter Ordnung darstellen, wenn φ eine ganze Function ersten Grades von $\frac{1}{y} - \frac{1}{z}$ ohne constantes Glied, also $\frac{1}{x} - \frac{1}{z} = c\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)$ ist. Da der Kegel durch den Punkt (1, 2, 3) gehen soll, so muss $1 - \frac{1}{3} = c\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$ oder $c = 4$ sein, so dass die Gleichung der Kegelfläche wird:

$$3xy + yz - 4zx = 0.$$

Dasselbe Resultat hätte man aus dem vollständigen Integrale ableiten können, welches lautet: $\frac{1}{z} - \frac{a}{x} - \frac{1-a}{y} = b$. Hier muss zunächst $b = 0$ sein; ferner soll sein: $\frac{1}{3} - \frac{a}{1} - \frac{1-a}{2} = 0$, also $a = -\frac{1}{3}$, mithin: $3xy + yz - 4zx = 0$, wie vorher.

4. Aus den Lagrange'schen Hülfsgleichungen folgt:

$$(1)\quad \frac{dx}{X^{1/2}} + \frac{dy}{Y^{1/2}} + \frac{dz}{Z^{1/2}} = 0,$$

und:

$$(2)\quad \frac{x\,dx}{X^{1/2}} + \frac{y\,dy}{Y^{1/2}} + \frac{z\,dz}{Z^{1/2}} = 0.$$

Ist nun zunächst $X = a + 2\,b\,x + c\,x^2$, und analog für Y und Z, so ist: $\frac{x\,dx}{X^{1/2}} = \frac{1}{c}\,d\,X^{1/2} - \frac{b}{c}\,\frac{dx}{X^{1/2}}$, daher mit Rücksicht auf (1) und (2): $d(X^{1/2} + Y^{1/2} + Z^{1/2}) = 0$, oder: $X^{1/2} + Y^{1/2} + Z^{1/2} = C_1$. Ferner ist:

$$\int \frac{dx}{X^{1/2}} = c^{-1/2}\,log\,\{b + cx + c^{1/2}\,X^{1/2}\},$$

demnach ist das Integral von (1):

$$(b + c\,x + c^{1/2}\,X^{1/2})\,(b + c\,y + c^{1/2}\,Y^{1/2})\,(b + c\,z + c^{1/2}\,Z^{1/2}) = C_2.$$

Eine willkürliche Function der linken Seiten der gefundenen Integralgleichungen gleich v gesetzt, giebt das allgemeine Integral der gegebenen partiellen Differentialgleichung für den Fall, dass X, Y, Z dieselben Functionen zweiten Grades resp. von x, y, z sind. — Sind X, Y, Z Functionen vierten Grades, so können wir hier der etwas weitläufigen Rechnung wegen das schliessliche Resultat nicht in expliciter Form entwickeln, sondern zeigen nur einen Weg, auf welchem man zu demselben gelangen kann. Durch eine Substitution von der Form $x = \frac{\alpha + \beta\,\xi}{\gamma + \delta\,\xi}$ kann $\frac{dx}{X^{1/2}}$ immer auf die Form $C\,\frac{d\,\xi}{\Xi^{1/2}}$ gebracht werden, wo C eine gewisse Constante ist und Ξ die Form $(1 - \xi^2)\,(1 - \varkappa^2\,\xi^2)$ besitzt. Wendet man die entsprechenden Substitutionen auch auf y und z an, so gehen die Gleichungen (1) und (2) bezüglich über in:

$$(1')\quad \frac{d\,\xi}{\Xi^{1/2}} + \frac{d\,\eta}{H^{1/2}} + \frac{d\,\zeta}{Z^{1/2}} = 0$$

und:

$$\frac{(\alpha + \beta\,\xi)\,d\,\xi}{(\gamma + \delta\,\xi)\,\Xi^{1/2}} + \frac{(\alpha + \beta\,\eta)\,d\eta}{(\gamma + \delta\,\eta)\,H^{1/2}} + \frac{(\alpha + \beta\,\zeta)\,d\,\zeta}{(\gamma + \delta\,\zeta)\,Z^{1/2}} = 0.$$

Die letzte Gleichung kann man noch umformen. Da nämlich

$$\frac{\alpha + \beta\,u}{\gamma + \delta\,u} = \frac{\beta}{\delta} + (\alpha\,\delta - \beta\,\gamma)\,\left\{\frac{\gamma}{\delta\,(\gamma^2 - \delta^2\,u^2)} - \frac{u}{\gamma^2 - \delta^2\,u^2}\right\}$$

ist, so geht dieselbe mit Rücksicht auf (1') über in:

$$(2')\quad \frac{d\,\xi}{(\gamma^2 - \delta^2\,\xi^2)\,\Xi^{1/2}} + \frac{d\,\eta}{(\gamma^2 - \delta^2\,\eta^2)\,H^{1/2}} + \frac{d\,\zeta}{(\gamma^2 - \delta^2\,\zeta^2)\,Z^{1/2}}$$
$$= \frac{\delta}{\gamma}\left\{\frac{\xi\,d\,\xi}{(\gamma^2 - \delta^2\,\xi^2)\,\Xi^{1/2}} + \frac{\eta\,d\,\eta}{(\gamma^2 - \delta^2\,\eta^2)\,H^{1/2}} + \frac{\zeta\,d\,\zeta}{(\gamma^2 - \delta^2\,\zeta^2)\,Z^{1/2}}\right\},$$

deren rechte Seite unmittelbar durch bekannte Functionen integrirbar ist. Die der Gleichung (1′) entsprechende algebraische Integralgleichung kann man in folgender Weise finden. Setzt man $\frac{d\eta}{H^{1/2}} + \frac{d\zeta}{Z^{1/2}} = \frac{d\varrho}{P^{1/2}}$, so wird: $\frac{d\xi}{\Xi^{1/2}} + \frac{d\varrho}{P^{1/2}} = 0$ und man hat (vergl. 4. Aufg. §. 146):

$$\frac{\xi\{(1-\varrho^2)(1-\varkappa^2\varrho^2)\}^{1/2} + \varrho\{(1-\xi^2)(1-\varkappa^2\xi^2)\}^{1/2}}{1-\varkappa^2\xi^2\varrho^2} = C$$

und:

$$\frac{\eta\{(1-\zeta^2)(1-\varkappa^2\zeta^2)\}^{1/2} + \zeta\{(1-\eta^2)(1-\varkappa\eta^2)\}^{1/2}}{1-\varkappa^2\eta^2\zeta^2} = \varrho.$$

Eliminirt man ϱ aus diesen beiden Gleichungen, so erhält man das Integral der Gleichung (1′). Mit Hülfe dieses Integrals kann man dann die linke Seite der Gleichung (2′) umformen, nämlich dieselbe darstellen als Differential eines durch logarithmische resp. cyklometrische Functionen integrirbaren Ausdrucks, so dass man also durch Integration der so modificirten Gleichung (2′) ein zweites und zwar, wie man sieht, ebenfalls algebraisches Integral der Gleichungen (1) und (2) erhält. Aus diesen bildet man dann in bekannter Weise das allgemeine Integral der gegebenen partiellen Differentialgleichung. — Sind endlich X, Y, Z dieselben Functionen sechsten Grades resp. x, y, z, und zwar:

$$X = a + bx + cx^2 + \delta x^3 + \gamma x^4 + \beta x^5 + \alpha x^6,$$

so haben wir in der 1. und 2. Aufgabe §. 150 für die Gleichungen (1) und (2) zwei von einander unabhängige Lösungen gefunden, nämlich:

$$\left\{\frac{(y-z)X^{1/2} + (z-x)Y^{1/2} + (x-y)Z^{1/2}}{(x-y)(y-z)(z-x)}\right\}^2 - \beta(x+y+z) - \alpha(x+y+z)^2 = C_1$$

und:

$$\left\{\frac{y^2z^2(y-z)X^{1/2} + zx(z-x)Y^{1/2} + xy(x-y)Z^{1/2}}{xyz(x-y)(y-z)(x-x)}\right\}^2 - b\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) - a\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 = C_2.$$

Eine willkürliche Function der linken Seiten dieser beiden Gleichungen gleich v gesetzt, stellt das allgemeine Integral der gegebenen partiellen Differentialgleichung dar. (Richelot, Crelle's J. Bd. 23, S. 354.)

5. Es ist:

$$u = e^{kx^2} + \frac{h}{1}\frac{d^2}{dx^2}e^{kx^2} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^4}{dx^4}e^{kx^2} + \cdots,$$

daher:

$$\frac{\partial u}{\partial h} = \frac{d^2}{dx^2}e^{kx^2} + \frac{h}{1}\frac{d^4}{dx^4}e^{kx^2} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^6}{dx^6}e^{kx^2} + \cdots$$

$$= (4k^2x^2e^{kx^2} + 2ke^{kx^2}) + \frac{h}{1}\frac{d^2}{dx^2}(4k^2x^2e^{kx^2} + 2ke^{kx^2})$$

$$+ \frac{h^2}{2!}\frac{d^4}{dx^4}(4k^2x^2e^{kx^2} + 2ke^{kx^2}) + \cdots,$$

mithin:

$$\frac{\partial u}{\partial h} = 4k^2\left(1 + \frac{h}{1}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^4}{dx^4} + \cdots\right)x^2e^{kx^2}$$

$$+ 2k\left(1 + \frac{h}{1}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^4}{dx^4} + \cdots\right)e^{kx^2},$$

d. i.:

$$\frac{\partial u}{\partial h} = 4k^2\frac{\partial u}{\partial k} + 2ku.$$

Die Lagrange'schen Hülfsgleichungen dieser partiellen Differentialgleichung lauten: $\frac{dh}{1} = \frac{dk}{-4k^2} = \frac{du}{2ku}$. Aus den beiden ersten Brüchen folgt: $\frac{k}{1-4hk} = C$, sodann aus dem ersten und letzten: $u(1+6Ch)^{-1/2} = C_1$, oder: $u(1-4hk)^{1/2} = C_1$. Demnach ist das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung:

$$u(1-4hk)^{1/2} = \varphi\left(\frac{k}{1-4hk}\right).$$

Für $h = 0$ ist aber $u = e^{kx^2}$, somit: $\varphi(k) = e^{kx^2}$, also

$$\varphi\left(\frac{k}{1-4hk}\right) = e^{\frac{kx^2}{1-4hk}}$$

und daher: $u = (1-4hk)^{-1/2}.e^{\frac{kx^2}{1-4hk}}$. — Ganz ähnlich verfährt man bei den beiden anderen Gleichungen dieser Nummer. Die entsprechenden partiellen Differentialgleichungen sind resp.

$$\frac{\partial u}{\partial h} = k^2\frac{\partial u}{\partial k} + ku \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial h} + 4k^2\frac{\partial u}{\partial k} + 6ku = 0.$$

6. Die Hülfsgleichungen sind: $\frac{dx_1}{X_1 - x_1X_3} = \frac{dx_2}{X_2 - x_2X_3} = \frac{dz}{1}$, oder: $\frac{dx_1}{dz} = X_1 - x_1X_3$, $\frac{dx_2}{dz} = X_2 - x_2X_3$. Setzt man $x_1 = \frac{y_1}{y_3}$,

$x_2 = \frac{y_2}{y_3}$, wo y_3 eine noch zu bestimmende Function ist, so erhält man:

$$\frac{d y_1}{d z} - X_1 y_1 = \frac{y_1}{y_3}\left(\frac{d y_3}{d z} - X_3 y_3\right),\ \frac{d y_2}{d z} - X_2 y_2 = \frac{y_2}{y_3}\left(\frac{d y_3}{d z} - X_3 y_3\right).$$

Bestimmt man nun y_3 durch die Gleichung: $\frac{d y_3}{d z} = X_3 y_3$ und setzt allgemein: $X_\mu y_3 = a_{\mu,1} y_1 + a_{\mu,2} y_2 + a_{\mu,3} y_3 = Y_\mu$, so wird das System der Hülfsgleichungen: $\frac{d y_1}{d z} = Y_1$, $\frac{d y_2}{d z} = Y_2$, $\frac{d y_3}{d z} = Y_3$, ein System von drei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen, das man nach der 3. Aufgabe, §. 174, S. 311 leicht vollständig integriren kann. Ist dies geschehen, so findet man in bekannter Weise das allgemeine Integral der gegebenen partiellen Differentialgleichung. (Hesse, Crelle's J. Bd. 25, S. 171.)

7. (1) Setzt man: $x + y = 2\xi$, $x - y = 2\eta$, so wird die Gleichung: $\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 - 6\xi^2 = 2\eta^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2$, daher nach §. 195: $z - b = \int (6\xi^2 + a)^{1/2} d\xi + \int (2\eta^2 - a)^{1/2} d\eta$. Dasselbe Resultat hätte man auch nach der Charpit'schen Methode erhalten.

(2) Aus den Hülfsgleichungen

$$\frac{dp}{-p} = \frac{dq}{-q} = \frac{dx}{x - q} = \frac{dy}{y - p}$$

erhält man die Integrale: $q = ap$, $p = y + (y^2 + a)^{1/2}$ oder

$$q = x + (x^2 + a)^{1/2},\ p \pm q = (x \pm y) + \{(x \pm y)^2 + a\}^{1/2}.$$

Berechnet man nun p und q aus einem dieser Integrale und der gegebenen Differentialgleichung und setzt deren Werthe in

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

ein, so erhält man das vollständige Integral in den verschiedenen Formen: $z - c = \frac{(x + ay)^2}{2a}$, $z - c = xy + x(y^2 + a)^{1/2}$ oder $z - c = xy + y(x^2 + a)^{1/2}$, und $z - c = xy + \frac{1}{2}\int \{(x+y)^2 + a\}^{1/2} d(x+y) + \frac{1}{2}\int \{(x-y)^2 + a\}^{1/2} d(x-y)$. Letztere Form hätte man auch nach §. 195 erhalten können, wenn man zuerst

$$x + y = \xi,\ x - y = \eta$$

substituirt hätte.

(3) Man kann die Gleichung in der Form schreiben:

$$\frac{p - x}{x} = \frac{y}{q - y},$$

daher nach §. 195: $2z - b = (a + 1)\left(x^2 + \frac{y^2}{a}\right)$. Oder man dividire die Gleichung durch xy und setze $x^2 = \xi$, $y^2 = \eta$; dadurch erhält man die zur I. Hauptform gehörige Gleichung:

$$2\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}$$

und durch deren Integration dieselbe Lösung wie vorher. — Oder man substituire $x + y = \xi$, $x - y = \eta$; dadurch erhält man die zur III. Hauptform gehörige Gleichung:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 - \xi\frac{\partial z}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2 - \eta\frac{\partial z}{\partial \eta},$$

also:

$$4(z - b) = \xi^2 + \eta^2 + \xi(\xi^2 + a)^{1/2} + \eta(\eta^2 + a)^{1/2} \\ + \log\{[\xi + (\xi^2 + a)^{1/2}][\eta + (\eta^2 + a)^{1/2}]\}^a.$$

(4) Aus den Jacobi'schen Hülfsgleichungen erhält man die beiden Integrale: $F_1 = x_1 p_1 - x_2 p_2 = a_1, F_2 = x_1 p_1 - x_3 p_3 = a_2$, und es ist: $(F_1, F_2) = 0$. Berechnet man daher aus diesen und aus der gegebenen Gleichung die Grössen p_1, p_2, p_3 und setzt deren Werthe in $dz = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + p_3\,dx_3$ ein, so giebt die Integration dieses Ausdrucks das vollständige Integral der gegebenen Gleichung.

8. Die Gleichung der Fläche ist: $x^2 + y^2 = cz^2$.

9. Werden die aus der Gleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2f(x, y)\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

sich ergebenden Werthe von $\frac{dy}{dx}$ mit y_1', y_2' bezeichnet, so ist:

$$y_1' \cdot y_2' = -1,\ y_1' + y_2' = 2f(x, y) = 2z.$$

Die erste Relation sagt aus, dass die beiden Curven, denen die Werthe y_1' und y_2' angehören, sich rechtwinklig schneiden. Das Product der Krümmungen der beiden Curven im Schnittpunkte x, y ist, wenn ϱ_1 und ϱ_2 ihre Krümmungsradien sind, gleich

$$\frac{1}{\varrho_1}\cdot\frac{1}{\varrho_2} = \frac{y_1''}{(1 + y_1'^2)^{3/2}}\cdot\frac{y_2''}{(1 + y_2'^2)^{3/2}}.$$

Nun hat man aber: $(1 + y_1'^2)(1 + y_2'^2) = 4(1 + z^2)$; ferner ist: $y_1' = z + (1 + z^2)^{1/2}$, also: $y_1'' = \left(1 + \frac{z}{(1 + z^2)^{1/2}}\right)(p + q y_1')$, ebenso: $y_2'' = \left(1 - \frac{z}{(1 + z^2)^{1/2}}\right)(p + q y_2')$. Mithin:

$$\frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{1}{\varrho_2} = \frac{p^2 - q^2 + 2pqz}{8(1 + z^2)^{5/2}},$$

also, da z der Gleichung $p^2 - q^2 + 2pqz = c^2(1 + z^2)^{5/2}$ genügen soll: $\frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{1}{\varrho_2} = \frac{c^2}{8}$, d. h. das Product der Krümmungen der beiden Curven im Punkte x, y ist constant. — Ist z von y unabhängig, also $z = f(x)$, so ist $q = 0$, demnach:

$$cx = \int_0^z (1 + z^2)^{-5/4}\, dz.$$

Durch die Substitution $z = tang\, \vartheta\, (2 + tang^2 \vartheta)^{1/2}$ geht diese Gleichung über in: $cx = 2^{1/2} \int_0^{\vartheta} \left(1 - \frac{1}{2} sin^2 \vartheta\right)^{-1/2} cos^2 \vartheta\, d\vartheta$, mithin ist: $cx = 2^{3/2} E(2^{-1/2}, \vartheta) - 2^{1/2} F(2^{-1/2}, \vartheta)$.

10. Für den gegebenen Punkt als Coordinatenanfangspunkt und die gegebene Gerade als x-Achse ist die Gleichung der Kugelflächen: $x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x = 0$, wo α ein veränderlicher Parameter ist. Ist nun $F(x, y, z, \alpha) = 0$ die Gleichung einer Flächenschaar, so stellt $p \frac{\partial F}{\partial x} + q \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0$ die Bedingung dafür dar, dass eine andere Fläche, deren Tangentialebene die Richtungscoefficienten p, q, -1 hat, diese Flächenschaar rechtwinklig schneidet. Eliminirt man also α aus beiden Gleichungen, so erhält man die partielle Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien der gegebenen Flächenschaar. — In unserem Beispiel ergiebt sich als solche: $(y^2 + z^2 - x^2)p - 2xyq + 2xz = 0$, und das allgemeine Integral dieser ist nach Nr. 3 der 3. Aufgabe, §. 189: $x^2 + y^2 + z^2 = y\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$.

11. Die Coordinaten des Schnittpunktes der Normale mit der xy-Ebene sind: $\xi = x + zp$, $\eta = y + zq$; demnach soll sein: $zp = (\lambda - 1)x$, $zq = (\lambda - 1)y$. Die Differentialgleichung der gesuchten Fläche ist also: $\frac{p}{x} = \frac{q}{y}$, ihre endliche Gleichung allgemein: $z = \varphi(x^2 + y^2)$.

12. Sind $\varphi(x, y, z, \lambda) = 0$ und $\psi(x, y, z, \mu) = 0$ die Gleichungen einer Curvenschaar, so hat man, um die Gleichung einer darauf senkrechten Fläche zu finden, aus jenen Gleichungen und aus den Gleichungen

$$p \frac{\partial \varphi}{\partial x} + q \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \; p \frac{\partial \psi}{\partial x} + q \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

die Grössen λ und μ zu eliminiren. Man erhält so ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen, deren gemeinschaftliches Integral, wenn ein solches existirt, die endliche Gleichung der gesuchten Fläche ist. — In unserem Beispiel sind die Gleichungen der Curvenschaar, wenn $\frac{a}{c} = \lambda$, $\frac{b}{c} = \mu$ ist: $\cosh x = \lambda \cosh z$ und $\cosh y = \mu \cosh z$; ferner ist:

$$p \sinh x - \lambda \sinh z = 0, \; q \sinh y - \mu \sinh z = 0.$$

Hieraus folgt:

$$p = \frac{\cosh x}{\sinh x} \cdot \frac{\sinh z}{\cosh z}, \; q = \frac{\cosh y}{\sinh y} \cdot \frac{\sinh z}{\cosh z}.$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck $dz = p\,dx + q\,dy$ ein und integrirt, so findet man als Gleichung der gesuchten Fläche: $\sinh x \,.\, \sinh y = a \sinh z$.

13. Der in dieser Aufgabe enthaltene Satz gilt auch allgemein, nämlich: Sind $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ die Partialdeterminanten, welche bei der Entwickelung der Functionaldeterminante $\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$ mit $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ multiplicirt sind, so ist stets:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0,$$

wie sehr leicht zu erweisen, und umgekehrt: Sind $X, X_1, \ldots, X_n$ Functionen der $n + 1$ Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$, welche der Bedingung $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0$ genügen, so lässt sich der Ausdruck

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

darstellen durch $\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$, wo $f_1, f_2, \ldots, f_n$ willkürliche Functionen von $x, x_1, \ldots, x_n$ sind, so dass also $X, X_1, \ldots, X_n$

die zu $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ gehörigen Partialdeterminanten sind. (Vgl. Jacobi, Crelle's Journ. Bd. 27.)

14. Aus den beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda(YZ' - ZY'), \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda(ZX' - XZ'), \frac{\partial u}{\partial z} = \lambda(XY' - YX').$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

ein, so ergiebt sich daraus, dass, wenn beide Gleichungen eine gemeinschaftliche Lösung ausser $u = const$ zulassen sollen, der Ausdruck

$$\lambda\{(YZ' - ZY')dx + (ZX' - XZ')dy + (XY' - YX')dz\}$$

ein exactes Differential oder also die Gleichung

$$(YZ' - ZY')dx + (ZX' - XZ')dy + (XY' - YX')dz = 0$$

durch Multiplication mit einer gewissen Function von x, y, z eine exacte Differentialgleichung werden muss. Ist $f(x, y, z) = C$ das Integral derselben, so ist jede willkürliche Function $\varphi\{f(x, y, z)\} = u$ eine gemeinschaftliche Lösung der gegebenen Gleichungen. — Die beispielsweise angeführten Gleichungen haben keine gemeinschaftliche Lösung ausser $u = const.$

15. Die verallgemeinerten Lagrange'schen Hülfsgleichungen sind bei dieser Aufgabe:

$$\frac{dx_1}{-1} = \frac{dx_2}{-3x_2 - 2x_3 - x_5 p_5} = \frac{dx_3}{-4x_2 - 5x_3 + x_5 p_5} = \frac{dx_4}{x_5 \frac{p_5^2}{p_4^2}}$$

$$= \frac{dx_5}{-x_4 - x_5(p_2 - p_3) - 2x_5 \frac{p_5}{p_4}} = \frac{dp_1}{0} = \frac{dp_2}{3p_2 + 4p_3}$$

$$= \frac{dp_3}{2p_2 + 5p_3} = \frac{dp_4}{p_5} = \frac{dp_5}{(p_2 - p_3)p_5 + \frac{p_5^2}{p_4}}.$$

Aus dem ersten, siebenten und achten Bruche folgen durch verschiedene Combination die beiden Integrale:

$$F_1 = (p_2 - p_3)e^{x_1} = a_1, \; F_2 = (p_2 + 2p_3)e^{7x_1} = 3a_2.$$

Durch Combination des vierten, fünften, neunten und zehnten Bruches erhält man ferner das Integral: $F_3 = x_4 p_4 + x_5 p_5 = a_3$.

Endlich giebt eine Combination der letzten vier Brüche das Integral: $F_4 = \frac{p_5}{p_4} e^{p_3 - p_2} = a_4$. Alle diese Integrale erfüllen die Integrabilitätsbedingungen, denn es ist:

$(F_1, F_2) = (F_1, F_3) = (F_1, F_4) = (F_2, F_3) = (F_2, F_4) = (F_3, F_4) = 0.$

Berechnet man daher aus diesen vier Integralen und aus der gegebenen Gleichung die Grössen p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, so findet man:

$$p_2 = a_2 e^{-7x_1} + \frac{2}{3} a_1 e^{-x_1},\quad p_3 = a_2 e^{-7x_1} - \frac{1}{3} a_1 e^{-x_1},$$

$$p_4 = \frac{a_3}{x_4 + a_4 x_5 e^{a_1 e^{-x_1}}},\quad p_5 = \frac{a_3 a_4 e^{a_1 e^{-x_1}}}{x_4 + a_4 x_5 e^{a_1 e^{-x_1}}},$$

$$p_1 = -\frac{a_1}{3}(2x_2 - x_3) e^{-x_1} - 7a_2 (x_2 + x_3) e^{-7x_1} - a_3 a_4 e^{a_1 e^{-x_1}} - \frac{a_1 a_3 a_4 e^{-x_1} e^{a_1 e^{-x_1}}}{x_4 + a_4 x_5 e^{a_1 e^{-x_1}}}.$$

Setzt man diese Werthe in $dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_5 dx_5$ ein, so findet man als vollständiges Integral der gegebenen Gleichung:

$$z = a + \frac{a_1}{3}(2x_2 - x_3) e^{-x_1} + a_2 (x_2 + x_3) e^{-7x_1} - a_3 a_4 \int e^{a_1 e^{-x_1}} dx_1 + a_3 \log \{x_4 + a_4 x_5 e^{a_1 e^{-x_1}}\}.$$

(Imschenetsky in Grunert's Archiv, Bd. 50, S. 388 findet nach weitläufigerer Rechnung ein Integral von complicirterer Form; dasselbe ist reproducirt bei Mansion, Théorie des équat. aux dériv. part. p. 169.)

Die gegebene Gleichung wird linear, wenn man

$$Z = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_5 x_5 - z$$

setzt und $p_1, p_2, \ldots, p_5$ als die neuen unabhängigen Veränderlichen betrachtet. Bezeichnet man dieselben als solche mit $X_1, X_2, \ldots, X_5$, so wird:

$$x_1 = \frac{\partial Z}{\partial X_1} = P_1, \ldots, x_5 = \frac{\partial Z}{\partial X_5} = P_5,\ z = P_1 X_1 + P_2 X_2 + \cdots + P_5 X_5 - Z,$$

und die vorgelegte Gleichung geht über in:

$$X_1 + (3X_2 + 4X_3) P_2 + (2X_2 + 5X_3) P_3 + X_5 P_4 + \left(X_2 - X_3 + \frac{X_5}{X_4}\right) X_5 P_5 = 0.$$

Da P_1 hierin nicht vorkommt, so kann man X_1 für die Integration dieser als constant betrachten. Die Lagrange'schen Hülfsgleichungen sind:

$$\frac{d\,X_2}{3\,X_2 + 4\,X_3} = \frac{d\,X_3}{2\,X_2 + 5\,X_3} = \frac{d\,X_4}{X_5} = \frac{d\,X_5}{X_5\left(X_2 - X_3 + \frac{X_5}{X_4}\right)} = \frac{d\,Z}{-X_1}.$$

Aus diesen folgen die Integrale:

$$\frac{X_5}{X_4}\,e^{X_3 - X_2} = A_1,\quad \frac{X_2 + 2\,X_3}{(X_2 - X_3)^7} = A_2,\quad \frac{Z}{X_1} + log\,(X_2 - X_3) = A_3$$

und

$$\frac{X_4}{X_5}\,e^{X_2 - X_3}\,log\,X_4 - \int e^{X_2 - X_3}\,\frac{d\,(X_2 - X_3)}{X_2 - X_3} = A_4.$$

Eine willkürliche Function der linken Seiten dieser Integralgleichungen gleich 0 gesetzt, stellt das allgemeine Integral der transformirten Gleichung dar. Bezeichnet man dasselbe mit

$$\varphi\,(Z, X_1, X_2, \ldots, X_5) = 0,$$

so findet man eine Lösung der gegebenen, wenn man aus dieser Gleichung, aus den fünf folgenden:

$$x_1\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,Z} + \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,X_1} = 0, \ldots, x_5\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,Z} + \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,X_5} = 0$$

und aus

$$Z = x_1\,X_1 + x_2\,X_2 + \cdots + x_5\,X_5 - z$$

die Grössen X_1, X_2, ..., X_5 und Z eliminirt.

16. Nach §. 201 findet man sehr leicht das vollständige Integral:

$$z = a_1\,x^2\,y - a_1\,x^3 - \frac{\alpha + b\,log\,a_1}{3\,x} + a_2\,x^2.$$

17. Bezeichnet man die linken Seiten der gegebenen Gleichungen mit F_1, F_2, F_3, so findet man leicht:

$$(F_1, F_2) = (F_1, F_3) = (F_2, F_3) = 0.$$

Es sind daher die Gleichungen simultan integrirbar. Stellt man sie in der einfacheren Form dar:

$$p_1 = -\frac{x_3^2}{2\,x_2\,x_4}\,p_4 + \frac{x_3^2}{2\,x_2\,x_4^2},\quad p_2 = \frac{x_4}{2\,x_2}\,p_4 + \frac{1}{2\,x_2},$$

$$p_3 = -\frac{x_1\,x_3}{x_2\,x_4}\,p_4 + \frac{x_1\,x_3}{x_2\,x_4^2}$$

und bezeichnet die rechten Seiten mit ψ_1, ψ_2, ψ_3, so hat man ein gemeinschaftliches Integral der drei Gleichungen

$$(p_1 - \psi_1, \varphi) = 0, \quad (p_2 - \psi_2, \varphi) = 0, \quad (p_3 - \psi_3, \varphi) = 0$$

zu suchen. Eine Lösung der zweiten Gleichung ist: $\varphi = x_4 p_4$. Setzt man dies in die linke Seite der dritten Gleichung ein, so erhält man:

$$(p_3 - \psi_3, \varphi) = \varphi_1 = \frac{2 x_1 x_3}{x_2 x_4^2} (x_4 p_4 - 1).$$

Wiederholt man dies mit φ_1, so wird:

$$(p_3 - \psi_3, \varphi_1) = \varphi_2 = \frac{2 x_1}{x_2 x_4^2} (x_4 p_4 - 1) = \frac{\varphi_1}{x_3}.$$

Ferner findet man: $(p_3 - \psi_3, \varphi_2) = 0$; es ist demnach

$$\varphi_2 = \frac{2 x_1}{x_2 x_4^2} (x_4 p_4 - 1)$$

eine gemeinschaftliche Lösung der zweiten und dritten Gleichung. Setzt man nun dies in die linke Seite der ersten Gleichung ein, so folgt:

$$(p_1 - \psi_1, \varphi_2) = \varphi' = \frac{2}{x_2 x_4^2} (x_4 p_4 - 1) = \frac{\varphi_2}{x_1}.$$

Wird dies mit φ' wiederholt, so ergiebt sich: $(p_1 - \psi_1, \varphi') = 0$. Es ist demnach $\dfrac{2 (x_4 p_4 - 1)}{x_2 x_4^2} = 4 a$ die gemeinschaftliche Lösung der drei Hülfsgleichungen

$$(p_1 - \psi_1, \varphi) = 0, \quad (p_2 - \psi_2, \varphi) = 0, \quad (p_3 - \psi_3, \varphi) = 0.$$

Berechnet man jetzt p_1, p_2, p_3, p_4, so folgt:

$$p_4 = \frac{1}{x_4} + 2 a x_2 x_4, \; p_1 = - a x_3^2, \; p_2 = \frac{1}{x_2} + a x_4^2, \; p_3 = - 2 a x_1 x_3,$$

und somit erhält man als gemeinschaftliches Integral der drei gegebenen Gleichungen:

$$z - b = a (x_2 x_4^2 - x_1 x_3^2) + log (x_2 x_4).$$

18. (α) Multiplicirt man die erste Gleichung mit x_4, die zweite mit x_3, sodann die erste mit x_3, die zweite mit x_4 und addirt jedesmal die Producte, so erhält man das äquivalente Gleichungssystem:

$$F_1 = x_4 p_1 + x_3 p_2 - x_2 p_3 - x_1 p_4 = 0,$$
$$F_2 = x_3 p_1 + x_4 p_2 - x_1 p_3 - x_2 p_4 = 0$$

und es ist: $(F_1, F_2) = 0$. Aus den Hülfsgleichungen der ersten Gleichung findet man leicht die beiden Integrale:

$$F_3 = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 = 4\,a,$$
$$F_4 = p_1 x_2 + p_2 x_1 + p_3 x_4 + p_4 x_3 = 4\,b,$$

welche zugleich sämmtliche Integrabilitätsbedingungen, d. i. die Gleichungen:

$$(F_1, F_3) = (F_2, F_3) = (F_1, F_4) = (F_2, F_4) = (F_3, F_4) = 0$$

erfüllen. Die Berechnung der Werthe von p_1, p_2, p_3, p_4 ist leicht, wenn man zunächst $F_1 + F_2$, $F_3 + F_4$, sodann $F_1 - F_2$, $F_3 - F_4$ bildet. Man erhält:

$$\left.\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix}\right\} = 2\,(a+b)\,\frac{x_1 + x_2}{(x_1+x_2)^2+(x_3+x_4)^2} \pm 2\,(a-b)\,\frac{x_1 - x_2}{(x_1-x_2)^2+(x_3-x_4)^2},$$

$$\left.\begin{matrix} p_3 \\ p_4 \end{matrix}\right\} = 2\,(a+b)\,\frac{x_3 + x_4}{(x_1+x_2)^2+(x_3+x_4)^2} \pm 2\,(a-b)\,\frac{x_3 - x_4}{(x_1+x_2)^2+(x_3+x_4)^2}.$$

Setzt man diese Werthe in $dz = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + p_3\,dx_3 + p_4\,dx_4$ ein und integrirt, so findet man als vollständiges gemeinschaftliches Integral der Gleichungen (α):

$$z - c = (a+b)\,log\,\{(x_1 + x_2)^2 + (x_3 + x_4)^2\}$$
$$+ (a-b)\,log\,\{(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2\}.$$

(β) Es seien wieder die linken Seiten der gegebenen Gleichungen bezeichnet mit F_1 und F_2. Dann ist $(F_1, F_2) = 0$. Ein gemeinschaftliches Integral der Hülfsgleichungen $(F_1, \varphi) = 0$, $(F_2, \varphi) = 0$ ist ferner: $F_3 = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 = 2\,a_1$. Es bleibt daher noch eine gemeinschaftliche Lösung von $(F_1, \varphi) = 0$, $(F_2, \varphi) = 0$, $(F_3, \varphi) = 0$ zu suchen. Eine Lösung der ersten und dritten ist $\varphi = x_1 p_1$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, so ergiebt sich: $(F_2, \varphi) = -\,x_3 p_1 - x_1 p_3 = \varphi_1$. Substituirt man dies nochmals in die linke Seite von $(F_2, \varphi) = 0$, so folgt:

$$(F_2, \varphi_1) = 2\,(p_3 x_3 - p_1 x_1) = \varphi_2.$$

Ferner ist: $(F_2, \varphi_2) = 4\,(p_1 x_3 + x_1 p_3) = -\,4\,\varphi_1$. Somit ist das gemeinschaftliche Integral bestimmt durch $\dfrac{d\,\varphi_1}{\varphi_2} = \dfrac{d\,\varphi_2}{-4\,\varphi_1}$, dasselbe ist daher: $\varphi_2^2 + 4\,\varphi_1^2 = 4\,a_2$ oder: $F_4 = (x_1^2 + x_3^2)(p_1^2 + p_3^2) = a_2$. Berechnet man nun aus den Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 2\,a_1$, $F_4 = a_2$ die Grössen p_1, p_2, p_3, p_4, so findet man:

$$p_1 = \frac{a_1 x_1 + a' x_3}{x_1^2 + x_3^2}, \quad p_3 = \frac{a_1 x_3 - a' x_1}{x_1^2 + x_3^2}, \quad p_2 = \frac{a_1 x_2 - a' x_4}{x_2^2 + x_4^2},$$
$$p_4 = \frac{a_1 x_4 + a' x_2}{x_2^2 + x_4^2},$$

wo $a' = (a_2 - a_1^2)^{1/2}$ ist. Demnach ergiebt sich als das vollständige gemeinschaftliche Integral der beiden Gleichungen (β):

$$z - c = \frac{1}{2} a_1 \log \{(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_4^2)\}$$
$$+ a' \left(arc\ tang \frac{x_1}{x_3} + arc\ tang \frac{x_4}{x_2} \right),$$

oder in etwas anderer Form:

$$z - c = a \log \{(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_4^2)\} + b\ arc\ tang \frac{x_1 x_2 + x_3 x_4}{x_1 x_4 - x_2 x_3}.$$

X. Capitel.

§. 228.

1. Aufgabe. $z = axy + \varphi(y) + \psi(x)$.

2. Aufgabe.

(1) $z = \int e^{-\int M dy} \{\int N e^{\int M dy} dy + \varphi(x)\} dx + \psi(y)$.

(2) $z = \int e^{-\int M dx} \{\int N e^{\int M dx} dx + \varphi(y)\} dy + \psi(x)$.

§. 231.

Aufgabe. Durch Differentiation von $F(\varphi, \psi, \chi) = 0$ wird:

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} \varphi_{x_i} + \frac{\partial F}{\partial \psi} \psi_{x_i} + \frac{\partial F}{\partial \chi} \chi_{x_i} = 0 \ (i = 1, 2, 3),$$

wo φ_{x_i} den Differentialquotienten von φ nach x_i bedeutet. Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen die Grössen

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \psi}, \frac{\partial F}{\partial \chi},$$

so erhält man die Differentialgleichung: $\Sigma \pm \varphi_{x_1} \cdot \psi_{x_2} \cdot \chi_{x_3} = 0$. Nun ist:

$$\varphi_{x_i} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p_i \right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_3} \frac{\partial p_3}{\partial x_i} \right)$$
$$= a_{1i} + b_{1i},$$

ebenso:

$$\psi_{x_i} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial z} p_i\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial p_3}\frac{\partial p_3}{\partial x_i}\right)$$
$$= a_{2i} + b_{2i} \text{ und } \chi_{x_i} = a_{3i} + b_{3i}.$$

Setzt man diese Werthe ein, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11}, & a_{21} + b_{21}, & a_{31} + b_{31} \\ a_{12} + b_{12}, & a_{22} + b_{22}, & a_{32} + b_{32} \\ a_{13} + b_{13}, & a_{23} + b_{23}, & a_{33} + b_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante lässt sich in acht dreireihige Determinanten zerlegen, deren einzelne Colonnen nur von Grössen a resp. Grössen b gebildet werden. Da nun nach Voraussetzung sämmtliche ersten Unterdeterminanten der Determinante

$$\Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial p_3}$$

gleich Null sind, so verschwinden von diesen acht Determinanten vier, nämlich diejenigen, in welchen zwei oder mehr Colonnen aus den Grössen b gebildet sind, und es bleibt:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21}, & a_{31} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{32} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11}, & a_{21}, & a_{31} \\ b_{12}, & a_{22}, & a_{32} \\ b_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & b_{21}, & a_{31} \\ a_{12}, & b_{22}, & a_{32} \\ a_{13}, & b_{23}, & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21}, & b_{31} \\ a_{12}, & a_{22}, & b_{32} \\ a_{13}, & a_{23}, & b_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist linear in den Grössen $b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{33}$, somit auch in den Grössen $\frac{\partial p_1}{\partial x_1}, \frac{\partial p_1}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial p_3}{\partial x_3}$ und die Coefficienten dieser letzteren sind Functionen von $z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3$. Ordnet man nach den Differentialquotienten von z, wobei zu beachten, dass $\frac{\partial p_\varkappa}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_\varkappa}$ ist, so erhält man ein Resultat von der Form:

$$R_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + R_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + R_3 \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} + R_{12} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + R_{23} \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3}$$
$$+ R_{31} \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_1} + \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} = 0.$$

Dabei ist:

$$R_\lambda = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial p_\lambda}, & \frac{\partial \psi}{\partial p_\lambda}, & \frac{\partial \chi}{\partial p_\lambda} \\ a_{1\mu}, & a_{2\mu}, & a_{3\mu} \\ a_{1\nu}, & a_{2\nu}, & a_{3\nu} \end{vmatrix},$$

$$R_{\lambda\mu} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial p_\lambda}, & \frac{\partial \psi}{\partial p_\lambda}, & \frac{\partial \chi}{\partial p_\lambda} \\ a_{1\nu}, & a_{2\nu}, & a_{3\nu} \\ a_{1\lambda}, & a_{2\lambda}, & a_{3\lambda} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial p_\mu}, & \frac{\partial \psi}{\partial p_\mu}, & \frac{\partial \chi}{\partial p_\mu} \\ a_{1\nu}, & a_{2\nu}, & a_{3\nu} \\ a_{1\mu}, & a_{2\mu}, & a_{3\mu} \end{vmatrix},$$

wo λ, μ, ν die drei Zahlen 1, 2, 3 in cyklischer Vertauschung sind. Dass diese Coefficienten R in der That die Relation

$$R_1 R_{23}^2 + R_2 R_{31}^2 + R_3 R_{12}^2 - 4 R_1 R_2 R_3 - R_{12} R_{23} R_{31} = 0$$

erfüllen, kann man durch unmittelbare Ausrechnung verificiren, wobei zu beachten ist, dass nach Voraussetzung sämmtliche ersten Unterdeterminanten von $\Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \frac{\partial \chi}{\partial p_3}$ gleich Null sein sollen. Indessen wird die Rechnung ziemlich weitläufig.

§. 241.

3. Aufgabe.

(1) Ist $k \gtrless 1$, so hat man die beiden Zwischenintegrale:

$$q - \frac{1 - k_1}{k a} p = \varphi_1 \{y + a (1 - k_1) x\}$$

und

$$q - \frac{1 + k_1}{k a} p = \varphi_2 \{y + a (1 + k_1) x\},$$

wo $k_1 = (1 - k)^{1/2}$ ist. Berechnet man hieraus p und q, setzt deren Werthe in $dz = p\,dx + q\,dy$ ein und macht

$$\frac{1 + k_1}{2 k_1} \int \varphi_1 (t)\, dt = \varphi (t), \quad \frac{1 - k_1}{2 k_1} \int \varphi_2 (t)\, dt = \psi (t),$$

so erhält man als allgemeines Integral:

$$z = \varphi \{y + a (1 - k_1) x\} + \psi \{y + a (1 + k_1) x\}.$$

Ist $k = 1$, so sind die beiden Hülfsgleichungen: $dy + a\,dx = 0$ und $dp\,dy + a^2\,dq\,dx = 0$, und aus diesen folgt das Zwischenintegral: $p - a q = \varphi (y + a x)$. Integrirt man dieses nach der Lagrange'schen Methode, so findet man als allgemeines Integral:

$$z = x \varphi (y + a x) + \psi (y + a x).$$

(2) Die Hülfsgleichungen sind: $x\,dy - y\,dx = 0$ und $x^2\,dp\,dy + y^2\,dq\,dx = 0$. Aus beiden folgt:

$$\frac{y}{x} = A \quad \text{und} \quad x\,dp + y\,dq = 0.$$

Letztere führt, mit $dz = p\,dx + q\,dy$ combinirt, zu dem Zwischenintegral: $xp + yq - z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ und dieses liefert, nach der Lagrange'schen Methode integrirt, das allgemeine Integral:

$$z = x\psi\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

oder, was dasselbe, $z = y\,\psi\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

(3) Die Hülfsgleichungen sind: $q\,dy + p\,dx = 0$ und $q^2\,dp\,dy + p^2\,dq\,dx = 0$. Aus ihnen folgt: $\frac{p}{q} = A$. Ferner giebt die erste, mit $dz = p\,dx + q\,dy$ verbunden, das Integral $z = B$; daher ist das Zwischenintegral: $\frac{p}{q} = \varphi(z)$. Aus diesem folgt nach der Lagrange'schen Methode das allgemeine Integral:

$$\psi(z) = y + x\,\varphi(z).$$

(4) Allgemeines Integral: $z = \varphi(xy) + x\,\psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

(5) Ein Zwischenintegral ist: $p + a\,q = e^{-2abx}\,\varphi_1(y + ax)$. Die Lagrange'schen Hülfsgleichungen desselben sind:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{a} = \frac{dz}{e^{-2abx}\,\varphi_1(y + ax)}.$$

Daher: $y - ax = C$ und sodann: $dz = e^{-2abx}\,\varphi_1(2ax + C)\,dx$. Setzt man $\int e^{-bu}\,\varphi_1(u)\,du = \varphi(u)$, so giebt die Integration dieser letzteren Gleichung: $z = e^{bC}\,\varphi(2ax + C) + C_1$, und somit ist das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung:

$$z = e^{b(y - ax)}\,\varphi(y + ax) + \psi(y - ax).$$

5. Aufgabe.

(1) Die Gleichung zur Bestimmung von λ ist:

$$a^2\lambda^2 - 1 = 0, \quad \text{also} \quad \lambda_1 = \frac{1}{a},\ \lambda_2 = -\frac{1}{a}.$$

Man erhält so die beiden Zwischenintegrale:

$$a\,y + p = \varphi_1(ax - q) \quad \text{und} \quad a\,y - p = \varphi_2(ax + q).$$

Nimmt man einen besonderen Fall des letzteren, etwa $ay - p = \alpha$, so wird $\varphi_1(ax - q) = 2ay - \alpha$, also umgekehrt:

$$ax - q = \Phi(2ay - \alpha),$$

somit:

$$z = axy - \alpha x + \beta - \int \Phi(2ay - \alpha)\, dy,$$

oder, wenn man $\int \Phi(2ay - \alpha)\, dy = -\varphi(2ay - \alpha)$ setzt:

$$z = axy - \alpha x + \beta + \varphi(2ay - \alpha).$$

Das allgemeine Integral erhält man hieraus, wenn man $\beta = \psi(\alpha)$ setzt, wo ψ eine willkürliche Function bezeichnet, und sodann α aus den beiden Gleichungen $z = axy - \alpha x + \psi(\alpha) + \varphi(2ay - \alpha)$ und $0 = -x + \psi'(\alpha) - \varphi'(2ay - \alpha)$ eliminirt.

(2) Setzt man, wie in der 4. Aufgabe S. 422, $\lambda m + U = 0$, so wird die Gleichung zur Bestimmung von m: $m^2 - (p + x)m = 0$, also $m_1 = p + x$, $m_2 = 0$. Demnach erhält man die beiden Systeme von Hülfsgleichungen:

$$y\,dx + y\,dp - (p + x)\,dy = 0, \quad q\,dy + y\,dq = 0$$

und

$$y\,dx + y\,dp = 0, \quad q\,dy + y\,dq - (p + x)\,dx = 0.$$

Aus dem ersten Systeme ergiebt sich leicht das Zwischenintegral der gegebenen Gleichung: $qy = \varphi\left(\frac{p + x}{y}\right)$. Verbindet man dieses mit dem aus der ersten Gleichung des zweiten Systems sich ergebenden Integrale $p + x = \alpha$ (dem einzigen, welches dieses System darbietet) und mit der Gleichung $dz = p\,dx + q\,dy$ und setzt man die bei der Integration des letzteren Ausdrucks neu auftretende Constante gleich einer willkürlichen Function $\psi(\alpha)$ von α, so findet man das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung durch Elimination von α aus den Gleichungen:

$$z = \alpha x - \frac{1}{2} x^2 + \varphi\left(\frac{\alpha}{y}\right) + \psi(\alpha)$$

und

$$0 = x + \frac{1}{y} \varphi'\left(\frac{\alpha}{y}\right) + \psi'(\alpha).$$

Dasselbe Resultat hätte man gefunden, wenn man das Zwischenintegral $qy = \varphi\left(\frac{p + x}{y}\right)$ nach der Charpit'schen Methode integrirt hätte, da $p + x = \alpha$ ein Integral der Charpit'schen Hülfsgleichungen ist.

(3) Die beiden Systeme von Hülfsgleichungen sind hier:

$$x\,dx - pq\,dp - py\,dy = 0, \quad 2py\,dy - p^2 dq - x\,dx = 0$$

und

$$2qy\,dy - pq\,dq - py\,dx = 0, \quad px\,dx - p^2 q\,dp - qx\,dy = 0.$$

Aber nur das erstere liefert integrable Combinationen, und zwar findet man leicht die Integrale:

$$pq - \frac{1}{2}y^2 = A \quad \text{und} \quad p^2 q - \frac{1}{2}x^2 = B,$$

so dass ein Zwischenintegral der gegebenen Gleichung lautet:

$$p^2 q - \frac{1}{2}x^2 = \varphi\left(pq - \frac{1}{2}y^2\right).$$

Eine weitere Integration des letzteren nach der Charpit'schen Methode erweist sich als nicht ausführbar; dagegen findet man particuläre Lösungen der gegebenen Gleichung, wenn man die vorher erhaltenen Gleichungen $pq - \frac{1}{2}y^2 = A$ und $p^2 q - \frac{1}{2}x^2 = B$ nach dieser Methode integrirt. Man erhält so resp.:

$$z = A_1 x + \frac{A}{A_1} y + \frac{1}{6A_1} y^3 + A_2$$

und

$$z = \frac{1}{B_1}\int\left(B + \frac{1}{2}x^2\right)^{1/2} dx + B_1^2 y + B_2.$$

In §. 271, S. 463 wird gezeigt, wie man aus jedem solchen particulären Integrale das allgemeine finden kann.

7. Aufgabe.

(1) Man erhält hier nur ein System von Hülfsgleichungen, nämlich: $p\,dx - x\,dp = 0$ und $q\,dy - y\,dq = 0$, so dass das Zwischenintegral der gegebenen Gleichung ist: $F\left(\frac{p}{x}, \frac{q}{y}\right) = 0$. Als particuläres Integral der gegebenen Gleichung erhält man, wenn man $\frac{p}{x} = 2a$, $\frac{q}{y} = 2b$ setzt: $z = ax^2 + by^2 + c$ und das allgemeine Integral findet man, wenn man c aus den Gleichungen $z = \varphi(c)x^2 + \psi(c)y^2 + c$ und $0 = \varphi'(c)x^2 + \psi'(c)y^2 + 1$ eliminirt.

(2) Man erhält nur ein System von Hülfsgleichungen, nämlich:

$$p\,dx + pq^2\,dp - 2q\,dy = 0 \text{ und } q\,dy + p^2 q\,dq - 2p\,dx = 0.$$

Hieraus folgen leicht die Integrale: $q^2 p - 3x = a$, $p^2 q - 3y = b$, so dass das Zwischenintegral der gegebenen Gleichung lautet:

$$F(q^2 p - 3x, p^2 q - 3y) = 0.$$

Als particuläres Integral der gegebenen Gleichung ergiebt sich:

$$(z + c)^3 = (a + 3x)(b + 3y),$$

und das allgemeine findet man, wenn man c aus den beiden Gleichungen $(z + c)^3 = [\varphi(c) + 3x][\psi(c) + 3y]$ und $3(z + c)^2 = \{\varphi(c) + 3x\}\psi'(c) + \{\psi(c) + 3y\}\varphi'(c)$ eliminirt.

(3) Man erhält nur das eine System von Hülfsgleichungen:

$$(1 + p^2 + q^2)^{-1/2} dp + pq\,dy + (1 + p^2)\,dx = 0$$

und

$$(1 + p^2 + q^2)^{-1/2} dq + pq\,dx + (1 + q^2)\,dy = 0.$$

Hieraus folgt, wenn man einmal dy, das andere Mal dx eliminirt und die entstehenden Gleichungen integrirt:

$$(x - a)(1 + p^2 + q^2)^{1/2} + p = 0,\quad (y - b)(1 + p^2 + q^2)^{1/2} + q = 0.$$

Bestimmt man hieraus die Werthe von p und q, setzt dieselben in $dz = p\,dx + q\,dy$ ein und integrirt, so erhält man das particuläre Integral der gegebenen Gleichung:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 1,$$

und das allgemeine findet man, indem man c aus den beiden Gleichungen

$$\{x - \varphi(c)\}^2 + \{y - \psi(c)\}^2 + (z - c)^2 = 1$$

und

$$\{x - \varphi(c)\}\varphi'(c) + \{y - \psi(c)\}\psi'(c) + z - c = 0$$

eliminirt.

8. Aufgabe. Durch Auflösung der Gleichung $\varphi(x, y, z, a, b, c) = 0$ nach z erhalte man: $z = \vartheta(x, y, a, b, c)$, wo b und c als Functionen von a aus den Gleichungen $\psi(a, b, c) = 0$ und $\chi(a, b, c) = 0$ zu bestimmen sind. Um die Enveloppe zu erhalten, hat man a nicht mehr als eine Constante, sondern als eine Function von x, y, z zu betrachten, welche mittelst der Gleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial a} + \frac{\partial \vartheta}{\partial b}\frac{db}{da} + \frac{\partial \vartheta}{\partial c}\frac{dc}{da} = 0$$

zu bestimmen ist. Es gelten daher auch für die Enveloppe die Gleichungen: $p = \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$, $q = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}$. Differentiirt man diese Gleichungen nochmals nach x und y und setzt der Abkürzung wegen:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial a \partial x} = A, \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial b \partial x} = B, \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial c \partial x} = C,$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial a \partial y} = A', \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial b \partial y} = B', \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial c \partial y} = C',$$

so erhält man die Gleichungen:

$$r = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + A \frac{\partial a}{\partial x} + B \frac{\partial b}{\partial x} + C \frac{\partial c}{\partial x},$$

$$s = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial y} + A \frac{\partial a}{\partial y} + B \frac{\partial b}{\partial y} + C \frac{\partial c}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial y} + A' \frac{\partial a}{\partial x} + B' \frac{\partial b}{\partial x} + C' \frac{\partial c}{\partial x},$$

$$t = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + A' \frac{\partial a}{\partial y} + B' \frac{\partial b}{\partial y} + C' \frac{\partial c}{\partial y}.$$

Hieraus folgt:

$$\left(s - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(r - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}\right)\left(t - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}\right)$$

$$= (A B' - A' B)\left(\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y}\right)$$

$$+ (B C' - B' C)\left(\frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial y}\right)$$

$$+ (C A' - C' A)\left(\frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y}\right).$$

Die zweiten Factoren der drei Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung verschwinden aber nach §. 10, da b und c blosse Functionen von a sind. Somit ergiebt sich:

$$\left(s - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(r - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}\right)\left(t - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}\right) = 0$$

oder:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} r - 2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial y} s + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} t - (rt - s^2) = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

Diese Gleichung ist aber von der Form:

$$Rr + Ss + Tt + U(rt - s^2) = V$$

und ihre Coefficienten genügen, wie man sieht, der Bedingung

$$S^2 - 4(RT + UV) = 0.$$

§. 242.

1. Aufgabe. Durch die Substitutionen $Z = px + qy - z$, $X = p$, $Y = q$, $x = P$, $y = Q$ geht die Gleichung $q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0$ über in: $X^2 R + 2XYS + Y^2 T = 0$, deren allgemeines Integral nach Nr. 2 der 3. Aufgabe in §. 241 lautet:

$$Z = X\,\Psi\left(\frac{Y}{X}\right) + \varphi\left(\frac{Y}{X}\right).$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man nach X und Y differentiirt und für X, Y, Z, P, Q ihre Werthe restituirt:

$$x = \psi\left(\frac{q}{p}\right) - \frac{q}{p}\,\psi'\left(\frac{q}{p}\right) - \frac{q}{p^2}\,\varphi'\left(\frac{q}{p}\right),\quad y = \psi'\left(\frac{q}{p}\right) + \frac{1}{p}\,\varphi'\left(\frac{q}{p}\right),$$

$$px + qy - z = p\,\psi\left(\frac{q}{p}\right) + \varphi\left(\frac{q}{p}\right).$$

Aus der ersten und zweiten von diesen Gleichungen folgt:

$$px + qy = p\,\psi\left(\frac{q}{p}\right),$$

daher mit Rücksicht auf die dritte: $\varphi\left(\frac{q}{p}\right) = -z$, oder umgekehrt: $\frac{q}{p} = \Phi(z)$. Setzt man diesen Werth in die Gleichung $x + \frac{q}{p}y = \psi\left(\frac{q}{p}\right)$ ein und macht $\psi\{\Phi(z)\} = \Psi(z)$, so folgt als allgemeines Integral von $q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0$: $x + y\Phi(z) = \Psi(z)$. Dasselbe stimmt, wie man leicht erkennt, mit dem in Nr. 3 der 3. Aufgabe des §. 241 überein.

2. Aufgabe.

(1) Die transformirte Gleichung ist:

$$PQS + Z(RT - S^2) = 0.$$

Die beiden Systeme von Hülfsgleichungen hierfür sind: $dP = 0$, $ZdQ - PQdX = 0$ und $dQ = 0$, $ZdP - PQdY = 0$. Verbindet man mit jedem derselben die Gleichung:

$$dZ - PdX - QdY = 0,$$

so erhält man leicht die beiden Zwischenintegrale:

$$Z = Q\{Y + \Phi(P)\} \quad \text{und} \quad Z = P\{X + \Psi(Q)\},$$

Nimmt man die speciellen Fälle: $Z = Q(Y + \beta)$, $Z = P(X + \alpha)$,

so findet man ein particuläres Integral der transformirten Gleichung in der Form: $\gamma Z = (X + \alpha)(Y + \beta)$ und hieraus leicht ein particuläres Integral der gegebenen Gleichung in der Form: $z = \gamma x y - \alpha x - \beta y$, woraus man dann nach §. 271 auch das allgemeine Integral erhalten kann. — Man kann aber auch jedes der beiden Zwischenintegrale nach der Charpit'schen Methode integriren. Nehmen wir $Z = Q[Y + \Phi(P)]$, so giebt eine der Charpit'schen Hülfsgleichungen $dQ = 0$, also $Q = a$, daher: $a\Phi(P) = Z - aY$ oder umgekehrt: $P = \varphi_1\left(\frac{Z - aY}{a}\right)$. Setzt man die Werthe von Q und P in $dZ = P\,dX + Q\,dY$ ein und integrirt, so folgt:

$$X - b = \int \frac{d(Z - aY)}{\varphi_1\left(\frac{Z - aY}{a}\right)}, \quad \text{also:} \quad X - b = a\varphi\left(\frac{Z - aY}{a}\right).$$

Das allgemeine Integral ergiebt sich, wenn man $b = \psi(a)$ setzt und a aus den beiden Gleichungen $X - \psi(a) = a\,\varphi\left(\frac{Z - aY}{a}\right)$ und $-\psi'(a) = \varphi\left(\frac{Z - aY}{a}\right) - \frac{Z}{a}\varphi'\left(\frac{Z - aY}{a}\right)$ eliminirt. Hiernach findet man das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung in der einfachen Form: $z = x\Phi(y) + y\Psi(x)$.

(2) Um diese Gleichung zu integriren, betrachte man y als die abhängige, x und z dagegen als die unabhängigen Veränderlichen. Es gelten dann die Transformationsformeln:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{q}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{p}{q}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -\frac{t}{q^3}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z\,\partial x} = \frac{pt - qs}{q^3},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{q^2 r - 2pqs + p^2 t}{q^3},$$

wo p, q, r, s, t dieselben Bedeutungen haben wie früher. Hierdurch geht die gegebene Gleichung in die folgende über:

$$xz\frac{\partial^2 y}{\partial z\,\partial x} = z\frac{\partial y}{\partial z} + x\frac{\partial y}{\partial x} - y,$$

welche der Form nach identisch ist mit der Gleichung in Nr. 1. Ihr allgemeines Integral ist daher: $y = x\Phi(z) + z\Psi(x)$.

(3) Die transformirte Gleichung lautet: $X^2 T - 2XYS + Y^2 R = XP + YQ$. Die Hülfsgleichungen derselben ergeben nur eine integrable Combination, deren Integral $X^2 + Y^2 = u$ ist. Man führe daher an Stelle von X und Y die neuen unabhängigen

Veränderlichen u und v ein mittelst der Gleichungen $X^2 + Y^2 = u$ $2XY = v$; dadurch nimmt die transformirte Gleichung die nach §. 228 integrirbare Form an: $(u^2 - v^2) \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} = v \frac{\partial Z}{\partial v}$, deren allgemeines Integral ist: $Z = \varphi(u) + \psi(u)\, arc\, sin\, \frac{v}{u}$. Demnach ist das allgemeine Integral der transformirten Gleichung:

$$Z = \varphi(X^2 + Y^2) + \psi(X^2 + Y^2)\, arc\, sin\, \frac{2XY}{X^2 + Y^2}.$$

Hieraus findet man das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung, wenn man p und q aus den drei Gleichungen

$$px + qy - z = \varphi(p^2 + q^2) + \psi(p^2 + q^2)\, arc\, sin\, \frac{2pq}{p^2 + q^2},$$

$$x = 2p\varphi'(p^2 + q^2) - \frac{2q}{p^2 + q^2}\psi(p^2 + q^2) + 2p\psi'(p^2 + q^2)\, arc\, sin\, \frac{2pq}{p^2 + q^2},$$

$$y = 2q\varphi'(p^2 + q^2) + \frac{2p}{p^2 + q^2}\psi(p^2 + q^2) + 2q\psi'(p^2 + q^2)\, arc\, sin\, \frac{2pq}{p^2 + q^2}$$

eliminirt.

(4) Die transformirte Gleichung lautet:

$$(1 + XY + X^2)R - (X^2 - Y^2)S - (1 + XY + Y^2)T = 0.$$

In diese führe man an Stelle von X und Y die neuen unabhängigen Veränderlichen u und v ein mittelst der Gleichungen: $X + Y = u$, $X - Y = v$, wodurch dieselbe übergeht in die leicht integrirbare Gleichung: $uv \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} + (u^2 + 2) \frac{\partial^2 Z}{\partial u \partial v} = 0$. Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet:

$$Z = \varphi(u) + \sqrt{u^2 + 2}\, \psi\left(\frac{\sqrt{u^2 + 2}}{v}\right),$$

daher das der ersten transformirten Gleichung:

$$Z = \varphi(X + Y) + \sqrt{(X + Y)^2 + 2}\, \psi\left(\frac{\sqrt{(X + Y)^2 + 2}}{X - Y}\right).$$

Hieraus findet man das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung, wenn man p und q aus den drei Gleichungen

$$px + qy - z = \varphi(p + q) + \sqrt{(p + q)^2 + 2}\, \psi\left(\frac{\sqrt{(p + q)^2 + 2}}{p - q}\right),$$

$$x = \varphi'(p+q) + \frac{p+q}{\sqrt{(p+q)^2+2}}\,\psi\left(\frac{\sqrt{(p+q)^2+2}}{p-q}\right)$$
$$- 2\,\frac{1+pq+q^2}{(p-q)^2}\,\psi'\left(\frac{\sqrt{(p+q)^2+2}}{p-q}\right),$$
$$y = \varphi'(p+q) + \frac{p+q}{\sqrt{(p+q)^2+2}}\,\psi\left(\frac{\sqrt{(p+q)^2+2}}{p-q}\right)$$
$$+ 2\,\frac{1+pq+p^2}{(p-q)^2}\,\psi'\left(\frac{\sqrt{(p+q)^2+2}}{p-q}\right)$$

eliminirt.

§. 245.

1. Aufgabe. Durch die Substitution $z = \varphi(\xi, \eta)\,u$ geht die Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\, \partial \eta} + L\,\frac{\partial z}{\partial \xi} + M\,\frac{\partial z}{\partial \eta} + Nz = V$ über in:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + L\varphi\right)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + M\varphi\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}$$
$$+ \frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi\, \partial \eta} + L\,\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + M\,\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + N\varphi\right)u = \frac{1}{\varphi}\,V.$$

Bildet man nun aus den Coefficienten dieser Gleichung die den Ausdrücken $LM - N + \frac{\partial M}{\partial \eta}$ und $LM - N + \frac{\partial L}{\partial \xi}$ entsprechenden Functionen, so findet man genau diese Ausdrücke wieder. Dieselben sind also für alle Substitutionen dieser Art absolute Invarianten.

2. Aufgabe. Es ist:

$$K_{r+1} = N_{r+1} - L_{r+1}\,M_{r+1} - \frac{\partial L_{r+1}}{\partial \xi},$$
$$I_{r+1} = N_{r+1} - L_{r+1}\,M_{r+1} - \frac{\partial M_{r+1}}{\partial \eta}.$$

Es ist aber ferner:

$$L_{r+1} = L_r - \frac{1}{K_r}\,\frac{\partial K_r}{\partial \eta}, \quad M_{r+1} = M_r,$$
$$N_{r+1} = L_r\,M_r + K_r + K_r\,\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{M_r}{K_r}\right).$$

Setzt man diese Werthe in die vorstehenden Ausdrücke ein, so folgt:

$$K_{r+1} = \frac{\partial^2 \log K_r}{\partial \xi\, \partial \eta} + K_r + \frac{\partial M_r}{\partial \eta} - \frac{\partial L_r}{\partial \xi}, \; I_{r+1} = K_r,$$

also, da

$$\frac{\partial M_r}{\partial \eta} - \frac{\partial L_r}{\partial \xi} = K_r - I_r$$

ist:

$$K_{r+1} = \frac{\partial^2 \log K_r}{\partial \xi \, \partial \eta} + 2 K_r - I_r, \; I_{r+1} = K_r.$$

Ist eine der Grössen K gleich Null, so führt die Laplace'sche Methode zum endlichen Integral der Gleichung. Ist dies nicht der Fall, so muss man versuchen, ob die Methode vielleicht anwendbar wird, wenn man die Rollen von ξ und η vertauscht. Bezeichnet man die dabei auftretenden Functionen mit k_r und i_r, nämlich

$$i_r = N_r - L_r M_r - \frac{\partial M_r}{\partial \eta}, \quad k_r = N_r - L_r M_r - \frac{\partial L_r}{\partial \eta},$$

so ist:

$$i_{r+1} = \frac{\partial^2 \log i_r}{\partial \xi \, \partial \eta} + 2 i_r - k_r, \; k_{r+1} = i_r.$$

Dieser Fall tritt bei dem angeführten Beispiele $s + xyp = 2yz$ ein. Während hier die Reihe der K lautet: $K_1 = -3y$, $K_2 = -4y$, $K_3 = -5y$, ..., ist die Reihe der i: $i_1 = -2y$, $i_2 = -y$, $i_3 = 0$. Man gelangt also nach zwei Transformationen zu einer integrablen Gleichung. Die transformirten Gleichungen sind:

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \, \partial y} + xy \frac{\partial z_1}{\partial x} - y z_1 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 z_2}{\partial x \, \partial y} + xy \frac{\partial z_2}{\partial x} = 0,$$

wobei

$$z = \frac{1}{2} x z_1 + \frac{1}{2y} \frac{\partial z_1}{\partial y} \quad \text{und} \quad z_1 = x z_2 + \frac{1}{y} \frac{\partial z_2}{\partial y}$$

ist. Als Integral der Gleichung für z_2 findet man:

$$z_2 = \psi(y) + \int e^{-\frac{1}{2}xy^2} \varphi(x) \, dx.$$

Hieraus findet man nach einander für z_1 und z:

$$z_1 = x \psi(y) + \frac{\psi'(y)}{y} + x \int e^{-\frac{1}{2}xy^2} \varphi(x) \, dx - \int e^{-\frac{1}{2}xy^2} x \varphi(x) \, dx$$

und

$$2z = x^2 \psi(y) + \frac{2xy - 1}{y^3} \psi'(y) + \frac{\psi''(y)}{y^2} + x^2 \int e^{-\frac{1}{2}xy^2} \varphi(x) \, dx$$

$$+ \frac{1 - 2xy^2}{y^2} \int e^{-\frac{1}{2}xy^2} x \varphi(x) \, dx + \frac{1}{y^2} \int e^{-\frac{1}{2}xy^2} (xy^2 - 1) x \varphi(x) \, dx.$$

§. 247.

2. Aufgabe.

(1) Es folgt: $q = \pm ap - \frac{1}{2} p^2 + C$. Eine der Charpit'schen Hülfsgleichungen giebt: $p = \omega$, wo ω eine Constante ist, also $q = \pm a\omega - \frac{1}{2}\omega^2 + C$, somit

$$z = \omega x + \left(\pm a\omega - \frac{1}{2}\omega^2 + C\right) y + C_1.$$

(2) Die Gleichung zur Bestimmung von q ist:

$$(1 + p^2)\left(\frac{dq}{dp}\right)^2 - 2pq\,\frac{dq}{dp} + 1 + q^2 = 0.$$

Differentiirt man dieselbe nochmals nach p, so wird dieselbe integrabel und liefert: $q = ap + \sqrt{-1 - a^2}$. Somit wird:

$$z = \varphi(x + ay) + y\sqrt{-1 - a^2}.$$

§. 250.

2. Aufgabe.

$$y = \frac{1}{2}\{F(x + at) + F(x - at)\} + \frac{1}{2a}\{f(x + at) - f(x - at)\}.$$

3. Aufgabe.

(1) Das particuläre Integral findet man wie folgt. Es ist:

$$z = \frac{1}{D^2 + D'^2}\cos mx \cos ny = \Re \frac{1}{D^2 + D'^2} e^{mix} \cos ny$$

$$= \Re\, e^{imx}\frac{1}{D'^2 - m^2}\cos ny = \cos mx \cdot \frac{1}{D'^2 - m^2}\cos ny$$

$$= \cos mx \cdot \Re \frac{1}{D'^2 - m^2} e^{iny} = \frac{\cos mx \cos ny}{-m^2 - n^2}.$$

Somit ist das allgemeine Integral:

$$z = F(x + iy) + f(x - iy) - \frac{\cos mx \cos ny}{m^2 + n^2}.$$

(2) Das particuläre Integral ist:

$$z = \frac{1}{D^2 + 3DD' + 2D'^2}\,x + \frac{1}{D^2 + 3DD' + 2D'^2}\,y = \frac{1}{D^2}\,x$$
$$+ \frac{1}{2D'^2}\,y = \frac{x^3}{6} + \frac{y^3}{12}.$$

Demnach ist das allgemeine Integral:

$$z = \varphi(y - 2x) + \psi(y - x) + \frac{x^3}{6} + \frac{y^3}{12}.$$

(3) Führt man an Stelle von y die neue Veränderliche u ein mittelst der Gleichung $y + ax = u$, so erhält man die Gleichung: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f(u)$, daher: $z = \frac{1}{2}x^2 f(u) + x\varphi(u) + \psi(u)$. Demnach ist das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung:

$$z = \frac{1}{2}x^2 f(y + ax) + x\varphi(y + ax) + \psi(y + ax).$$

(4) $z = \varphi(x + y) + \psi(x + \omega y) + \chi(x + \omega^2 y) + \frac{x^6 y^3}{4.5.6} + \frac{x^9}{4.5.7.8.9}$, wo ω eine complexe cubische Wurzel der Einheit ist.

(5) Um den dem Gliede $\chi(x + by)$ entsprechenden Theil des particulären Integrals zu erhalten, führe man für x und y die neuen Veränderlichen ξ und η ein mittelst der Gleichungen:

$$x + by = \xi, \quad y + ax = \eta,$$

dann geht die diesem Theile entsprechende Gleichung über in:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = \frac{1}{(1 - ab)^2}\,\chi(\xi).$$

Somit ist dieser Theil gleich $\frac{1}{(1 - ab)^2}\iint \chi(\xi)\,d\xi^2$ und das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung lautet:

$$z = xf(y + ax) + f_1(y + ax) + \iint \varphi(x)\,dx^2 + \frac{1}{a^2}\iint \psi(y)\,dy^2$$
$$+ \frac{1}{(1 - ab)^2}\iint \chi(\xi)\,d\xi^2,$$

wo nach der Integration für ξ wieder $x + by$ zu setzen ist.

(6) $z = xf(x + y) + f_1(x + y) + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\varphi(x + y)$.

5. Aufgabe.

(1) Für die Complementärfunction erhält man:

$$(D - D_1)(D + D_1 + D_2)\, u = 0,$$

wo D, D_1, D_2 resp. zur Abkürzung für $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ gesetzt ist. Die Complementärfunction ist demnach: $\varphi(y+x) + \psi(y-x, z-x)$. Für das particuläre Integral hat man:

$$u = \frac{1}{(D-D_1)(D+D_1+D_2)}\, xyz = \frac{1}{D^2}\left(1 - \frac{D_2}{D} + \frac{D_1 D_2}{D^2}\right) x\, y\, z$$

$$= \frac{1}{D^2}\left(x\,y\,z - \frac{1}{2}\, x^2 y + \frac{1}{6}\, x^3\right),$$

also:

$$u = \frac{1}{6}\, x^3 y\, z - \frac{1}{24}\, x^4 y + \frac{1}{120}\, x^5.$$

Das vollständige Integral der gegebenen Gleichung ist somit:

$$u = \varphi(y+x) + \psi(y-x,\ z-x) + \frac{1}{6}\, x^3 y\, z - \frac{1}{24}\, x^4 y + \frac{1}{120}\, x^5.$$

(2) Es ist:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - 3\frac{\partial}{\partial z}\right) u = 0,$$

demnach

$$u = \varphi(z-x) + \psi(y+2x) + \chi(z+3y).$$

§. 252.

Aufgabe. Ist $\Phi(D, D') = (D' - \alpha D - \beta)^{r+1} \cdot \Psi(D, D')$, so dass $k = \alpha h + \beta$ eine $(r+1)$-fache Wurzel der Gleichung $\Phi(h, k) = 0$ ist, so ist der dem ersten Factor entsprechende Theil der Complementärfunction gleich

$$\frac{1}{(D' - \alpha D - \beta)^{r+1}}\, 0 = e^{\beta y}\, \frac{1}{(D' - \alpha D)^{r+1}}\, 0,$$

und daher nach §. 44 gleich

$$e^{\beta y}\left\{e^{\alpha y D}\left[\varphi_0(x) + y\,\varphi_1(x) + \cdots + y^r\,\varphi_r(x)\right]\right\}$$

d. i.

$$e^{\beta y}\left\{\varphi_0(x+\alpha y) + y\,\varphi_1(x+\alpha y) + \cdots + y^r\,\varphi\ (x+\alpha y)\right\}.$$

§. 254.

2. Aufgabe.

$$(1) \quad z = F(xy) + yf\left(\frac{y}{x}\right) + xy\log x.$$

$$(2) \quad z = F(xy) + f\left(\frac{y}{x}\right).$$

3. Aufgabe.

$$(1) \quad u = x F\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x^2 + y^2}{n-2} - \frac{x^3}{2(n-3)}.$$

(2) Die Complementärfunction ist $x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$. Um das particuläre Integral zu finden, sei allgemein:

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} = \pi.$$

Bezeichnet dann $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine homogene Function λ-ten Grades der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so ist nach dem Euler'schen Satze von den homogenen Functionen: $\pi f = \lambda f$, daher $\frac{1}{\pi} f = \frac{1}{\lambda} f$; ferner, wenn α eine Constante bedeutet: $(\pi - \alpha) f = (\lambda - \alpha) f$, also: $\frac{1}{\pi - \alpha} f = \frac{1}{\lambda - \alpha} f$. Hieraus folgt allgemein der Satz: Ist $G(\pi)$ eine ganze rationale algebraische Function von π mit constanten Coefficienten und $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine homogene Function λ-ten Grades der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so ist die Operation von $G(\pi)$ resp. $\frac{1}{G(\pi)}$ an f gleichbedeutend mit der Multiplication von f mit $G(\lambda)$ resp. Division von f durch $G(\lambda)$. — In unserem Beispiele ist

$$\pi = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}},$$

also $\lambda = n$, und $G(\pi) = \pi(\pi - 1)$. Demnach ist das particuläre Integral $u = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}}{n(n-1)}$, und somit das vollständige Integral der gegebenen Gleichung:

$$u = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}}{n(n-1)}.$$

(3) Setzt man $x = e^\xi$, $y = e^\eta$, $z = e^\zeta$ und $\frac{\partial}{\partial\xi} = D$, $\frac{\partial}{\partial\eta} = D_1$, $\frac{\partial}{\partial\zeta} = D_2$, so erhält man:

$$u = \frac{1}{(D+D_1+D_2)^2+n^2}\,0 = \frac{1}{2ni}\left\{\frac{1}{D+D_1+D_2-in}\,0 - \frac{1}{D+D_1+D_2+in}\,0\right\}$$

$$= \frac{1}{2ni}\left\{e^{in\xi}\frac{1}{D+D_1+D_2}\,0 - e^{-in\xi}\frac{1}{D+D_1+D_2}\,0\right\}$$

$$= \frac{1}{2ni}\{e^{in\xi}\,\Phi(\eta-\xi,\zeta-\xi) - e^{-in\xi}\,\Psi(\eta-\xi,\zeta-\xi)\}$$

$$= \frac{1}{2ni}\left\{e^{in\xi}\,\Phi\left(log\frac{y}{x}, log\frac{z}{x}\right) - e^{-in\xi}\,\Psi\left(log\frac{y}{x}, log\frac{z}{x}\right)\right\}.$$

Macht man noch

$$\frac{1}{2ni}(\Phi-\Psi) = \varphi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right) \text{ und } \frac{1}{2n}(\Phi+\Psi) = \psi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right),$$

so erhält man für u den Ausdruck:

$$u = cos\,(n\,log\,x)\,\varphi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right) + sin\,(n\,log\,x)\,\psi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right).$$

4. Aufgabe. Setzt man $(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x} + (1-xy)\frac{\partial}{\partial y} = \pi$, so nimmt die Gleichung die Form an: $\pi(\pi u) + n^2 u = 0$ oder $(\pi^2 + n^2)u = 0$. Man führe nun statt x und y zwei neue Veränderliche ξ und η ein, so dass die Operation mit π gleichbedeutend wird mit der Differentiation nach nur einer dieser neuen Veränderlichen, dass also $(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x} + (1-xy)\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial\xi}$ ist. Dies ist der Fall, wenn man für ξ und η die beiden Integrale des Systems $\frac{dx}{1-x^2} = \frac{dy}{1-xy} = d\xi$, also $\xi = log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ und $\eta = \frac{y-x}{\sqrt{1-x^2}}$ nimmt. Dadurch geht die Gleichung $(\pi^2+n^2)u = 0$ über in: $\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + n^2\right)u = 0$, und das Integral dieser ist:

$$\varphi(\eta)\,cos\,n\,\xi + \psi(\eta)\,sin\,n\,\xi.$$

Somit wird das Integral der gegebenen Gleichung dargestellt durch:

$$u = \varphi\left(\frac{y-x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \cos\left(n \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

$$+ \psi\left(\frac{y-x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \sin\left(n \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

5. Aufgabe.

(1) $z = \frac{1}{D + a D_1} 0 + \frac{1}{D - a D_1 + 2ab} 0 = \varphi(y - ax)$ $+ e^{b(y-ax)} \psi(y + ax)$. $\left(D = \frac{\partial}{\partial x}, D_1 = \frac{\partial}{\partial y}\right)$.

(2) Als Complementärfunction findet man leicht:

$$\varphi(mx + ny) + e^{my} \psi(nx + my).$$

Der dem Gliede $\cos(mx + ny)$ entsprechende Theil des particulären Integrals ist gleich

$$\Re \frac{1}{(nD - mD_1)(mD - nD_1 + mn)} e^{imx + iny}$$

$$= \Re \frac{e^{imx+iny}}{mn + (m^2 - n^2) i} \frac{1}{nD - mD_1} 1 = \Re \frac{e^{imx+iny}}{mn + (m^2 - n^2) i} \cdot \frac{x}{n}$$

$$= \frac{mn \cos(mx + ny) + (m^2 - n^2) \sin(mx + ny)}{m^2 n^2 + (m^2 - n^2)^2} \frac{x}{n}.$$

Endlich ist der Theil des particulären Integrals, welcher dem Gliede $\cos(kx + ly)$ entspricht:

$$\Re e^{ikx+ily} \frac{1}{(nD - mD_1 + ikn - ilm)(mD - nD_1 + ikm - iln + mn)} 1$$

$$= \Re \frac{e^{ikx+ily}}{i(kn - lm)(mn + ikm - iln)}$$

$$= \frac{mn \sin(kx + ly) - (mk - nl) \cos(kx + ly)}{(nk - ml)[m^2 n^2 + (km - ln)^2]}.$$

Die Summe dieser drei Theile bildet das vollständige Integral.

6. Aufgabe. Nach dem allgemeinen Satze in Nr. 2 der 3. Aufgabe ist das particuläre Integral dieser Gleichung: $z = \frac{H_n}{f(n)}$.

Auch die Complementärfunction ist leicht zu finden. Bezeichnet nämlich z_α eine homogene Function α-ten Grades der m Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_m$, so ist: $(\pi - \alpha) z_\alpha = 0$. Zerlegt man also $f(\pi)$ in seine einfachen Factoren, so dass

$$f(\pi) = (\pi - \alpha_1)(\pi - \alpha_2) \ldots (\pi - \alpha_\lambda)$$

ist, wo λ den Grad der Function f angiebt, so wird der Gleichung $f(\pi) z = 0$ genügt durch alle Werthe, welche den Gleichungen $(\pi - \alpha_1) z = 0, \ldots, (\pi - \alpha_\lambda) z = 0$ genügen, d. h. es ist:

$$z = z_{\alpha_1} + z_{\alpha_2} + \cdots + z_{\alpha_\lambda}.$$

Eine Modification tritt ein, wenn α_1 eine $(r+1)$-fache Wurzel der Gleichung $f(\pi) = 0$ ist. Um dann den dieser Wurzel entsprechenden Theil der Complementärfunction zu bestimmen, denke man sich für den Augenblick $x_i = e^{\xi_i}$ und $\frac{\partial}{\partial \xi_i} = D_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ gesetzt; dann ist derselbe gleich dem Werthe von

$$\frac{1}{(D_1 + D_2 + \cdots + D_m - \alpha_1)^{r+1}}\, 0,$$

also nach §. 33 gleich

$$e^{(\alpha_1 - D_2 - D_3 - \cdots - D_m)\xi_1}(A_1 + A_2 \xi_1 + \cdots A_{r+1} \xi_1^r),$$

wo die $A_1, A_2, \ldots, A_r$ als Functionen von $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_m$ zu betrachten sind. Dieser Ausdruck ist aber gleich:

$$e^{\alpha_1 \xi_1}[\Phi_1(\xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_1, \ldots, \xi_m - \xi_1) + \Phi_2(\xi_2 - \xi_1, \ldots, \xi_m - \xi_1)\xi_1 + \cdots$$
$$+ \Phi_{r+1}(\xi_2 - \xi_1, \ldots, \xi_m - \xi_1)\xi_1^r],$$

oder, wenn man mit $z_{\alpha_1}, z'_{\alpha_1}, \ldots, z^{(r)}_{\alpha_1}$ homogene Functionen α_1-ten Grades der m Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ bezeichnet, gleich

$$z_{\alpha_1} + z'_{\alpha_1} \log x_1 + \cdots + z^{(r)}_{\alpha_1} (\log x_1)^r,$$

und dies ist, im Falle α_1 eine $(r+1)$-fache Wurzel von $f(\pi) = 0$ ist, der dieser Wurzel entsprechende Theil der Complementärfunction.

§. 258.

Aufgabe. Man denke sich u in die Summe zweier Functionen $u_1 + u_2$ von der Beschaffenheit zerlegt, dass sie beide der Differentialgleichung genügen und dass $u_1 = f(x)$ und $\frac{\partial u_1}{\partial t} = 0$ für $t = 0$,

dagegen $u_2 = 0$ und $\frac{\partial u_2}{\partial t} = F(x)$ für $t = 0$ sei. Wie leicht ersichtlich, sind die Ausdrücke $\cos\alpha(x - \lambda + at) + \cos\alpha(x - \lambda - at)$ und $\sin\alpha(x - \lambda + at) - \sin\alpha(x - \lambda - at)$, wo α und λ beliebige Constanten bedeuten, particuläre Lösungen der gegebenen Gleichung. Die erste benutzen wir, um u_1, die zweite, um u_2 zu bilden, da dadurch bereits je eine der beiden diesen Functionen auferlegten Bedingungen erfüllt ist. Multipliciren wir den ersten Ausdruck mit $\psi(\lambda)\,d\lambda$, integriren nach λ von $-\infty$ bis $+\infty$, multipliciren sodann mit $d\alpha$ und integriren nach α zwischen 0 und ∞, so ist der entstehende Ausdruck, den wir gleich u_1 setzen, noch immer eine particuläre Lösung, und man erhält:

$$u_1 = \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \{\cos\alpha(x - \lambda + at) + \cos\alpha(x - \lambda - at)\}\,\psi(\lambda)\,d\lambda.$$

Für $t = 0$ folgt hieraus:

$$u_1 = 2\int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha(x - \lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda,$$

und dies ist nach dem Fourier'schen Theorem gleich $2\pi\,\psi(x)$. Andererseits soll aber $u_1 = f(x)$ sein für $t = 0$, demnach:

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} f(x)$$

und somit:

$$u_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \{\cos\alpha(x - \lambda + at) + \cos\alpha(x - \lambda - at)\} f(\lambda)\,d\lambda$$

$$= \frac{1}{2}\{f(x + at) + f(x - at)\}.$$

Analog verfahren wir, um u_2 zu finden. Wir bilden mit Hülfe der zweiten particulären Lösung den Ausdruck:

$$u_2 = \frac{1}{2a\pi}\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \{\sin\alpha(x - \lambda + at) - \sin\alpha(x - \lambda - at)\}\,F(\lambda)\,d\lambda.$$

Derselbe genügt der Bedingung, dass $\frac{\partial u_2}{\partial t} = F(x)$ sei für $t = 0$.

Um ihn zu vereinfachen, kehren wir die Reihenfolge der Integrationen um:

$$u_2 = \frac{1}{2\,a\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\,d\lambda \left\{ \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin \alpha\,(x-\lambda+a\,t)}{\alpha}\,d\alpha - \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin \alpha\,(x-\lambda-a\,t)}{\alpha}\,d\alpha \right\}.$$

Aus den bekannten Werthen der in der Klammer befindlichen Integrale (Dirichlet's discontinuirlicher Factor) ergiebt sich, dass der Ausdruck in der Parenthese gleich π ist, wenn λ in dem Intervall $x - a\,t$ bis $x + a\,t$ sich bewegt, dass er aber verschwindet, wenn λ ausserhalb dieses Intervalles liegt. Daher ist:

$$u_2 = \frac{1}{2\,a} \int\limits_{x-a\,t}^{x+a\,t} F(\lambda)\,d\lambda.$$

Demnach schliesslich:

$$u = \frac{1}{2}\,\{f(x+a\,t) + f(x-a\,t)\} + \frac{1}{2\,a} \int\limits_{x-a\,t}^{x+a\,t} F(\lambda)\,d\lambda.$$

(Riemann, Part. Differentialgl. S. 113.)

§. 259.

1. Aufgabe. Man denke sich wieder u als Summe zweier Functionen u_1 und u_2 von solcher Beschaffenheit, dass beide der Differentialgleichung genügen und dass $u_1 = f(x)$ sei für $t = 0$ und gleich 0 für $x = 0$, dagegen $u_2 = 0$ für $t = 0$ und gleich $\varphi(t)$ für $x = 0$. Eine particuläre Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

welche der Bedingung, gleich Null zu sein für $x = 0$, genügt, ist $e^{-a^2 \alpha^2 t} \sin \alpha\,x$, wo α eine Constante ist. Multiplicirt man mit $\chi(\alpha)\,d\alpha$, integrirt zwischen 0 und ∞ und setzt

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-a^2 \alpha^2 t} \sin \alpha\,x\,\chi(\alpha)\,d\alpha = u_1,$$

so genügt u_1 der Differentialgleichung und ist gleich Null für $x = 0$. Für $t = 0$ ist

$$u_1 = \int\limits_0^{\infty} \sin \alpha\,x\,\chi(\alpha)\,d\alpha.$$

Andererseits soll

$$u_1 = f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \sin \alpha x \, d\alpha \int\limits_0^\infty f(\lambda) \sin \alpha \lambda \, d\lambda$$

(nach Fourier's Theorem) für $t = 0$ sein; somit ist

$$\chi(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty f(\lambda) \sin \alpha \lambda \, d\lambda,$$

also:

$$u_1 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty f(\lambda) \, d\lambda \int\limits_0^\infty e^{-a^2 \alpha^2 t} \sin \alpha x \sin \alpha \lambda \, d\alpha,$$

oder:

$$u_1 = \frac{1}{2a(\pi t)^{1/2}} \int\limits_0^\infty f(\lambda) \left\{ e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{4a^2 t}} \right\} d\lambda.$$

Ferner ist $e^{-a^2 \alpha^2 (t-\lambda)} \cos \alpha x$ ein particuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung. Setzt man voraus, dass $t - \lambda$ positiv sein solle, multiplicirt sodann mit $d\alpha$ und integrirt zwischen den Grenzen 0 und ∞, so genügt auch das Integral

$$\int\limits_0^\infty e^{-a^2 \alpha^2 (t-\lambda)} \cos \alpha x \, d\alpha,$$

dessen Werth unter der über $t - \lambda$ gemachten Voraussetzung gleich

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2a} (t - \lambda)^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\lambda)}}$$

ist, der gegebenen Differentialgleichung. Dasselbe ist der Fall mit der Ableitung dieses Ausdrucks nach x. Es ist somit

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4a^3} x (t - \lambda)^{-3/2} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\lambda)}}$$

ein particuläres Integral der Gleichung, und zwar genügt dieses auch der Bedingung, für $t = 0$ zu verschwinden, da alsdann auch $\lambda = 0$ sein muss. Eine Summe von Ausdrücken dieser Art für verschiedene Werthe von λ, multiplicirt je noch mit einer willkürlichen Function von λ, wird daher ebenfalls der Differentialgleichung genügen und für $t = 0$ verschwinden, vorausgesetzt, dass die Werthe von λ sämmtlich kleiner als t sind. Multiplicirt man daher mit $\psi(\lambda) \, d\lambda$ und integrirt zwischen den Grenzen 0 und t, wodurch jene Bedingung über λ erfüllt wird, so stellt der Ausdruck

$$u_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3} x \int_0^t \psi(\lambda) e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\lambda)}} (t-\lambda)^{-3/2} d\lambda$$

eine Lösung der Differentialgleichung dar, welche für $t = 0$ verschwindet. Um zu sehen, was hieraus für $x = 0$ wird, führe man für λ die neue Veränderliche μ ein durch die Gleichung

$$\frac{x}{2a(t-\lambda)^{1/2}} = \mu;$$

dann wird:

$$u_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{a^2} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} \psi\left(t - \frac{x^2}{4a^2\mu^2}\right) e^{-\mu^2} d\mu,$$

daher $u_2 = \frac{\pi}{2a^2} \psi(t)$ für $x = 0$. Nun sollte aber $u_2 = \varphi(t)$ sein für $x = 0$, mithin ist: $\psi(t) = \frac{2a^2}{\pi} \varphi(t)$ und daher:

$$u_2 = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \varphi(\lambda) e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\lambda)}} \frac{d\lambda}{(t-\lambda)^{3/2}}.$$

Die Summe der beiden Ausdrücke u_1 und u_2 stellt eine Function u dar, welche der Differentialgleichung und der Bedingung, gleich $f(x)$ für $t = 0$ und gleich $\varphi(t)$ für $x = 0$ zu sein, genügt.

2. Aufgabe. Man findet leicht die particulären Integrale:

$$\cos(\alpha^2 + \beta^2) b t \cos\alpha(x-\lambda)\cos\beta(y-\mu)$$

und

$$\sin(\alpha^2 + \beta^2) b t \cos\alpha(x-\lambda)\cos\beta(y-\mu),$$

wo $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ willkürliche Constanten sind. Multiplicirt man das erste mit $f(\lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu\, d\alpha\, d\beta$ und integrirt man nach α und β zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$, nach λ und μ aber zwischen beliebigen constanten Grenzen, so stellt auch der Ausdruck

$$u = \iint f(\lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu \iint_{-\infty}^{+\infty} \cos(\alpha^2 + \beta^2) b t \cos\alpha(x-\lambda)\cos\beta(y-\mu)\, d\alpha\, d\beta$$

ein Integral der Gleichung dar. Zerlegt man dann $\cos(\alpha^2 + \beta^2) b t$ in $\cos(\alpha^2 b t)\cos(\beta^2 b t) - \sin(\alpha^2 b t)\sin(\beta^2 b t)$, so hat man zur Berechnung der Integrale nach α und β die Formeln:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\alpha^2 b t)\cos\alpha(x-\lambda)\, d\alpha = \left(\frac{\pi}{2bt}\right)^{1/2} \left\{\cos\frac{(x-\lambda)^2}{4bt} + \sin\frac{(x-\lambda)^2}{4bt}\right\}$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} sin\,(\alpha^2 b\,t)\,cos\,\alpha\,(x-\lambda)\,d\,\alpha = \left(\frac{\pi}{2\,b\,t}\right)^{1/2}\left\{cos\,\frac{(x-\lambda)^2}{4\,b\,t} - sin\,\frac{(x-\lambda)^2}{4\,b\,t}\right\}.$$

Führt man diese Werthe ein und setzt noch $\lambda = x + 2\,u\,(b\,t)^{1/2}$, $\mu = y + 2\,v\,(b\,t)^{1/2}$, so erhält man:

$$u = 4\,\pi \iint f\,\{x + 2\,u\,(b\,t)^{1/2},\; y + 2\,v\,(b\,t)^{1/2}\}\,sin\,(u^2 + v^2)\,d\,u\,d\,v.$$

Eine ganz analoge Rechnung führt bei Anwendung des zweiten oben angeführten particulären Integrals zu dem zweiten Theile von u.

3. Aufgabe. Man denke sich auch hier u als Summe zweier Functionen u_1 und u_2 von der Beschaffenheit, dass sie beide der Differentialgleichung genügen und

$$u_1 = F(x,\,y,\,z),\quad \frac{\partial\,u_1}{\partial\,t} = 0,$$

dagegen

$$u_2 = 0,\ \frac{\partial\,u_2}{\partial\,t} = f(x,\,y,\,z)$$

für $t = 0$ sei. Particuläre Integrale der gegebenen Gleichung sind:

$$cos\,(\varkappa\,a\,t)\;cos\,\{\alpha\,(x-\lambda) + \beta\,(y-\mu) + \gamma\,(z-\nu)\}$$

und

$$sin\,(\varkappa\,a\,t)\,cos\,\{\alpha\,(x-\lambda) + \beta\,(y-\mu) + \gamma\,(z-\nu)\},$$

wo $\varkappa = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/2}$ und $\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\lambda,\,\mu,\,\nu$ beliebige Constanten sind. Das erste benutzen wir zur Bildung von u_1, das zweite zur Bildung von u_2, da damit bereits je einer der für u_1 und u_2 aufgestellten Bedingungen genügt wird. Multiplicirt man das erste mit

$$\chi\,(\lambda,\,\mu,\,\nu)\;d\,\alpha\;d\,\beta\;d\,\gamma\;d\,\lambda\;d\,\mu\;d\,\nu,$$

das zweite mit

$$\frac{1}{\varkappa\,a}\,\omega\,(\lambda,\,\mu,\,\nu)\;d\,\alpha\;d\,\beta\;d\,\gamma\;d\,\lambda\;d\,\mu\;d\,\nu$$

und integrirt nach allen sechs Veränderlichen zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$, so sind die entstehenden Ausdrücke ebenfalls Lösungen der gegebenen Gleichung und erfüllen je eine der obigen Bedingungen. Man setze daher:

$$u_1 = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \chi\,(\lambda,\,\mu,\nu)\,cos\,(\varkappa\,a\,t)\,cos\,\{\alpha\,(x-\lambda) + \beta\,(y-\mu) + \gamma\,(z-\nu)\} \times$$
$$d\alpha\;d\beta\;d\gamma\;d\lambda\;d\mu\;d\nu$$

und

$$u_2 = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\lambda, \mu, \nu) \frac{\sin(\varkappa a t)}{\varkappa a} \cos\{\alpha(x-\lambda) + \beta(y-\mu) + \gamma(z-\nu)\} \times d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

und bemerke, dass u_1 aus u_2 hervorgeht, wenn man darin χ für ω schreibt und nach t differentiirt. In der That muss, wenn u ein particuläres Integral unserer Gleichung ist, auch $\frac{\partial u}{\partial t}$ ein solches sein. Wir brauchen daher nur u_2 weiter zu behandeln. Wir denken uns α, β, γ als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes, führen an deren Stelle durch die Gleichungen $\alpha = \varrho \cos\vartheta$, $\beta = \varrho \sin\vartheta \cos\varphi$, $\gamma = \varrho \sin\vartheta \sin\varphi$ Polarcoordinaten ein und setzen zur Abkürzung:

$$\varrho(x-\lambda) = l, \quad \varrho(y-\mu) = m, \quad \varrho(z-\nu) = n$$

und

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos\{l \cos\vartheta + m \sin\vartheta \cos\varphi + n \sin\vartheta \sin\varphi\} \sin\vartheta\, d\vartheta = I.$$

Dann wird:

$$u_2 = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \varrho \sin(a\varrho t)\, d\varrho \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} I\, \omega(\lambda, \mu, \nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Um I zu berechnen, setze man:

$$l = \varrho' \cos\vartheta', \quad m = \varrho' \sin\vartheta' \cos\varphi', \quad n = \varrho' \sin\vartheta' \sin\varphi'$$

und

$$\cos\varepsilon = \cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\varphi - \varphi'),$$

wo ε den Winkel zwischen den durch ϑ, φ und ϑ', φ' bestimmten Richtungen bedeutet. Dann ist:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos(\varrho' \cos\varepsilon) \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Da sich dieses Doppelintegral über die ganze Kugelfläche, deren Radius gleich 1 ist und deren Mittelpunkt im Coordinatenanfangspunkte sich befindet, erstreckt, so kann sich sein Werth nicht ändern, wenn man die Achsen beliebig ändert, also z. B. die Polarachse mit der durch ϑ', φ' bestimmten Richtung zusammenfällt. Dann ist aber $\vartheta' = 0$, $\varepsilon = \vartheta$ und daher:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos(\varrho' \cos\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta = 4\pi \frac{\sin\varrho'}{\varrho'}.$$

Mithin:

$$u_2 = \frac{4\pi}{a}\int_0^\infty \varrho \sin(a\varrho t)\, d\varrho \iiint_{-\infty}^{+\infty} \omega(\lambda,\mu,\nu)\,\frac{\sin\varrho'}{\varrho'}\,d\lambda\,d\mu\,d\nu.$$

Betrachten wir nun auch λ, μ, ν als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes, so erstreckt sich die Integration nach λ, μ, ν über den ganzen unendlichen Raum. Nehmen wir sodann den Punkt x, y, z als Anfangspunkt eines Polarcoordinatensystems und setzen:

$$\lambda - x = r\cos\vartheta,\quad \mu - y = r\sin\vartheta\cos\varphi,\quad \nu - z = r\sin\vartheta\sin\varphi,$$

so dass $\varrho' = r\varrho$ wird, so erhalten wir:

$$u_2 = \frac{4\pi}{a}\int_0^\infty \sin(a\varrho t)\,d\varrho \int_0^\infty r\sin(r\varrho)\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \times$$

$$\int_0^\pi \omega(x + r\cos\vartheta,\ y + r\sin\vartheta\cos\varphi,\ z + r\sin\vartheta\sin\varphi)\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

Nach dem Fourier'schen Satze ist aber:

$$\psi(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \psi(r)\sin(u\varrho)\sin(r\varrho)\,dr\,d\varrho,$$

also für $r\omega = \psi$ und $u = at$:

$$u_2 = 2\pi^2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^\pi t\,\omega(x + at\cos\vartheta,\ y + at\sin\vartheta\cos\varphi,$$
$$z + at\sin\vartheta\sin\varphi)\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

Für $t = 0$ folgt hieraus: $u_2 = 0$ und $\frac{\partial u_2}{\partial t} = 8\pi^3\omega(x,y,z)$. Da aber $\frac{\partial u_2}{\partial t} = f(x,y,z)$ für $t = 0$ sein sollte, so ist

$$\omega(x,y,z) = \frac{1}{8\pi^3} f(x,y,z),$$

also:
$$u_2 = \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi f(x + at\cos\vartheta,\ y + at\sin\vartheta\cos\varphi,$$
$$z + at\sin\vartheta\sin\varphi)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi.$$

Hieraus folgt dann sogleich:

$$u_1 = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\,t\int_0^{2\pi}\int_0^\pi F(x + at\cos\vartheta,\ y + at\sin\vartheta\cos\varphi,$$
$$z + at\sin\vartheta\sin\varphi)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi.$$

4. Aufgabe. Sind α, β, γ von einander unabhängige reelle Grössen, so kann man den ersten Theil dieser Aufgabe sehr leicht durch ein ähnliches Verfahren beweisen, wie es zur Berechnung des mit I bezeichneten Integrals in voriger Aufgabe angewendet wurde. Sind aber α, β, γ beliebige (complexe) Grössen, so setze man für $e^{\alpha x + \beta y + \gamma z}$ die entsprechende Reihe; dadurch erhält man, wenn man den Werth des Integrals $\iint e^{\alpha x + \beta y + \gamma z}\, dS$ mit I bezeichnet:

$$I = \iint dS + \frac{1}{1!}\iint (\alpha x + \beta y + \gamma z)\, dS$$

$$+ \frac{1}{2!}\iint (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 dS + \cdots$$

Nun ist aber:

$$\iint (\alpha x + \beta y + \gamma z)^n dS$$

$$= \sum \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\nu+1)}\, \alpha^\lambda \beta^\mu \gamma^\nu \iint x^\lambda y^\mu z^\nu\, dS,$$

wo $\lambda + \mu + \nu = n$ sein muss. Führt man Polarcoordinaten ein, so hat man:

$$\iint x^\lambda y^\mu z^\nu\, dS = R^{n+2} \int_0^{2\pi} \cos^\mu \varphi \sin^\nu \varphi\, d\varphi \int_0^{\pi} \cos^\lambda \vartheta \sin^{\mu+\nu+1} \vartheta\, d\vartheta.$$

Diese Integrale sind nur dann von Null verschieden, wenn λ, μ, ν sämmtlich gerade Zahlen sind, und zwar ist dann, wenn man für λ, μ, ν, n resp. $2\lambda, 2\mu, 2\nu, 2n$ schreibt, der Werth der rechten Seite der letzten Gleichung gleich

$$2\, \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}\, R^{2n+2}.$$

Setzt man diese Werthe ein, so folgt nach einigen Reductionen:

$$\iint (\alpha x + \beta y + \gamma z)^{2n}\, dS$$

$$= \frac{4\pi}{2n+1} \sum \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\nu+1)}\, \alpha^{2\lambda} \beta^{2\mu} \gamma^{2\nu} R^{2n+2}$$

$$= \frac{4\pi}{2n+1} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^n R^{2n+2}.$$

Setzt man daher $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/2} = p$, so erhält man:

$$I = 4\pi \frac{R}{p} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (pR)^{2n+1} = 4\pi \frac{R}{p} \sinh(Rp).$$

Ist $p = 0$, so wird hieraus $I = 4\pi R^2$. —

Die Entwickelung einer Function u nach dem Taylor'schen Lehrsatze kann man symbolisch darstellen durch

$$u = e^{(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x_0} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y_0} + (z-z_0)\frac{\partial}{\partial z_0}} u_0.$$

Setzt man $x - x_0 = \xi$, $y - y_0 = \eta$, $z - z_0 = \zeta$, so ist der Mittelwerth dieser Function genommen über eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt der Punkt x_0, y_0, z_0 und deren Radius a ist:

$$\frac{1}{4\pi a^2}\iint u\, dS = \frac{1}{4\pi a^2}\iint e^{\xi\frac{\partial}{\partial x_0} + \eta\frac{\partial}{\partial y_0} + \zeta\frac{\partial}{\partial z_0}} u_0\, dS$$

$$= \left\{\frac{1}{4\pi a^2}\iint e^{\xi\frac{\partial}{\partial x_0} + \eta\frac{\partial}{\partial y_0} + \zeta\frac{\partial}{\partial z_0}} dS\right\} u_0.$$

Nun bleibt aber der Beweis der obigen Formel genau derselbe, wenn man sich α, β, γ nicht mehr als wirkliche Zahlgrössen, sondern etwa als die Operationssymbole $\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial y_0}, \frac{\partial}{\partial z_0}$ denkt, da für diese nach §. 31 genau analoge Gesetze gelten, wie für eigentliche Zahlgrössen. Man hat daher nach der obigen Formel:

$$\frac{1}{4\pi a^2}\iint u\, dS = \left(1 + \frac{a^2}{3!}\Delta + \frac{a^4}{5!}\Delta^2 + \cdots\right) u_0 =$$

$$u_0 + \frac{a^2}{3!}\Delta u_0 + \frac{a^4}{5!}\Delta^2 u_0 + \cdots,$$

wo

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}$$

ist. Genügt daher die Function u der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

für alle Punkte innerhalb der Kugelfläche, so ist $\Delta u_0 = 0$, $\Delta^2 u_0 = \Delta \Delta u_0 = 0$, u. s. w., daher:

$$\frac{1}{4\pi a^2}\iint u\, dS = u_0.$$

Dieser Satz ist für die Potentialtheorie von bedeutendem Werthe. (Vergl. Neumann, Logarithm. und Newton'sches Potential, S. 26 u. ff.)

§. 264.

1. Aufgabe. Die transformirte Gleichung

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

zerfällt, wenn man $u = R\,\Phi$ setzt, wo R nur von r, Φ nur von φ abhängen soll, in die beiden: $r^2 \frac{d^2 R}{d r^2} + r \frac{d R}{d r} - a^2 R = 0$ und $\frac{d^2 \Phi}{d \varphi^2} + a^2 \Phi = 0$, wo a eine beliebige Constante ist. Ein particulärer Werth von u ist daher:

$$(A r^a + B r^{-a}) \cos a \varphi + (C r^a + D r^{-a}) \sin a \varphi.$$

Das Aggregat einer beliebigen Anzahl solcher Ausdrücke für verschiedene Werthe von a und der Constanten A, B, C, D stellt ebenfalls eine Lösung der gegebenen Gleichung dar.

2. Aufgabe. Durch Uebergang zu Polarcoordinaten erhält man die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^2}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\}.$$

Setzt man hierin

$$u = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (A_\lambda \cos \lambda \varphi + B_\lambda \sin \lambda \varphi),$$

wo die A und B nur noch von t, r, ϑ abhängen sollen, so müssen sowohl die A wie die B der Gleichung genügen:

$$\frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial t^2} = \frac{a^2}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A_\lambda}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial A_\lambda}{\partial \vartheta} \right) - \frac{\lambda^2}{\sin^2 \vartheta} A_\lambda \right\}.$$

Es sei ferner $A_\lambda = V_\lambda \Theta_\lambda$, wo V_λ eine Function von t und r, Θ_λ aber nur eine Function von ϑ sein soll, und setzt man noch $\cos \vartheta = \mu$, so zerfällt die vorige Gleichung in die beiden:

$$r^2 \frac{\partial^2 V_\lambda}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V_\lambda}{\partial r} \right) + \alpha V_\lambda \right\}$$

und:

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{d \Theta_\lambda}{d \mu} \right\} - \left(\alpha + \frac{\lambda^2}{1 - \mu^2} \right) \Theta_\lambda = 0,$$

wo α eine beliebige Constante ist. Die Vergleichung der letzteren

Gleichung mit der für $v_n^{(\sigma)}$ in §. 264 zeigt, dass es zweckmässig ist, $\alpha = -n(n+1)$ zu setzen. Alsdann ist

$$\Theta_\lambda = C_n (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}\lambda} \frac{d^\lambda P_n}{d\mu^\lambda} + D_n (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}\lambda} \frac{d^\lambda Q_n}{d\mu^\lambda},$$

wo P_n und Q_n die particulären Integrale der Legendre'schen Gleichung sind, und die Gleichung für V_λ, oder, da V_λ von λ unabhängig ist, die für V wird:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2} V \right\}.$$

Setzt man noch $V = T \frac{R}{r}$, wo T nur von t, R nur von r abhängen soll, so zerfällt diese Gleichung in die beiden:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + a^2 k^2 T = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2 R}{dr^2} = \left(\frac{n(n+1)}{r^2} - k^2 \right) R,$$

wobei k^2 eine beliebige Constante bedeutet. Die particulären Integrale der ersten sind $\cos akt$ und $\sin akt$, das allgemeine Integral der letzten lässt sich nach §. 112, wenn man daselbst ki für n und n für m setzt, darstellen in der Form:

$$R = r^{n+1} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{n+1} (\alpha e^{ikr} + \beta e^{-ikr}),$$

ein Ausdruck, der, von den willkürlichen Constanten abgesehen, übereinstimmt mit $A e^{-ikr} f_n(ikr) + B e^{ikr} f_n(-ikr)$, wo f_n die auf Seite 457 angegebene Function ist. — Aus diesen einzelnen Resultaten kann man leicht die allgemeine Lösung zusammensetzen. Beschränkt man sich dabei auf die bei physikalischen Untersuchungen fast ausschliesslich auftretenden Fälle und beachtet man, dass man auch n und k alle Werthe von 0 bis ∞ beilegen kann, so erhält man:

$$u = \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{1}{r} P_{n\lambda}(\mu) \left\{ A_{kn\lambda} e^{-ikr} f_n(ikr) \right.$$
$$\left. + B_{kn\lambda} e^{ikr} f_n(-ikr) \right\} \cos akt \cos \lambda\varphi +$$

drei analogen Gliedern, in denen statt $\cos akt \cos \lambda\varphi$ resp. die Producte $\cos akt \sin \lambda\varphi$, $\sin akt \cos \lambda\varphi$, $\sin akt \sin \lambda\varphi$ auftreten und in denen allen $P_{n\lambda}(\mu)$ für $(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}\lambda} \frac{d^\lambda P_n(\mu)}{d\mu^\lambda}$ steht.

3. Aufgabe. Man setze $u = TR\Theta$, wo T nur von t, R nur von r und Θ nur von ϑ abhängen soll, so zerfällt die Gleichung in die drei:

$$\frac{d^2 T}{d t^2} + a^2 k^2 T = 0, \quad \frac{d^2 \Theta}{d \vartheta^2} + n^2 \Theta = 0,$$

$$\frac{d^2 R}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d R}{d r} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) R = 0,$$

in denen k^2 und n^2 willkürliche Constanten sind und deren letzte in die Bessel'sche Gleichung übergeht, wenn man noch $kr = \varrho$ setzt. Denkt man sich n und k als ganze Zahlen, so ist die allgemeinste Lösung:

$$u = \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} [\{A_{kn} I_n(kr) + B_{kn} Y_n(kr)\} \cos n\vartheta + \{A'_{kn} I_n(kr) + B'_{kn} Y_n(kr)\} \sin n\vartheta] \cos akt$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} [\{A''_{kn} I_n(kr) + B''_{kn} Y_n(kr)\} \cos n\vartheta + \{A'''_{kn} I_n(kr) + B'''_{kn} Y_n(kr)\} \sin n\vartheta] \sin akt.$$

§. 271.

2. Aufgabe.

(1) Die beiden Hülfsgleichungen (4) auf S. 460 geben resp. die Integrale: $x + y = 2\xi$ und $x - y = 2\eta$, wo ξ und η willkürliche Constanten sind. Führt man ξ und η als neue unabhängige Veränderliche ein, so geht die Gleichung über in:

$$(\xi + \eta)\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta},$$

und diese nimmt durch Differentiation nach ξ die Form an:

$$(\xi + \eta)\frac{\partial^3 z}{\partial \xi^2 \partial \eta} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = (\xi + \eta)\varphi'''(\xi),$$

wo diese Form der willkürlichen Function der kürzeren Rechnung wegen gewählt ist. Ferner:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = (\xi + \eta)\varphi''(\xi) - \varphi'(\xi) + \psi'(\eta),$$

und sodann:

$$z = (\xi + \eta)\varphi'(\xi) - 2\varphi(\xi) + \xi\psi'(\eta) + \chi(\eta).$$

Die Functionen φ, ψ, χ sind aber nicht völlig willkürlich, sondern an eine Bedingung gebunden, die man erhält, wenn man den Werth

von z in die transformirte Gleichung einsetzt. Man findet:

$$\chi(\eta) = \eta\, \psi'(\eta) - 2\, \psi(\eta).$$

Mithin:

$$z = (\xi + \eta)\{\varphi'(\xi) + \psi'(\eta)\} - 2\,\varphi(\xi) - 2\,\psi(\eta)$$

oder:

$$z = x\,\{\Phi'(x+y) + \Psi'(x-y)\} - \Phi(x+y) - \Psi(x-y).$$

(2) Die Hülfsgleichung (2) auf S. 460 giebt das Integral: $x^2 p - q^2 = 2\,\alpha$, und dieses liefert, nach der Charpit'schen Methode integrirt, als particuläres Integral der gegebenen Gleichung:

$$z = f = \beta\, y - \frac{2\,\alpha + \beta^2}{x} + \gamma.$$

Betrachtet man nun γ als Function von α und β und verfährt dann nach §. 271, so folgt für γ die Gleichung: $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \beta^2} = \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}$, deren Integral nach §. 259 lautet:

$$\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\beta + 2\,\alpha^{1/2}\lambda)\, e^{-\lambda^2}\, d\,\lambda.$$

Das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung wird sodann dargestellt durch das System der drei Gleichungen:

$$z = \beta\, y - \frac{2\,\alpha + \beta^2}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\beta + 2\,\alpha^{1/2}\lambda)\, e^{-\lambda^2}\, d\,\lambda,$$

$$0 = y - \frac{2\,\beta}{x} + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(\beta + 2\,\alpha^{1/2}\lambda)\, e^{-\lambda^2}\, d\,\lambda,$$

$$0 = \frac{2}{x} - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi''(\beta + 2\,\alpha^{1/2}\lambda)\, e^{-\lambda^2}\, d\,\lambda.$$

(3) Durch Addition der Hülfsgleichungen (1) und (2) auf S. 459 u. 460 erhält man hier das Integral: $(x + q)\,(y + p) = \alpha$ und hieraus nach der Charpit'schen Methode als particuläres Integral der gegebenen Gleichung:

$$z = f = \beta\, y + \frac{\alpha}{\beta}\, x - x\, y - \gamma.$$

Sodann muss γ, wenn man es als Function von α und β betrachtet, der Gleichung genügen:

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \beta^2} = 2\,\alpha \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}.$$

Führt man hierin an Stelle von β die neue unabhängige Veränderliche ε mittelst der Gleichung $\beta = \alpha^{1/2} e^{\varepsilon}$ und sodann an Stelle von α die Veränderliche δ ein durch die Gleichung $\alpha = \varepsilon^{2\delta}$, so erhält man die Gleichung: $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \varepsilon^2} = \frac{\partial \gamma}{\partial \delta}$, deren Integral lautet:

$$\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon + 2\,\delta^{1/2}\lambda)\, e^{-\lambda^2}\, d\lambda.$$

Mithin wird das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung dargestellt durch das System der drei Gleichungen:

$$z = e^{\delta+\varepsilon} y + e^{\delta-\varepsilon} x - xy - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon + 2\,\delta^{1/2}\lambda)\, e^{-\lambda^2}\, d\lambda,$$

$$0 = e^{\delta+\varepsilon} y - e^{\delta-\varepsilon} x - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(\varepsilon + 2\,\delta^{1/2}\lambda)\, e^{-\lambda^2}\, d\lambda,$$

$$0 = e^{\delta+\varepsilon} y + e^{\delta-\varepsilon} x - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi''(\varepsilon + 2\,\delta^{1/2}\lambda)\, e^{-\lambda^2}\, d\lambda.$$

(4) Bildet man die Hülfsgleichungen (1) und (2) auf S. 459 u. 460 sowohl für die oberen wie für die unteren Zeichen von $G^{1/2}$ und fügt zu jedem dieser beiden Systeme $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ hinzu, so erhält man aus jedem System eine integrable Combination, wenn man die erste Gleichung mit $-\frac{2q}{x}$, die zweite mit -1, die dritte mit $-2z$ multiplicirt, und die so veränderten Gleichungen jedes Systems addirt. Diese Summen liefern die Integrale:

$$x^2 p + x^2 q - 2zx - b \log q + 2b \log x = \alpha,$$
$$x^2 p + x^2 q - 2zx + b \log q - 2b \log x = \beta.$$

Aus diesen folgt:

$$q = x^2 e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}, \quad p = \frac{\alpha+\beta}{2x^2} + \frac{2z}{x} - x^2 e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}},$$

und mit Hülfe dieser Werthe findet man:

$$z = -\frac{\alpha+\beta}{6x} + e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}} (y-x)\, x^2 - x^2 \gamma = f$$

als particuläres Integral der gegebenen Gleichung. Betrachtet man, um das allgemeine Integral zu finden, γ als Function von α und β und

letztere als Functionen von x und y, so muss γ der Gleichung genügen:

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha \, \partial \beta} = \frac{1}{4b}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} - \frac{\partial \gamma}{\partial \beta}\right).$$

Durch die Substitution $\gamma = e^{\frac{\beta - \alpha}{4b}} \varepsilon$ geht diese in die einfachere über:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \alpha \, \partial \beta} + \frac{1}{16 b^2} \varepsilon = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich nach Laplace (Mémoires de l'Academie v. J. 1779) durch bestimmte Integrale integriren und zwar erhält man:

$$\varepsilon = \int_0^\alpha G\{\beta(\alpha - \lambda)\} \varphi(\lambda) \, d\lambda + \int_0^\beta G\{\alpha(\beta - \lambda)\} \psi(\lambda) \, d\lambda,$$

wo G das Integral der Differentialgleichung

$$u \frac{d^2 G}{d u^2} + \frac{d G}{d u} + \frac{1}{16 b^2} G = 0$$

ist. Das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung wird dann dargestellt durch das System der drei Gleichungen:

$$z = -\frac{\alpha + \beta}{6x} + e^{\frac{\beta - \alpha}{2b}} (y - x) x^2 - e^{\frac{\beta - \alpha}{4b}} x^2 \varepsilon,$$

$$0 = -\frac{1}{6x} - \frac{1}{2b} e^{\frac{\beta - \alpha}{2b}} (y - x) x^2 + \frac{1}{4b} e^{\frac{\beta - \alpha}{4b}} x^2 \varepsilon + e^{\frac{\beta - \alpha}{4b}} x^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha},$$

$$0 = -\frac{1}{6x} + \frac{1}{2b} e^{\frac{\beta - \alpha}{2b}} (y - x) x^2 - \frac{1}{4b} e^{\frac{\beta - \alpha}{4b}} x^2 \varepsilon + e^{\frac{\beta - \alpha}{4b}} x^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta}.$$

(5) Die beiden Systeme der Hülfsgleichungen (1) und (2) auf S. 459 u. 460 werden hier:

$$\text{I.} \quad dy - q\,dx - x\,dx = 0, \quad dp + (q - x)\,dq - q\,dx = 0$$

und

$$\text{II.} \quad dy - q\,dx + x\,dx = 0, \quad dp + (q + x)\,dq - q\,dx = 0.$$

Die zweite Gleichung des ersten Systems giebt integrirt:

$$p + \frac{1}{2} q^2 - xq = \alpha.$$

Multiplicirt man ferner die erste Gleichung des zweiten Systems mit 2 und subtrahirt davon die zweite Gleichung, so erhält man einen integrablen Ausdruck, welcher durch Integration giebt:

$$p + \frac{1}{2} q^2 + xq - 2y - x^2 = \beta.$$

Berechnet man nun p und q aus den erhaltenen Integralen, setzt ihre Werthe in $dz = p\,dx + q\,dy$ ein und integrirt man, so ergiebt sich:

$$z = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}(\beta + 3\alpha + 2y)x + \frac{(\beta - \alpha + 2y)^2}{8x} + \gamma.$$

Betrachtet man nun wieder γ als Function von α und β und diese als Functionen von x und y, so erhält man zur Bestimmung von γ die Gleichung:

$$4\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha} + \frac{\partial\gamma}{\partial\beta}\right)\frac{\partial^2\gamma}{\partial\alpha\,\partial\beta} + 1 = 0.$$

Wäre das allgemeine Integral derselben bekannt, so würde das der gegebenen dargestellt werden durch die drei Gleichungen:

$$z = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}(\beta + 3\alpha + 2y)x + \frac{(\beta - \alpha + 2y)^2}{8x} + \gamma,$$

$$0 = \frac{3}{4}x - \frac{\beta - \alpha + 2y}{4x} - \frac{\partial\gamma}{\partial\alpha},$$

$$0 = \frac{1}{4}x + \frac{\beta - \alpha + 2y}{4x} - \frac{\partial\gamma}{\partial\beta}.$$

(6) Die Hülfsgleichung (2) auf S. 460 giebt, je nachdem man das obere oder untere Zeichen nimmt, die beiden Integrale:

$$x^2 p - \frac{3}{2}q^2 = \alpha, \quad x^2 p - \frac{1}{2}q^2 = \beta,$$

demnach

$$p = \frac{3\beta - \alpha}{2x^2}, \quad q = (\beta - \alpha)^{1/2}$$

und somit:

$$z = \frac{\alpha - 3\beta}{2x} + (\beta - \alpha)^{1/2}y + \gamma.$$

Betrachtet man nun wieder γ als Function von α und β und diese als Functionen von x und y, so hat man γ aus der Gleichung zu bestimmen:

$$4(\beta - \alpha)\frac{\partial^2\gamma}{\partial\alpha\,\partial\beta} + 3\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha} + \frac{\partial\gamma}{\partial\beta} = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser letzteren lässt sich nach Laplace durch bestimmte Integrale darstellen. Schreibt man noch $-\alpha$ für α, so wird das Integral von

$$4(\alpha + \beta)\frac{\partial^2\gamma}{\partial\alpha\,\partial\beta} + 3\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha} - \frac{\partial\gamma}{\partial\beta} = 0$$

dargestellt durch:

$$\gamma = (\alpha + \beta)^{-3/4} \int_0^\alpha f\left(\frac{\alpha - z}{\alpha + \beta}\right) \varphi(z)\, dz$$

$$+ (\alpha + \beta)^{1/4} \int_0^\beta F\left(\frac{\beta - z}{\alpha + \beta}\right) \psi(z)\, dz,$$

wo f der Gleichung

$$u(1-u)\frac{d^2 f}{du^2} + (1 - 3u)\frac{df}{du} - \frac{15}{16} f = 0$$

genügt und $f = 1$, $\frac{df}{du} = \frac{15}{16}$ ist für $u = 0$, F dagegen die Gleichung $u\,(1-u)\,\frac{d^2 F}{du^2} + (1-u)\,\frac{dF}{du} + \frac{1}{16}\,F = 0$ befriedigt und der Bedingung genügt, dass $F = 1$ und $\frac{dF}{du} = -\frac{1}{16}$ ist für $u = 0$. Da die beiden Gleichungen für f und F hypergeometrische sind, so sind diese Functionen als bekannt zu betrachten. Das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung wird dann dargestellt durch das System der drei Gleichungen:

$$z = -\frac{\alpha + 3\beta}{2x} + (\alpha + \beta)^{1/2} y + \gamma,$$

$$0 = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^{-1/2} y - \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha},$$

$$0 = -\frac{3}{2x} + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^{-1/2} y - \frac{\partial \gamma}{\partial \beta}.$$

(7) Mit Hülfe der Gleichung (2) auf S. 460 findet man leicht:

$$z = b(\alpha + \beta)\, x - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^2 x + (\beta - \alpha)\, y + \gamma.$$

Betrachtet man γ als Function von α und β und diese als Functionen von x und y, so muss γ der Gleichung genügen:

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \frac{1}{2b}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} + \frac{\partial \gamma}{\partial \beta}\right),$$

deren Lösung sich als bestimmtes Integral darstellen lässt, und zwar ist:

$$\gamma = e^{\frac{\alpha + \beta}{2b}} \left\{ \int_0^\alpha f[\beta(\alpha - z)]\, \varphi(z)\, dz + \int_0^\beta F[\alpha(\beta - z)]\, \psi(z)\, dz \right\},$$

wo f und F der Gleichung

$$u \frac{d^2 y}{d u^2} + \frac{d y}{d u} - \frac{1}{4 b^2} y = 0$$

genügen und der Bedingung unterliegen, dass $y = 1$ und $\frac{d y}{d u} = \frac{1}{4 b^2}$ sein muss für $u = 0$. Das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung wird dann dargestellt durch das System der drei Gleichungen:

$$z = b(\alpha + \beta) x - \frac{1}{2} (\beta - \alpha)^2 x + (\beta - \alpha) y + \gamma,$$

$$0 = b x + (\beta - \alpha) x - y - \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha},$$

$$0 = b x - (\beta - \alpha) x + y - \frac{\partial \gamma}{\partial \beta}.$$

(8) Die Gleichung (2) auf S. 460 giebt, wenn man das untere Zeichen nimmt: $2 d q = d x$, also: $2 q = x + \alpha$. Integrirt man diese wie eine gewöhnliche Differentialgleichung, so stellt $2 z - (x + \alpha) y + \beta = 0$, wo β eine willkürliche Function von x sein kann, ein particuläres Integral der gegebenen Gleichung dar. Denkt man sich nun an Stelle von x und y als neue unabhängige Veränderliche x und α eingeführt und nimmt man an, dass β ausser von x auch noch von α abhänge, so wird obige Gleichung noch immer ein Integral der Gleichung $2 q = x + \alpha$ sein, wenn die Bedingung $- y + \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = 0$ erfüllt ist. Es bleibt nur noch die Bedingung zu suchen, dass auch $2 q = x + \alpha$ noch immer ein Integral der gegebenen Gleichung sei. Differentiirt man sie nach x und y, so folgt:

$$2 s = 1 + \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad 2 t = \frac{\partial \alpha}{\partial y},$$

daher

$$2 p s + t - p = p \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

Die gesuchte Bedingung ist daher ausgedrückt durch die Gleichung:

$$p \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0.$$

Nun ist aber, da x und α die unabhängigen Veränderlichen sein sollen:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \text{also:} \quad p \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{1}{2} = 0.$$

Substituirt man in diese Gleichung die Werthe:

$$y = \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial \alpha \, \partial x}$$

und ferner

$$p = \frac{1}{2}\left(y + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right),$$

so folgt zur Bestimmung von β die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right) \frac{\partial^2 \beta}{\partial \alpha \, \partial x} = 1.$$

Es ist somit die Integration der gegebenen Gleichung auf diejenige einer Gleichung von der Form $(p + q)\, s = 1$ zurückgeführt.

Vermischte Aufgaben.

1. Ein System der Monge'schen Hülfsgleichungen ist:

$$dy - dx = 0, \quad dp - dq + \frac{4p}{x+y}\, dx = 0,$$

also: $y - x = a$ und

$$dp - dq + \frac{4p}{2y - a}\, dx = 0.$$

Wegen $dz = p\,dx + q\,dy = p\,dy + q\,dy$ kann die letzte Gleichung auf die Form gebracht werden:

$$d\{(2y - a)(p - q)\} + 2\,dz = 0,$$

mithin: $$(2y - a)(p - q) + 2z = f(a)$$

oder: $$(x + y)(p - q) + 2z = f(y - x),$$

und dieses ist ein erstes Integral der gegebenen Gleichung. Nach der Lagrange'schen Methode ergiebt sich hieraus leicht:

$$\alpha z e^{-\frac{2y}{\alpha}} + F(\alpha) = -\int e^{-\frac{2y}{\alpha}} f(2y - \alpha)\, dy,$$

wo nach der Integration $x + y$ für α zu setzen ist, oder, wenn man zugleich $-f$ für f schreibt, was wegen der Willkürlichkeit von f erlaubt ist:

$$(x + y) z + e^{\frac{2y}{x+y}} F(x + y) = e^{\frac{2y}{x+y}} \int e^{-\frac{2y}{\alpha}} f(2y - \alpha)\, dy.$$

Wendet man auf die zweite Gleichung $(p + q)(r - t) = 4x(rt - s^2)$ die Inversion (§. 242) an, so erhält man wiederum die erste:

$$(X + Y)(R - T) + 4P = 0.$$

Setzt man daher

$$\varphi = (X+Y)Z + e^{\frac{2Y}{X+Y}} F(X+Y) - e^{\frac{2Y}{X+Y}} \int e^{-\frac{2Y}{\alpha}} f(2Y-\alpha)\, dY$$

$= 0$, so findet man das Integral der zweiten Gleichung, wenn man X, Y, Z aus den vier Gleichungen

$$\varphi = 0, \quad x\frac{\partial \varphi}{\partial Z} + \frac{\partial \varphi}{\partial X} = 0, \quad y\frac{\partial \varphi}{\partial Z} + \frac{\partial \varphi}{\partial Y} = 0,$$

$$-z\frac{\partial \varphi}{\partial Z} = Z\frac{\partial \varphi}{\partial Z} + X\frac{\partial \varphi}{\partial X} + Y\frac{\partial \varphi}{\partial Y}$$

eliminirt.

2. (1) Man erhält leicht die beiden Zwischenintegrale:

$$\frac{1+p}{1+q} = \varphi(z) \text{ und } p = q\,\psi(x+y+z).$$

Somit:

$$dz = p\,dx + q\,dy = \frac{1-\varphi}{\varphi-\psi}\,dy + \frac{(1-\varphi)\,\psi}{\varphi-\psi}\,dx.$$

Setzt man $\psi(x+y+z) = 1 + \chi(x+y+z)$, so geht die Gleichung über in:

$$\frac{dz}{\varphi(z)-1} = dx + \frac{d(x+y+z)}{\chi(x+y+z)},$$

und daher durch Integration: $x + F(x+y+z) = f(z)$. — Dasselbe Resultat hätte man nach der Lagrange'schen Methode durch directe Integration jedes der beiden Zwischenintegrale erhalten.

(2) Die beiden Systeme von Hülfsgleichungen sind:

$$dy - dx = 0, \; (1+pq+p^2)\,dq = (1+pq+q^2)\,dp$$

und:

$$(1+pq+q^2)\,dy + (1+pq+p^2)\,dx = 0, \; dp + dq = 0.$$

Das erste System liefert das Zwischenintegral:

$$\frac{q-p}{\sqrt{(q+p)^2+2}} = \varphi(y-x);$$

ebenso führt das zweite, wenn man noch die Gleichung $dz = p\,dx + q\,dy$ mit hinzunimmt, zu dem anderen Zwischenintegral:

$$x + y + (p+q)z = \varphi_1(p+q).$$

Bezeichnet u diejenige Function von x, y, z, welche sich durch Auflösung der Gleichung $\varphi_1(u) - zu = x + y$ ergiebt, so hat man:

$$p + q = u, \quad q - p = \varphi(y-x)\sqrt{u^2+2},$$

also:

$$q = \frac{1}{2} u + \frac{1}{2} \varphi (y - x) \sqrt{u^2 + 2}, \; p = \frac{1}{2} u - \frac{1}{2} \varphi (y - x) \sqrt{u^2 + 2}.$$

Setzt man diese Werthe in $dz = p\,dx + q\,dy$ ein und integrirt man, wobei zu beachten, dass $d(x + y) = \Phi'_1(u)\,du - d(zu)$ ist, so folgt:

$$z \sqrt{u^2 + 2} = \int \frac{u\,\varphi'_1(u)}{\sqrt{u^2 + 2}}\,du + \frac{1}{2} \int \varphi (y - x)\,d(y - x)$$

oder:

$$z \sqrt{u^2 + 2} = \psi (y - x) + \int \frac{u\,\varphi'_1(u)}{\sqrt{u^2 + 2}}\,du.$$

(3) Als Zwischenintegrale erhält man:

$$p\,y - q\,x = \varphi \left(\frac{y}{x}\right) \text{ und } p\,x + q\,y = \psi (x^2 + y^2).$$

Setzt man die hieraus folgenden Werthe von p und q in $dz = p\,dx + q\,dy$ ein und integrirt man, so wird:

$$z = - \int \varphi \left(\frac{y}{x}\right) d \; arc \; tang \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \int \psi (x^2 + y^2)\,d \; log\,(x^2 + y^2),$$

d. i. $z = f\left(\frac{y}{x}\right) + F(x^2 + y^2)$.

(4) Nur das eine System von Hülfsgleichungen, nämlich $x\,dy + y\,dx = 0$, $x\,dp + y\,dq - p\,dx - q\,dy = 0$ liefert, verbunden mit $dz = p\,dx + q\,dy$, ein Zwischenintegral:

$$xp + yq - 2z = \varphi (xy).$$

Die Lagrange'schen Gleichungen sind:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{\varphi (xy) + 2z},$$

$$\text{also } x = Cy \text{ und } \frac{dz}{dy} - 2\frac{z}{y} = \frac{\varphi(Cy^2)}{y},$$

mithin:

$$\frac{z}{y^2} = C_1 + \int \frac{\varphi (Cy^2)}{y^3}\,dy = C_1 + \frac{1}{2} C \int \frac{\varphi (Cy^2)}{(Cy^2)^2}\,d(Cy^2),$$

d. i. $z = y^2 \psi \left(\frac{x}{y}\right) + \chi (xy)$.

(5) Die Hülfsgleichungen sind: $dy + dx = 0$ und:

$$dp - dq = - x\,dy - \varphi (x + y)\,dy,$$

also $y + x = C$ und:

$$dp - dq = -(C - y)\,dy - \varphi(C)\,dy,$$

d. i.

$$p - q = \frac{1}{2}(C - y)^2 - \varphi(C)\,y + \psi(C).$$

Die Lagrange'sche Methode führt zu dem Integral:

$$z = x f(x + y) + f_1(x + y) + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\varphi(x + y)$$

[vergl. §. 250, Aufg. 3, (6)], oder auch:

$$z = \chi(x + y) - y\,\psi(x + y) + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}y^2\varphi(x + y).$$

(6) Zwischenintegrale:

$$xp + yq - z = \varphi(x + y), \quad p - q = \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Allgemeines Integral:

$$z = \chi(x + y) + (x + y)\,\chi_1\left(\frac{y}{x}\right),$$

wo

$$\chi(u) = u\int\varphi(u)\,\frac{du}{u^2}, \quad \chi_1(u) = \int\frac{\psi(u)\,du}{(1 + u)^2}$$

ist.

(7) Die beiden Systeme der Monge'schen Hülfsgleichungen, nämlich

$$x(x\,dp + y\,dq) = 2(xp - z)\,dx, \quad x\,dy + y\,dx = 0$$

und

$$x(x\,dp - y\,dq) = 2(xp - z)\,dx, \quad x\,dy - y\,dx = 0$$

liefern, verbunden mit $dz = p\,dx + q\,dy$, die beiden Zwischenintegrale:

$$px + qy - 2z = x\,\varphi(xy) \quad \text{und} \quad px - qy - z = x^2\,\psi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Man erhält hieraus als allgemeines Integral der gegebenen Gleichung:

$$(x^3 y)^{-1/2} z = \int\varphi(xy)\,\frac{d(xy)}{xy\sqrt{xy}} + 2\int\psi\left(\frac{x}{y}\right)d\sqrt{\frac{x}{y}}$$

oder:

$$z = x f(xy) + x^2 F\left(\frac{x}{y}\right).$$

(8) $z = \varphi(x + y) + \psi(x^2 - y^2).$

(9) $z = \varphi(x + y) + \psi\left(\frac{y}{x}\right).$

3. Das allgemeine Integral von $r + t = 2s$ ist:

$$z = f(x + y) + x\varphi(x + y),$$

daher mit Berücksichtigung der gestellten Bedingungen:

$$z = (x + y)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

4. Als Zwischenintegral der ersten Gleichung erhält man leicht:

$$\frac{p}{x} - \frac{q}{y} = \varphi(x^2 - y^2)$$

und hieraus folgt nach der Lagrange'schen Methode als allgemeines Integral: $z = \psi(x^2 + y^2) + \chi(x^2 - y^2)$.

Für die zweite Gleichung giebt es nur ein System von Hülfsgleichungen, nämlich:

$$(px - z)p\,dx + xz\,dp - xpq\,dy = 0,$$
$$pyq\,dx - yz\,dq - (qy - z)q\,dy = 0.$$

Nun ist:

$$x\,dp = d(px - z) + q\,dy, \quad y\,dq = d(qy - z) + p\,dx.$$

Substituirt man diese Werthe in die erste, resp. zweite Gleichung, so lassen sich diese in der Form schreiben:

$$\frac{d(px - z)}{px - z} + \frac{p\,dx - q\,dy}{z} = 0$$

und:

$$\frac{d(qy - z)}{qy - z} - \frac{p\,dx - q\,dy}{z} = 0,$$

somit durch Addition der beiden und Integration:

$$(px - z)(qy - z) = C.$$

5. Differentiirt man $q^2 = x^2(1 + p^2)$ nach y, so folgt:

$$s = \frac{qt}{x^2 p},$$

und die Gleichung $rt - s^2 = 0$ geht über in: $t(x^4 p^2 r - q^2 t) = 0$. Man genügt ihr also durch $t = 0$ oder: $z = y\varphi(x) + \psi(x)$. Hieraus: $p = y\varphi'(x) + \psi'(x)$, $q = \varphi(x)$. Damit nun $q^2 = x^2(1 + p^2)$ sei, muss $\varphi'(x) = 0$, also $\varphi(x) = a$ und ferner

$$\psi'(x) = \frac{1}{x}(a^2 - x^2)^{1/2}$$

sein. Es wird daher:

$$\psi(x) = (a^2 - x^2)^{1/2} + a \log \frac{a - (a^2 - x^2)^{1/2}}{x}$$

wie angegeben.

6. Die Gleichung $py - qx = 0$ hat das allgemeine Integral: $x^2 + y^2 = \varphi(z)$. Soll dasselbe auch der Gleichung zweiter Ordnung genügen, so muss man $\varphi(z)$ entsprechend bestimmen. Berechnet man aus $x^2 + y^2 = \varphi(z)$ die Werthe von p, q, r, s, t und setzt dieselben in jene Gleichung ein, so erhält man zur Bestimmung von φ die Gleichung:

$$\varphi \frac{d^2 \varphi}{d z^2} - \left(\frac{d \varphi}{d z}\right)^2 - 2 \varphi = 0.$$

Setzt man noch $\varphi(z) = \psi^2(z)$ so wird:

$$\psi \frac{d^2 \psi}{d z^2} - \left(\frac{d \psi}{d z}\right)^2 - 1 = 0,$$

eine Gleichung, die sich nach §. 67 leicht integriren lässt. Man findet $\psi(z) = c \cosh \frac{z}{c}$, also: $(x^2 + y^2)^{1/2} = c \cosh \frac{z}{c}$. — In Betreff der zweiten Gleichung vergleiche man: Monge, Application de l'Analyse à la Géométrie, 5. éd., p. 197 u. ff.

7. (1) Man setze $e^x = \xi$, $e^y = \eta$. Allgemeines Integral:

$$z = \varphi(e^x + e^y) + \psi(e^x - e^y).$$

(2) Allgemeines Integral: $y = \varphi(x) \psi(z)$.

(3) Setzt man $\frac{e^x}{y} = \eta$ und betrachtet x und η als die neuen unabhängigen Veränderlichen, so geht die Gleichung über in:

$$x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x \eta \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \eta} - \eta \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0.$$

Ein Zwischenintegral hiervon ist:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - z = \varphi\left(\frac{e^x}{\eta}\right),$$

somit das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung:

$$z = x \psi\left(\frac{e^x}{y}\right) + x \int \varphi\left(\frac{e^x}{\eta}\right) \frac{dx}{x^2},$$

wo nach der Integration für η wieder $\frac{e^x}{y}$ zu setzen ist.

(4) Allgemeines Integral: $z = x^2 + \varphi(y) + \psi\left(\frac{y}{x^2}\right)$.

(5) $z = \varphi(2x^{1/2} + y) + \psi(2x^{1/2} - y)$.

(6) Führt man $ax + y = \xi$ und $ax - y = \eta$ als neue unabhängige Veränderliche ein, so geht die Gleichung über in:

$$(\xi + \eta) \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \, \partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta},$$

deren allgemeines Integral nach Nr. (2) der 2. Aufgabe in §. 271 lautet:

$$z = (\xi + \eta) \{\varphi' (\xi) + \psi' (\eta)\} - 2 \varphi (\xi) - 2 \psi (\eta).$$

Demnach ist das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung, wenn man 2φ und 2ψ ebenfalls mit φ und ψ bezeichnet:

$$z = a x \{\varphi' (a x + y) + \psi' (a x - y)\} - \varphi (a x + y) - \psi (a x - y).$$

8. Da u reell sein und der Gleichung $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1$ genügen soll, so kann man $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos \omega$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \sin \omega$ setzen, wo ω eine Function von x, y sein kann. Infolge der ersten Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

muss diese Function der Bedingung genügen:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} \sin \omega - \frac{\partial \omega}{\partial y} \cos \omega = 0;$$

ferner aber muss sein:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y},$$

daher:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} \cos \omega + \frac{\partial \omega}{\partial y} \sin \omega = 0.$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0,$$

also $\omega = const = \alpha$, und sodann:

$$u = x \cos \alpha + y \sin \alpha + \beta.$$

9. Setzt man den Werth von t aus der ersten Gleichung in die zweite ein, so kann man diese in der Form schreiben:

$$s^2 + (r - a)^2 = a^2 + b^2 = c^2.$$

Daher kann man, weil die Lösung reell sein soll, setzen:

$s = c \sin \omega$, $r = a + c \cos \omega$, $t = a - c \cos \omega$, wo ω eine Function von x, y sein kann. Nun müssen aber die beiden Gleichungen gelten:

$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial y}$ und $\frac{\partial s}{d y} = \frac{\partial t}{\partial x}$ oder: $\frac{\partial \omega}{\partial x} \cos \omega + \frac{\partial \omega}{\partial y} \sin \omega = 0$ und

$\frac{\partial \omega}{\partial x} \sin \omega - \frac{\partial \omega}{\partial y} \cos \omega = 0$. Aus beiden folgt: $\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$, also $\omega = const = \alpha$. Aus den Gleichungen

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

ergiebt sich sodann:

$$p = (a + c \cos \alpha)\, x + c\, y \sin \alpha + \beta,$$

$$q = c\, x \sin \alpha + (a - c \cos \alpha)\, y + \gamma,$$

und aus $dz = p\,dx + q\,dy$ folgt schliesslich:

$$z = \frac{1}{2} x^2 (a + c \cos \alpha) + c\, x\, y \sin \alpha + \frac{1}{2} y^2 (a - c \cos \alpha) + \beta\, x + \gamma\, y + \delta.$$

10. Nach der Monge'schen Methode findet man die beiden Hülfsgleichungen: $dp = 0$ und $p\,q\,dy + (1 + p^2)\,dx = 0$, also $p = \alpha$ und $p\,(q\,dy + p\,dx) + dx = 0$, d. i. $p\,dz + dx = 0$, also $\alpha z + x = \varphi(\alpha)$. Demnach ist ein erstes Zwischenintegral: $x + p\,z = \varphi(p)$. Die Charpit'schen Hülfsgleichungen hiervon sind:

$$\frac{dp}{1 + p^2} = \frac{dq}{p\,q} = \frac{dy}{0},$$

und diese führen zu einem zweiten Zwischenintegral:

$$q = (1 + p^2)^{1/2}\, \psi'(y).$$

Hiernach würde man das allgemeine Integral erhalten durch Elimination von p aus den beiden Gleichungen:

$$x + p\,z = \varphi(p) \text{ und } z\,(1 + p^2)^{1/2} = \int (1 + p^2)^{-1/2}\, \varphi'(p)\, dp + \psi(y).$$

Man kann aber auch das zweite Zwischenintegral nach der Charpit'schen Methode integriren. Die Hülfsgleichungen sind:

$$\frac{dp}{0} = \frac{dq}{-(1 + p^2)^{1/2}\, \psi''(y)} = \frac{dy}{-1},$$

daher:

$$p = a, \quad q = (1 + a^2)^{1/2}\, \psi'(y)$$

und somit:

$$z = a\,x + \varphi(a) + (1 + a^2)^{1/2}\, \psi(y).$$

Das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung wird demnach dargestellt durch das System der beiden Gleichungen:

$$z = \varphi(a) + a\,x + (1 + a^2)^{1/2}\, \psi(y),$$

$$0 = \varphi'(a) + x + a\,(1 + a^2)^{-1/2}\, \psi(y).$$

11. (1) $z = \varphi\left(\frac{x^2}{y}\right) + \psi\left(\frac{y^2}{x}\right)$.

(2) Diese Gleichung geht aus der vorigen durch Inversion (nach §. 242) hervor. Ihr allgemeines Integral wird daher erhalten, wenn man X, Y, Z aus den vier Gleichungen eliminirt:

$$z = xX + yY - Z,$$

$$Z = \varphi\left(\frac{X^2}{Y}\right) + \psi\left(\frac{Y^2}{X}\right),$$

$$x = 2\,\frac{X}{Y}\,\varphi'\left(\frac{X^2}{Y}\right) - \frac{Y^2}{X^2}\,\psi'\left(\frac{Y^2}{X}\right),$$

$$y = -\frac{X^2}{Y^2}\,\varphi'\left(\frac{X^2}{Y}\right) + 2\,\frac{Y}{X}\,\psi'\left(\frac{Y^2}{X}\right).$$

(3) Führt man $x + y = \xi$ und $x - y = \eta$ als neue unabhängige Veränderliche ein, so geht die Gleichung über in:

$$\xi\eta\,\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} = \xi\,\frac{\partial z}{\partial\xi} + \eta\,\frac{\partial z}{\partial\eta} - z,$$

deren allgemeines Integral nach Nr. (1) der 2. Aufgabe in §. 242 lautet: $z = \xi\,\varphi(\eta) + \eta\,\psi(\xi)$. Demnach ist das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung:

$$z = (x + y)\,\varphi(x - y) + (x - y)\,\psi(x + y).$$

(4) Die transformirte Gleichung ist:

$$2\eta\,\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} + \frac{\partial z}{\partial\eta} = 0,$$

also: $z = \eta^{1/2}\,\varphi(\xi) + \psi(\xi)$ oder: $z = x\chi(xy) + \psi(xy)$.

(5) Die transformirte Gleichung ist:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} - \{1 + f(e^{2\xi})\}\,\frac{\partial z}{\partial\eta} = 0.$$

Hieraus findet man:

$$z = \varphi(\eta)\,e^{\xi + \int f(e^{2\xi})\,d\xi} + \psi(\xi) \text{ oder } z = x\,\chi\left(\frac{x}{y}\right)e^{\int f(e^{2\xi})\,d\xi} + \psi_1(xy),$$

wo nach der Integration für ξ wieder sein Werth $\frac{1}{2}\,log\,(xy)$ zu setzen ist.

12. (1) Man setze $z = \frac{1}{x}\,\zeta$. Das allgemeine Integral ist:

$$z = \frac{1}{x}\,\{\varphi(y + ax) + \psi(y - ax)\}.$$

(2) Führt man $x + ay = \xi$, $x - ay = \eta$ als neue unabhängige Veränderliche ein, so geht die Gleichung über in:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{\xi + \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) - \frac{2}{(\xi + \eta)^2} z = 0.$$

Durch die Substitution $z = \frac{1}{(\xi + \eta)^2} \zeta$ erhält man hieraus:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{\xi + \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right).$$

Demnach ist nach Nr. (1) der 2. Aufgabe in §. 271:

$$\zeta = (\xi + \eta)\{\varphi'(\xi) + \psi'(\eta)\} - 2\varphi(\xi) - 2\psi(\eta)$$

und daher:

$$z = (\xi + \eta)\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\varphi(\xi)}{(\xi + \eta)^2}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\psi(\eta)}{(\xi + \eta)^2}\right)\right\},$$

wo nach Ausführung der Differentiation für ξ und η wieder ihre Werthe in x und y zu setzen sind.

(3) Die Substitution $x = \frac{1}{\xi}$ führt diese Gleichung über in

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{\partial z}{\partial \xi} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

welche mit Nr. (1) übereinstimmt. Daher:

$$z = x\left\{\varphi\left(\frac{xy + a}{x}\right) + \psi\left(\frac{xy - a}{x}\right)\right\}.$$

(4) Führt man $y - ax = \xi$ und $-y = \eta$ als neue unabhängige Veränderliche ein und setzt $z = \frac{1}{\xi + \eta} \zeta$, so geht die Gleichung über in:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{\xi + \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right).$$

Daher ist:

$$z = \varphi'(y - ax) - \psi'(y) + \frac{2}{ax}\{\varphi(y - ax) + \psi(y)\}.$$

(5) Man vergleiche Nr. (2).

13. $x(y - z) = a^2$.

14. (1) Eliminirt man v zwischen beiden Gleichungen, so folgt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

daher: $u = f(x+iy) + \varphi(x-iy)$. Analog ist:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

und $v = f_1(x+iy) + \varphi_1(x-iy)$. Da aber $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ sein soll, muss $f_1 = -if$ und $\varphi_1 = i\varphi$ sein, also

$$v = \frac{1}{i}\{f(x+iy) - \varphi(x-iy)\}.$$

Im Specielleren (nämlich wenn φ dieselbe Function von $x-iy$ wie f von $x+iy$ ist) ergiebt sich hieraus, dass sowohl der reelle wie der imaginäre Theil einer jeden Function der complexen Veränderlichen $x+iy$ den gegebenen simultanen Gleichungen genügt.

(2) Eliminirt man β zwischen beiden Gleichungen, so folgt:

$$\frac{\partial^4 \alpha}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \alpha}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \alpha}{\partial y^4} = 0,$$

daher:

$$\alpha = f(x+iy) + xf_1(x+iy) + \varphi(x-iy) + x\varphi_1(x-iy).$$

Analog erhält man:

$$\frac{\partial^4 \beta}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \beta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \beta}{\partial y^4} = 0,$$

also:

$$\beta = F(x+iy) + xF_1(x+iy) + \Phi(x-iy) + x\Phi_1(x-iy).$$

Setzt man aber diese Werthe in eine der gegebenen Gleichungen ein, so findet man, dass $f_1 = \varphi_1 = F_1 = \Phi_1 = 0$ und $F = if$, $\Phi = -i\varphi$ sein muss. Es kommt dies darauf hinaus, dass die gegebenen Gleichungen bei verschiedenen Werthen von m und n nur dann zusammen bestehen können, wenn ihre beiden Seiten für sich verschwinden.

15. Die zweite Gleichung lässt sich in der Form schreiben:

$$\frac{y}{q} = \frac{x}{p} - \frac{1}{c'}.$$

Nach §. 195 integrirt, liefert sie das Integral:

$$z - b = \frac{ac'}{2a+c'}x^2 + ay^2.$$

Setzt man diesen Werth in die erste Gleichung ein, so wird dieselbe befriedigt, wenn man $a = -\frac{cc'}{c+c'}$ setzt. Demnach wird:

$$z - b = \frac{c\,c'}{c - c'}\,x^2 - \frac{c\,c'}{c + c'}\,y^2,$$

woraus die geometrische Bedeutung ohne Weiteres erhellt.

16. Schreibt man die Gleichung $Gs + Hp + K = 0$ in der Form $G\,d\,q + H\,d\,z + K\,d\,x = 0$, so kann man dieselbe als eine Gleichung von der in §. 150 bis 153 behandelten Art betrachten, in welcher q und z die abhängigen, x die unabhängige Veränderliche ist, während y für die Integration als Constante zu betrachten ist. Nach §. 152 besitzt diese Gleichung ein Integral mit einer willkürlichen Constanten, die in unserem Falle durch eine willkürliche Function von y ersetzt werden kann, wenn die Bedingung

$$G\left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial z}\right) + H\left(\frac{\partial K}{\partial q} - \frac{\partial G}{\partial x}\right) + K\left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial q}\right) = 0$$

erfüllt ist, und dieses Integral kann genau in der im §. 153 angegebenen Weise erhalten werden. — Für das Beispiel ist diese Bedingung erfüllt. Betrachtet man zunächst x als constant, wodurch man $(x + y\,z)\,d\,q - y\,q\,d\,z = 0$ erhält, so ergiebt die Integration dieses Ausdrucks:

$$(x + y\,z)\,\frac{1}{q} = \varphi\,(x).$$

Differentiirt man dies, indem man jetzt wieder x, z, q als veränderlich betrachtet, so ergiebt sich durch Vergleichung des entstehenden Resultats mit der gegebenen Gleichung: $\varphi'\,(x) = \frac{\varphi\,(x)}{x+y}$ und hieraus folgt: $\frac{\varphi\,(x)}{x + y} = \psi\,(y)$. Dies in $\frac{x + y\,z}{q} = \varphi\,(x)$ eingesetzt, giebt:

$$q = \frac{y}{(x + y)\,\psi\,(y)}\,z + \frac{x}{(x + y)\,\psi\,(y)}.$$

Integrirt man diese schliesslich wie eine gewöhnliche Differentialgleichung zwischen z und y und ersetzt die willkürliche Constante durch eine willkürliche Function von x, so erhält man das Integral des gegebenen Beispiels in der angegebenen Gestalt.

17. Setzt man etwa $\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = a^2$, so geht die Gleichung über in $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2 u = 0$. Die Lösung dieser ist:

$$u = \cos a\,x\,\varphi\,(y, z) + \sin a\,x\,\chi\,(y, z).$$

Man entwickele nun $\cos a x$ und $\sin a x$ nach Potenzen von x, ersetze dann a^2 wieder durch das Symbol $\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ und in der Entwickelung von $\sin a x$ setze man $a \chi (y, z) = \psi (y, z)$. Dabei kommt es nicht darauf an, welche Bedeutung man dem Symbol $a \chi (y, z)$ beilegen will; es genügt, zu wissen, dass dieser Ausdruck eine willkürliche Function von y und z darstellt. Man erhält auf diese Weise für u die Entwickelung:

$$u = \varphi (y, z) - \frac{x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \varphi (y, z)$$

$$+ \frac{x^4}{4!}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 \varphi (y, z) - \frac{x^6}{6!}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^3 \varphi (y, z) + \cdots$$

$$+ x \psi (y, z) - \frac{x^3}{3!}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \psi (y, z) + \frac{x^5}{5!}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 \psi (y, z) - \cdots,$$

wobei die Potenzen von $\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ebenfalls symbolisch zu verstehen sind. —

Die Annahme $u = e^{mx+ny+pz}$ führt ebenso wie in §. 251 leicht zu particulären Integralen der zweiten Gleichung. Man kann die letztere aber auch auf die Form der vorigen Gleichung zurückführen durch eine Transformation, welche analog ist der Transformation der Coordinaten. Setzt man

$$x + \beta y + \gamma z = \xi, \quad x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \eta, \quad x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \zeta,$$

so erhält man, wenn die resultirende Gleichung die Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = 0$$

annehmen soll, zur Bestimmung der sechs Grössen β, γ im Ganzen sechs Gleichungen. Abgesehen von der algebraischen Schwierigkeit dieser Bestimmung ist somit jene Reduction stets möglich. Ist aber die Discriminante der linken Seite gleich Null, so zerfällt die Gleichung in zwei lineare Gleichungen von der Form:

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

deren allgemeines Integral $u = \varphi (\mu x - \lambda y, \nu x - \lambda z)$ ist.

18. Führt man in der ersten Gleichung

$$\frac{1}{(b-1)\, y^{b-1}} + a x = \xi, \quad \frac{1}{(b-1)\, y^{b-1}} - a x = \eta$$

als neue unabhängige Veränderliche ein, so geht dieselbe über in:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{k}{\xi + \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = 0,$$

wo $k = \frac{b}{2(b-1)}$ ist. Nun hängt die Entscheidung darüber, ob sich die Gleichung in endlicher Form integriren lasse, nach §. 244 und 245 davon ab, ob eine der Functionen K verschwindet. Nach den Relationen in der 2. Aufgabe zu §. 245 hat man aber:

$$K_0 = \frac{k(1-k)}{(\xi+\eta)^2},\ K_1 = \frac{(1+k)(2-k)}{(\xi+\eta)^2}, \ldots,$$

$$K_i = \frac{(i+k)(i+1-k)}{(\xi+\eta)^2}.$$

Mithin verschwindet K_i, wenn $k = -i$ oder $k = i+1$, d. h. wenn k eine ganze positive oder negative Zahl ist. Da $k = \frac{b}{2(b-1)}$ ist, so folgt hieraus, dass unsere Gleichung in endlicher Form integrirbar ist, sobald $b = \frac{2i}{2i \pm 1}$ ist, wo i eine ganze positive Zahl bedeutet. Ist k eine ganze positive Zahl, so ist das Integral

$$z = \frac{\partial^{k-1}}{\partial \xi^{k-1}}\left\{\frac{\varphi(\xi)}{(\xi+\eta)^k}\right\} + \frac{\partial^{k-1}}{\partial \eta^{k-1}}\left\{\frac{\psi(\eta)}{(\xi+\eta)^k}\right\}.$$

Ist hingegen k eine ganze negative Zahl, so hat man:

$$z = (\xi+\eta)^{1-2k}.\left\{\frac{\partial^{-k}}{\partial \xi^{-k}}\left[\frac{\varphi(\xi)}{(\xi+\eta)^{1-k}}\right] + \frac{\partial^{-k}}{\partial \eta^{-k}}\left[\frac{\psi(\eta)}{(\xi+\eta)^{1-k}}\right]\right\}.$$

Durch die Substitutionen $ax + y = \xi$, $ax - y = \eta$ geht die zweite Gleichung in die einfache Form über:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{i(i+1)}{(\xi+\eta)^2} u.$$

Hier sind die Grössen K:

$$K_0 = -\frac{i(i+1)}{(\xi+\eta)^2},\ K_1 = \frac{(1-i)(2+i)}{(\xi+\eta)^2}, \ldots,$$

$$K_r = \frac{(r-i)(r+1+i)}{(\xi+\eta)^2}.$$

Demnach ist die Gleichung in endlicher Form integrirbar, wenn K_r verschwindet, d. h. wenn i eine ganze positive oder negative Zahl ist. Um das Integral darzustellen, benutzen wir das Resultat von §. 112, indem wir daselbst $a\frac{\partial}{\partial y}$ für n und i für m schreiben.

Dann ist: $$u = x^{i+1}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^i \frac{e^{ax\frac{\partial}{\partial y}}\varphi(y) + e^{-ax\frac{\partial}{\partial y}}\psi(y)}{x}$$

$$= x^{i+1}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^i \frac{\varphi(y+ax)+\psi(y-ax)}{x},$$

wenn i eine ganze positive Zahl ist, und analog:

$$u = x^{-i}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-i-1} \frac{\varphi(y+ax)+\psi(y-ax)}{x},$$

wenn i eine ganze negative Zahl ist.

19. Setzt man $u = \frac{z}{r}$, so geht die Gleichung über in:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{n(n+1)}{r^2} z.$$

Man erhält somit das Integral in der angegebenen Form unmittelbar aus dem Resultat des zweiten Beispiels in voriger Nummer.

Führt man in der zweiten Gleichung zunächst

$$r + at = \xi, \quad r - at = \eta$$

als neue unabhängige Veränderliche ein, so geht dieselbe über in:

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{\xi+\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0,$$

und wenn man noch $u = (\xi+\eta)^{-1/2} v$ setzt, so wird:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{4}\frac{1}{(\xi+\eta)^2} v = 0.$$

Um diese Gleichung durch ein Integral zu integriren, kann man analog verfahren wie in §. 258, nämlich so, dass man zunächst ein particuläres Integral derselben sucht und dieses dann in angemessener Weise verallgemeinert. Der letzten Gleichung genügt man nun durch eine Function $v = f\left(\frac{\xi}{\xi+\eta}\right)$, wenn f aus der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$x(1-x)f'' + (1-2x)f' - \frac{1}{4}f = 0,$$

wo $x = \frac{\xi}{\xi+\eta}$ ist, bestimmt wird. Setzt man $\xi - \lambda$ für ξ, $\eta + \lambda$ für η, wo λ eine willkürliche Constante ist, so ändern sich die Gleichungen für v und f nicht, es ist daher auch

$$v = f\left(\frac{\xi-\lambda}{\xi+\eta}\right)$$

ein particuläres Integral der Gleichung in v. Multiplicirt man dasselbe mit $\varphi(\lambda)\,d\lambda$ und integrirt nach λ zwischen beliebigen Grenzen, so bleibt es noch immer eine Lösung der Gleichung. Setzt man voraus, dass f endlich bleiben soll für $x = 0$, so kann man 0 und ξ als Integrationsgrenzen nehmen und daher stellt

$$v = \int_0^{\xi} f\left(\frac{\xi - \lambda}{\xi + \eta}\right) \varphi(\lambda)\,d\lambda$$

eine Lösung der Gleichung in v dar. Als zweite erhält man genau analog:

$$v = \int_0^{\eta} f\left(\frac{\eta - \lambda}{\xi + \eta}\right) \psi(\lambda)\,d\lambda.$$

Somit ist

$$u = \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ \int_0^{r+at} f\left(\frac{r + at - \lambda}{2r}\right) \varphi(\lambda)\,d\lambda \right.$$
$$\left. + \int_0^{r-at} f\left(\frac{r - at - \lambda}{2r}\right) \psi(\lambda)\,d\lambda \right\}$$

das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung, da es zwei willkürliche Functionen enthält. Was die Function f anlangt, so ist dieselbe aus Nr. (1) der 3. Aufgabe in §. 144 bekannt, und zwar ist es dasjenige der beiden Integrale jener Gleichung, welches für $x = 0$ endlich bleibt, d. h. es ist $f = K$, wo K das erste vollständige elliptische Integral erster Gattung ist.

20. Diese Gleichung stimmt mit der ersten transformirten Gleichung in voriger Nummer überein, wenn man darin $-\eta$ für η setzt.

21. Das Integral dieser Gleichung kann man durch wiederholte Anwendung des in §. 259 angegebenen Verfahrens erhalten. Nach einer daselbst aufgestellten Formel ist nämlich:

$$e^{l^4} = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2 + 2vl^2}\,dv,$$

ebenso:

$$e^{2vl^2} = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 + 2u(2vu)^{1/2} l}\,du,$$

somit:

$$e^{l^4} = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 - v^2 + \sqrt{8v}\,u\,l}\, d\,u\, d\,v.$$

Denkt man sich nun e^{l^4} als irgend eine Differentialoperation, so kann man die dadurch angedeutete Operation durch diejenige Operation ersetzen, welche durch die rechte Seite dargestellt wird. Nun folgt aus der gegebenen Gleichung die nachstehende:

$$u = e^{\left(t^{1/4} a \frac{\partial}{\partial x}\right)^4} f(x)$$

(vergl. §. 249). Demnach ist $l = t^{1/4} a \dfrac{\partial}{\partial x}$, somit:

$$\pi\, u = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 - v^2 + 2\sqrt{2}\, a\, u\, v^{1/2}\, t^{1/4} \frac{\partial}{\partial x}} f\,(x)\, d\,u\, d\,v,$$

oder:

$$\pi\, u = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 - v^2} f\,(x + 2^{3/2}\, a\, u\, v^{1/2}\, t^{1/4})\, d\,u\, d\,v.$$

22. Die Transformationsformeln sind:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{q},\quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{p}{q},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -\frac{t}{q^3},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial z\, \partial x} = -\frac{q\, s - p\, t}{q^3},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{q^2 r - 2\, p\, q\, s + p^2 t}{q^3}.$$

Setzt man die hieraus sich ergebenden Werthe von p, q, r, s, t in die gegebene Gleichung ein, so nimmt dieselbe die einfache Form an:

$$\left(1 + \frac{\partial y}{\partial z}\right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(1 + \frac{\partial y}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 y}{\partial z\, \partial x},$$

also:

$$1 + \frac{\partial y}{\partial x} = \left(1 + \frac{\partial y}{\partial z}\right) f_1\,(z),$$

und hieraus nach der Lagrange'schen Methode:

$$x + f\,(z) = F\,(x + y + z),$$

wobei

$$f\,(z) = \int \frac{d\,z}{f_1\,(z)}$$

ist. (Vergl. Aufgabe 2, (1) S. 716.)

23. Es mögen p_i, q_i, s_i die Ableitungen von z_i sein und man setze, unter $C_1, C_2, \ldots, C_5$ vorläufig noch unbestimmte Functionen

von x, y verstehend,

$$Z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \cdots + C_5 z_5,$$
$$P = C_1 p_1 + C_2 p_2 + \cdots + C_5 p_5,$$
$$Q = C_1 q_1 + C_2 q_2 + \cdots + C_5 q_5,$$
$$S = C_1 s_1 + C_2 s_2 + \cdots + C_5 s_5.$$

Dann hat man den Gleichungen

$$d z_i = p_i d x + q_i d y,$$
$$d p_i = (a_1 s_i + a_2 p_i + a_3 q_i + a_4 z_i) d x + s_i d y,$$
$$d q_i = s_i d x + (b_1 s_i + b_2 p_i + b_3 q_i + b_4 z_i) d y,$$
$$d s_i = (\alpha_1 s_i + \alpha_2 p_i + \alpha_3 q_i + \alpha_4 z_i) d x + (\beta_1 s_i + \beta_2 p_i + \beta_3 q_i + \beta_4 z_i) d y$$

zufolge die Gleichungen:

$$d Z = P d x + Q d y + z_1 d C_1 + \cdots + z_5 d C_5,$$
$$d P = (a_1 S + a_2 P + a_3 Q + a_4 Z) d x + S d y + p_1 d C_1 + \cdots + p_5 d C_5,$$
$$d Q = S d x + (b_1 S + b_2 P + b_3 Q + b_4 Z) d y + q_1 d C_1 + \cdots + q_5 d C_5,$$
$$d S = (\alpha_1 S + \alpha_2 P + \alpha_3 Q + \alpha_4 Z) d x + (\beta_1 S + \beta_2 P + \beta_3 Q + \beta_4 Z) d y + s_1 d C_1 + \cdots + s_5 d C_5.$$

Nun kann man aber die fünf Functionen C stets derart bestimmen, dass die vier Functionen Z, P, Q, S identisch verschwinden. Mithin folgt dann aus den letzten Gleichungen:

$$z_1 d C_1 + z_2 d C_2 + \cdots + z_5 d C_5 = 0,$$
$$p_1 d C_1 + p_2 d C_2 + \cdots + p_5 d C_5 = 0,$$
$$q_1 d C_1 + q_2 d C_2 + \cdots + q_5 d C_5 = 0,$$
$$s_1 d C_1 + s_2 d C_2 + \cdots + s_5 d C_5 = 0,$$

und diese zeigen, verglichen mit den vier Gleichungen

$$Z = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0, \quad S = 0,$$

dass

$$\frac{d C_1}{C_1} = \frac{d C_2}{C_2} = \cdots = \frac{d C_5}{C_5}$$

sein muss. Hieraus aber schliesst man, dass die Verhältnisse der Factoren C zu einem von ihnen constant sind. Setzt man die Werthe dieser Verhältnisse in die Gleichung $Z = 0$ ein, so stellt dieselbe eine Relation zwischen $z_1, z_2, \ldots, z_5$ mit constanten Coefficienten dar. — Verschwindet die Determinante $\Sigma \pm z_1 p_2 q_3 s_4$ zwischen den vier Functionen z_1, z_2, z_3, z_4, so kann man in dem Vorhergehenden $C_5 = 0$ setzen.

24. Bezeichnet man die Reihe für F mit $\Sigma A_{m,n} x^m y^n$ und schreibt man die beiden Differentialgleichungen, denen sie genügen soll, in der Form:

$$\left\{(\Theta + \Theta_1 + \alpha)(\Theta + \beta) - \frac{1}{x}\,\Theta(\Theta + \vartheta - 1)\right\} F = 0$$

und

$$\left\{(\Theta_1 + \Theta + \alpha)(\Theta_1 + \gamma) - \frac{1}{y}\,\Theta_1(\Theta_1 + \varepsilon - 1)\right\} F = 0,$$

wo Θ für $x\dfrac{\partial}{\partial x}$ und Θ_1 für $y\dfrac{\partial}{\partial y}$ gesetzt ist, so findet man leicht, dass die Coefficienten $A_{m,n}$ den Relationen genügen müssen:

$$(m + n + \alpha)\,(m + \beta)\,A_{m,n} - (m + 1)\,(m + \vartheta)\,A_{m+1,n} = 0$$

und

$$(n + m + \alpha)\,(n + \gamma)\,A_{m,n} - (n + 1)\,(n + \varepsilon)\,A_{m,n+1} = 0.$$

Setzt man aber für $A_{m,n}$, $A_{m+1,n}$, $A_{m,n+1}$ ihre Werthe ein, so findet man, dass diese Relationen in der That befriedigt sind. — Die Function F genügt somit auch der Summe beider Gleichungen. Bildet man diese Summe, so treten β und γ darin nur in der Verbindung $\beta + \gamma$ auf. Ist daher der Werth von $\beta + \gamma = \delta$ gegeben, so kann man $\beta = \delta + c$, $\gamma = -c$ annehmen, wo c eine ganz willkürliche Grösse ist, und demnach ist

$$F(\alpha,\ \delta + c,\ -c,\ \vartheta,\ \varepsilon,\ x,\ y)$$

eine Lösung der Gleichung

$$(1 - x)\,x\,r - 2\,x\,y\,s + (1 - y)\,y\,t$$
$$+ \{\vartheta - (\alpha + \delta + 1)\,x\}\,p + \{\varepsilon - (\alpha + \delta + 1)\,y\}\,q - \alpha\,\delta\,z = 0.$$

25. Es seien z_1, z_2, z_3, z_4 vier Functionen, welche den drei ersten Gleichungen genügen. Man kann dann stets vier andere Functionen C_1, C_2, C_3, C_4 bestimmen, so dass die drei Gleichungen

$$C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4 = 0,$$
$$C_1 p_1 + C_2 p_2 + C_3 p_3 + C_4 p_4 = 0,$$
$$C_1 q_1 + C_2 q_2 + C_3 q_3 + C_4 q_4 = 0$$

identisch bestehen. Differentiirt man diese, so erhält man mit Rücksicht auf die gegebenen Gleichungen:

$$z_1\,d\,C_1 + z_2\,d\,C_2 + z_3\,d\,C_3 + z_4\,d\,C_4 = 0,$$
$$p_1\,d\,C_1 + p_2\,d\,C_2 + p_3\,d\,C_3 + p_4\,d\,C_4 = 0,$$
$$q_1\,d\,C_1 + q_2\,d\,C_2 + q_3\,d\,C_3 + q_4\,d\,C_4 = 0,$$

und diese führen, verglichen mit dem vorigen Gleichungssystem, zu den Relationen:

$$\frac{dC_1}{C_1} = \frac{dC_2}{C_2} = \frac{dC_3}{C_3} = \frac{dC_4}{C_4},$$

woraus folgt, dass die Verhältnisse der C constant sind. Setzt man die Werthe derselben in $C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4 = 0$ ein, so stellt diese Gleichung eine Relation zwischen z_1, z_2, z_3, z_4 mit constanten Coefficienten dar. — Verschwindet nun die Determinante $\Sigma \pm z_1 p_2 q_3$ zwischen den drei Functionen z_1, z_2, z_3, so kann man im Vorhergehenden einfach $C_4 = 0$ setzen.

26. Differentiirt man die Gleichung $s + xyp + kyz = 0$ hinter einander n-mal nach x und setzt $\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = u$, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + xy \frac{\partial u}{\partial x} + (k+n)\, y u = 0.$$

Kann man das Integral der letzteren finden, so hat man auch das der gegebenen. Ist nun k eine negative ganze Zahl und $n = -k$, so hat man $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + xy \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial^{-k} z}{\partial x^{-k}} = u$, also

$$u = \int \varphi(x)\, e^{-\frac{1}{2} x y^2}\, dx + \psi(y).$$

Bei der Integration, welche erforderlich ist, um z zu erhalten, braucht man keine willkürlichen Functionen von y mehr einzuführen, da bereits die nothwendige Anzahl willkürlicher Functionen vorhanden ist und die etwa neu eingeführten einer Anzahl von Relationen genügen müssten, durch welche ihre Zahl wieder auf zwei reducirt werden würde. — Ist k eine positive ganze Zahl, so gehe man aus von der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + xyu = 0$ und differentiire diese k-mal nach y; setzt man dann $\frac{\partial^k u}{\partial y^k} = z$, so erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + xy \frac{\partial z}{\partial y} + kxz = 0,$$

welche mit der gegebenen übereinstimmt, wenn man x und y mit einander vertauscht. Um also z im Falle eines positiven k zu finden, gehe man aus von dem oben angegebenen Werthe von u, differentiire denselben k-mal nach y und vertausche nach Ausführung der Differentiation x und y mit einander.

27. Setzt man $e^z = u$, so kann man die Gleichung schreiben:

$$\frac{\partial^2 \log u}{\partial x \partial y} = u.$$

Denkt man sich u als die Ableitung nach x von einer gewissen Function v von x und y, d. h. setzt man $u = \frac{\partial v}{\partial x}$, so kann man die Gleichung nach x integriren, also

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\log \frac{\partial v}{\partial x}\right) = v + \varphi(y),$$

oder:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = v \frac{\partial v}{\partial x} + \varphi(y) \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Integrirt man von neuem nach x, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2} v^2 + \varphi(y) v + \psi(y).$$

Es sei nun $v = \omega(y)$ ein besonderer Werth von v, welcher dieser Gleichung genügt, so dass

$$\omega'(y) = \frac{1}{2}\omega^2(y) + \varphi(y)\omega(y) + \psi(y)$$

ist, und es werde angenommen, dass sich der allgemeine Werth von v darstellen lasse in der Form: $v = \omega(y) - \frac{1}{w}$; dann muss w der Gleichung genügen:

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \{\omega(y) + \varphi(y)\} w = \frac{1}{2},$$

und indem man

$$\frac{1}{2}\int e^{\int[\omega(y)+\varphi(y)]\,dy}\,dy = \chi(y)$$

setzt, findet man:

$$w = \frac{f(x) + \chi(y)}{2\chi'(y)}.$$

Demnach:

$$v = \omega(y) - \frac{2\chi'(y)}{f(x) + \chi(y)},$$

und hieraus:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = u = 2\frac{f'(x)\chi'(y)}{[f(x) + \chi(y)]^2}.$$

Die zweite Gleichung $s = zp$ ist ein besonderer Fall von einer der vorher erhaltenen Gleichungen; man erhält ihn, wenn man $\varphi(y) = 0$

setzt. Analog wie vorher erhält man für z den Werth:

$$z = \omega(y) - e^{\int \omega(y)\,dy}\left[f(x) + \frac{1}{2}\int e^{\int \omega(y)\,dy}\,dy\right]^{-1},$$

wo $\omega(y)$ ein besonderer Werth von z ist, welcher der Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} z^2 + \psi(y)$$

genügt. Da aber $\psi(y)$ eine willkürliche Function ist, so kann man als einen solchen besonderen Werth von z ebenfalls eine willkürliche Function von y nehmen. Setzen wir daher

$$\frac{1}{2}\int e^{\int \omega(y)\,dy}\,dy = \chi(y),$$

so folgt:

$$z = \frac{\chi''(y)}{\chi'(y)} - \frac{2\chi'(y)}{f(x) + \chi(y)}.$$

(Liouville, Journ. d. Math., I. Série, t. XVIII.)

28. (1) Nimmt man in den Hülfsgleichungen (2) und (3) S. 460 das untere Vorzeichen, so werden dieselben hier:

$$z\,dq + pq\,dx = 0 \quad \text{und} \quad q^2\,dy - dx = 0.$$

Diese liefern in Verbindung mit $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ eine integrable Combination, deren Integral $zq - x = \beta$ zugleich ein particuläres Integral der gegebenen Gleichung ist. Ein zweites ist $x = \alpha$. Durch weitere Integration des ersteren folgt:

$$\frac{1}{2} z^2 = (x + \beta)\,y + \gamma.$$

Betrachtet man nun hierin γ als Function von $x = \alpha$ und β, so wird das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung dargestellt durch das System:

$$\frac{1}{2} z^2 - (x + \beta)\,y - \gamma = 0,\; 0 = -y + \frac{\partial \gamma}{\partial \beta},$$

wofern γ bestimmt wird durch die Gleichung:

$$(x + \beta)^2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x\,\partial \beta} - 2(x + \beta)\frac{\partial \gamma}{\partial \beta} + 2\gamma = 0.$$

Setzt man in dieser $\gamma = (x + \beta)^2\,\delta$, so wird:

$$(x + \beta)\frac{\partial^2 \delta}{\partial x\,\partial \beta} + 2\frac{\partial \delta}{\partial x} = 0$$

und das allgemeine Integral dieser ist:

$$\delta = \psi(\beta) + \int \frac{\varphi(x)\,dx}{(x + \beta)^2}.$$

Mithin:

$$\gamma = (x+\beta)^2 \left\{ \psi(\beta) + \int \frac{\varphi(x)\, d x}{(x+\beta)^2} \right\}.$$

(2) Untersucht man, ob es möglich sei, dieser Gleichung durch einen Ausdruck von der allgemeinen Form:

$$z = A x^2 + B x y + C y^2 + D x + E y + F$$

zu genügen, so findet man als particuläres Integral der gegebenen Gleichung: $z = \alpha x + \beta y - \gamma x y$. Betrachtet man nun hierin γ als Function von α und β und diese als Functionen von x und y, so wird der letzte Ausdruck noch immer ein Integral der gegebenen Gleichung darstellen, wenn man damit die beiden Gleichungen verbindet:

$$0 = 1 - y \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}, \quad 0 = 1 - x \frac{\partial \gamma}{\partial \beta}$$

und γ aus der Gleichung bestimmt:

$$a \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha^2} + b \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \beta^2} + l \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} + m \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} + n = 0.$$

Diese Gleichung ist aber, sei es in endlicher Form, sei es mittelst bestimmter Integrale, immer nach der Methode von Laplace (Histoire et Mémoires de l'Acad. des Sciences 1779, Mémoire sur les suites) integrirbar.

(3) Die beiden Systeme von Hülfsgleichungen (1) und (2) auf S. 459 u. 460 werden hier

$$q\, d y + y\, d q = (p + x)\, d x, \quad d p + d x = 0$$

und

$$q\, d y + y\, d q = 0, \quad q\, d p + (p + x)\, d q + q\, d x = 0.$$

Das erste liefert das Integral: $p + x = \alpha$, das zweite die beiden Integrale $q(p + x) = \beta$ und $q y = \beta_1$. Benutzt man zunächst das erste und zweite Integral, so erhält man in

$$z = \alpha x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{\beta}{\alpha} y + \gamma$$

ein particuläres Integral der gegebenen Gleichung. Betrachtet man γ als eine Function von α und β, diese selbst als Functionen von x und y und verbindet man mit dieser Gleichung die beiden folgenden:

$$0 = x - \frac{\beta y}{\alpha^2} + \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}, \quad 0 = \frac{y}{\alpha} + \frac{\partial \gamma}{\partial \beta},$$

so erhält man das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung,

wenn man γ aus der Gleichung $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha \, \partial \beta} = 0$ bestimmt. Es ist also $\gamma = \varphi(\alpha) + \psi(\beta)$ und daher wird das allgemeine Integral dargestellt durch das System der drei Gleichungen:

$$z = \left(\alpha - \frac{x}{2}\right) x + \frac{\beta}{\alpha} y + \varphi(\alpha) + \psi(\beta),$$

$$0 = x - \frac{\beta y}{\alpha^2} + \varphi'(\alpha), \quad 0 = \frac{y}{\alpha} + \psi'(\beta).$$

(Vergl. Nr. (2) der 5. Aufg. in §. 241.) — Nimmt man aber die beiden Integrale $p + x = \alpha$ und $qy = \beta$, so ist

$$z = \alpha x - \frac{1}{2} x^2 + \beta_1 \log y + \gamma$$

ein particuläres Integral der gegebenen Gleichung. Analog wie vorher erhält man dann das allgemeine Integral durch das System der drei Gleichungen:

$$z = \alpha x - \frac{1}{2} x^2 + \beta_1 \log y + \beta_1 \log\left(\log \frac{1}{\alpha}\right) + \varphi(\alpha) + \psi(\beta),$$

$$0 = x + \frac{\beta_1}{\alpha \log \alpha} + \varphi'(\alpha), \quad 0 = \log y + \log\left(\log \frac{1}{\alpha}\right) + \psi'(\beta).$$

Autoren-Verzeichniss *).

---

*) Dieses Verzeichniss enthält, ohne irgend welchen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben, ausser den im Buche selbst angeführten Namen noch die Titel von einigen der wichtigsten Abhandlungen besonders über die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, sowie einige der hauptsächlicheren Lehrbücher über die Differential- und Integralrechnung, welche die Lehre von den Differentialgleichungen etwas ausführlicher behandeln.

Imschenetsky, S. 387 u. ff.: Sur l'intégration des équ. aux dériv. part. du premier ordre in Grunert's Archiv der Math. und Phys. Bd. 50. — S. 429 u. ff.: Mémoire sur l'intégration des équ. aux dériv. part. du second ordre d'une fonction de deux variables indépendentes in Grunert's Archiv Bd. 54.

Johnson, Woolsey, S. 50: Private Mittheilung an den Verfasser.

Kummer, S. 106 u. ff.: Crelle's Journal Bd. 15.

Lacroix, Traité du calc. diff. et intégr. II. éd. Paris 1810 bis 1819. Bd. II u. III.

Lagrange, S. 339 u. ff.: Sur l'intégration des équ. aux différences part. du premier ordre, Mémoires de l'Ac. de Berlin 1772 oder Oeuvres t. III. Paris 1869. — Sur les intégrales particulières des équ. diff., Mémoires de l'Ac. de Berlin 1774 oder Oeuvres t. IV. — Sur différentes questions d'analyse relative à la théorie des solutions particulières, Mém. de l'Ac. de Berlin 1779 oder Oeuvres t. IV. — Méthode générale pour intégrer les équ. aux différences part. du premier ordre, lorsque ces diff. ne sont que linéaires, Mém. de l'Ac. de Berlin 1785. — Leçons sur le calcul des fonctions. Paris 1806. — Théorie des fonctions analytiques. Paris 1813.

Laplace, S. 427 u. ff.: Mémoires de l'Ac. des Sciences de Paris 1773 et 1779.

Legendre, S. 162: Mém. de l'Ac. des Sciences de Paris. t. X et XII, oder Exercices du calc. int. — S. 407: Mém. de l'Ac. des Sciences de Paris. 1787.

Liouville, S. 81: Siehe Moigno. — S. 321: Journal de Math. p. et appl. II. Série t. I. — S. 736: Journal de Math. I. Série t. XVIII.

Lobatto, S. 260, 266: Crelle's Journal Bd. 17.

Lommel, S. 192 u. ff.: Studien über die Bessel'schen Functionen, Leipzig 1868; und Abh. in den Math. Annal. Bd. 2; 3; 4; 9; 14; 16.

Mac Mahon, S. 319: Quarterly Journal of pure a. applied Math. t. XIX.

Mainardi, S. 147: Tortolini's Annali di Scienze Mat. e Fisiche, t. I.

Malet, S. 104: Phil. Trans. 1882.

Malmsten, S. 208: Cambr. Math. Journ. II. Série. t. V.

Mansion, S. 387: Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Gand 1875. (Enthält ausführliche Litteraturangaben.)

Meth, S. 627: Osterprogramm d. Königstädt. Realgymnasiums zu Berlin v. J. 1885.

Moigno, Leçons sur le calc. diff. et le calc. intégr. t. II. Paris 1844.

Monge, S. 404 u. ff: Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles in Mémoires de l'Ac. des Sciences 1784. — S. 720: Application de l'Analyse à la Géométrie. 5. éd. Paris 1850.